Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

R. B. Braithwaite

La explicación científica

JOSE PADRON G.

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS, S. A. - MADRID

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

RICHARD B. BRAITHWAITE

JOSÉ PADRÓN G.
ccs, 110490.

La explicación científica

ESTRUCTURA Y FUNCION

EDITORIAL TECNOS, S. A. - MADRID

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

A la memoria de
JOHN MAYNARD KEYNES.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Indice

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Prefacio

En el presente libro he recogido la sustancia del curso de conferencias que di en 1946 como Tarner Lecturer *del Trinity College, de Cambridge, si bien al prepararlas para la publicación he desarrollado el hilo de sus razonamientos, lo he trabajado más y —espero— lo he mejorado.*

En él pretendo primariamente examinar los rasgos lógicos comunes a todas las ciencias. Es casi una trivialidad decir que el proceso de toda ciencia consiste, más o menos explícitamente, en excogitar hipótesis generales —de mayor o menor grado de generalidad— de las que deduce consecuencias particulares que puedan ser sometidas a contraste por la observación y la experimentación, pero en modo alguno es trivial lo que esta tesis implica; y este libro intenta hacer ver cómo lo involucrado por ella puede iluminar muchos rasgos del modo de proceder científico que parecen misteriosos, y resolver gran número de las dificultades que han encontrado los filósofos en dicho proceder.

Pues la ciencia, en su avance, no se contenta con asentar generalizaciones sencillas de hechos observables, sino que trata de explicar estas generalizaciones de bajo nivel deduciéndolas de hipótesis más generales, de un nivel más elevado. Tal organización de la ciencia en un sistema deductivo jerarquizado requiere la utilización de técnicas deductivas de gran sutileza, proporcionadas por la matemática pura. A medida que la jerarquía de hipótesis de generalidad creciente se eleva, los conceptos de que éstas se ocupan dejan de ser propiedades directamente observables de las cosas y pasan a ser conceptos «teoréticos» —átomos, electrones, campos de fuerza, genes o procesos mentales inconscientes—, cuya vinculación a los hechos observables se efectúa a través de relaciones lógicas sumamente complicadas. Los cuatro primeros capítulos del libro están dedicados a explicar el papel que desempeñan en la organización propia de una teoría científica el razonamiento matemático y los conceptos y «modelos» teoréticos.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Se ha hecho demasiado tráfico de misterios con las «entidades matemáticas abstractas» que entraña un sistema teórico complejo, como el de la física contemporánea. Es cierto que las matemáticas empleadas en semejante sistema son difíciles, sólo comprensibles cuando se ha tenido una larga preparación; pero lo que no precisa ningunos conocimientos matemáticos es comprender el modo en que aquéllas —con toda su dificultad— se emplean: basta estar dispuesto a pensar explícitamente acerca de los modos de pensar y acerca de la manera en que se utilizan el lenguaje científico y el simbolismo para expresar una teoría científica. Por tanto, me he esforzado por construir el ejemplo más sencillo posible de teoría científica —excesivamente sencillo para que pueda aparecer en tal forma en ciencia alguna— con objeto de poner de manifiesto tanto el modo exacto en que los conceptos teoréticos entran en la teoría científica como de qué manera, exactamente, están entrañadas las deducciones matemático-lógicas. Este sencillo ejemplo, en el que se emplea solamente el álgebra de clases no numérica, me permite, asimismo, dar un sentido preciso a la noción de «modelo» de una teoría científica y discutir el uso propio (y el impropio) de tales modelos.

El tema de los tres capítulos subsiguientes está formado por los enunciados probabilitarios, su sentido y el papel que desempeñan en la ciencia. Para un filósofo de la ciencia que contemple «desde arriba» las orientaciones y avances recientes de la física, el cambio más revolucionario será el puesto tan fundamental que la mecánica cuántica concede a las leyes irreductiblemente estadísticas («indeterministas»), y tratará, por consiguiente, de dar cuenta del modo de funcionar de dichos enunciados probabilitarios dentro de los sistemas deductivos de la ciencia. En estos capítulos encontramos que la peculiaridad fundamental de tales enunciados científicos reside en el hecho de que el conjunto de observaciones con el que se contrastan puede refutarlos sólo provisionalmente, nunca con carácter definitivo; pero su «holgura de ajuste» es, sin embargo, una noción exacta, y la matemática de las probabilidades se ha desarrollado lo bastante (de nuevo he hecho un gran esfuerzo por utilizar el mínimo posible de aparato matemático) para poder elucidar el sentido de la probabilidad que se emplea en la ciencia. El capítulo séptimo se ocupa de los principios que deben regir la elección entre dos hipótesis estadísticas posibles (este problema está mirado desde un nuevo ángulo, que se debe a una obra reciente de Abraham Wald).

En los dos capítulos que vienen después se debaten la justificación de la inducción y la condición propia de las leyes naturales y de

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

las causales, problemas que han burlado a los filósofos a partir de la época de Hume. En lo que respecta a los científicos mismos, nunca se ha preocupado mucho de tales problemas, lo cual tiene gran trascendencia para el modo en que el filósofo debería ocuparse de ellos, aunque (contra lo que a veces se piensa) no constituye una excusa para que no los tenga en cuenta en absoluto. Lo mismo que en el resto del libro, he intentado aquí la dificultosa empresa de decir algo positivo —y lo más definido que he podido— en lugar de dedicarme a la crítica de tesis filosóficas rivales; no es que me encuentre satisfecho con lo que he dicho sobre la inducción, pero creo que merece que se lo califique como una aportación útil para debates ulteriores. Los dos capítulos finales enlazan entre sí los diferentes modos en que la ciencia nos proporciona explicaciones.

Si se me preguntase qué es lo que este libro contiene de estudios originales mencionaría, en concreto, las exposiciones de la forma en que la ciencia utiliza la probabilidad (capítulos quinto y sexto), de la relación entre las teorías científicas y los «modelos» que se proponen para ellas (capítulo cuarto) y de la explicación teleológica (capítulo décimo); pero me apresuraría a añadir que en caso de que no creyera que mi modo de exponer era nuevo y de cierto valor no hubiera escrito un libro que constituye una obra general sobre la filosofía de la ciencia. He tratado de salvar la solución de continuidad entre la conciencia que tienen todas las personas cultas o formadas acerca del modo en que procede en general la ciencia (por el método hipotético-deductivo) y la vaguedad de sus ideas, o su perplejidad, en cuanto a cuestiones científicas tan fundamentales como la función de las matemáticas en la ciencia, la naturaleza en los conceptos teoréticos y los principios de la inferencia estadística; y ello valiéndome de un examen muy detallado de ejemplos sencillos construidos de tal modo que revelen los rasgos lógicamente importantes sin introducir otros intrascendentes; aun cuando no pueda decirse, acaso, que estos ejemplos aporten nada a «la enseñanza y la investigación», son, según creo, una aportación concreta para la «formación». A la inversa, si he omitido en este libro muchos asuntos que podrían haber encontrado un sitio en él (por ejemplo, la naturaleza y función de la medida en la ciencia), la explicación está en que me ha parecido que no tenía nada nuevo que decir acerca de ellos.

He de dar las gracias en primer lugar a mis alumnos y a otras personas que han estado en desacuerdo y discutido conmigo durante el último cuarto de siglo, obligándome de este modo a mejorar tanto el contenido como el estilo de mi pensamiento sobre la filosofía de la

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

ciencia. Las cosas que debo a filósofos determinados, lo mismo a los que han pensado en dirección análoga a la mía que a los que lo han hecho en otras diferentes, son demasiado numerosas para mencionarlas por separado; mas para mí es algo evidente que no filosofaría de la forma en que lo hago si no hubiese tenido la fortuna, en Cambridge, de sentarme a los pies[1] *de G. E. Moore y Ludwig Wittgenstein.*

Con todo, he de expresar mi reconocimiento en dos casos específicos. Cuando tuve el melancólico privilegio de editar los papeles de F. P. Ramsey, espléndidamente sugerentes, tras su muerte —acaecida en 1930—, mi pensamiento acerca del papel de los conceptos teóricos y de la filosofía de la ciencia en general experimentó una reorientación completa. Y nueve años antes había sido la aparición del Treatise on Probability, *de J. M. Keynes, en el verano de 1921, lo que nos había atraído, a Ramsey y a mí (los dos en los estudios de licenciatura, él terminado el primer curso, yo el segundo), hacia los problemas de la probabilidad y de la inducción. Apenas hago referencias a Keynes en este libro, y las que hay son críticas, porque no puedo aceptar su tesis acerca de la probabilidad; pero su influencia —la de su amistad y su aliento no menos que la de su estupendo libro— ha sido lo que me ha hecho pensar seriamente acerca de la lógica de la ciencia. Cuando se me encomendaron las* Tarner Lectures *de la Cuaresma* [Lent Term] *de 1946 le pedí permiso —y me lo concedió— para dedicarle el libro que saldría de las conferencias; ahora puedo dedicarlo sólo a su memoria.*

Estoy muy agradecido al Master *y los* Fellows *del Trinity College por haberme honrado con la invitación a dar el noveno curso de las* Tarner Lectures. *La Aristotelian Society me ha permitido amablemente incluir en el capítulo décimo mi discurso presidencial a ella en 1946, que habían publicado en sus* Proceedings. *Estoy en deuda por F. J. Anscombe por haber leído críticamente los tres capítulos consagrados a la probabilidad (una vez en el texto mecanografiado, otra en las galeradas), por haberlos comentado en forma que me ha sido de gran ayuda y por haber evitado que cometiese un error matemático. Harold Jeffreys y Gilbert Ryle han leído también la copia a máquina y me han hecho sugerencias de las que he sacado partido. Por fin, tengo que expresar mi gratitud a mi esposa, Margaret Master-*

---

[1] El autor emplea la expresión india clásica para indicar que se ha sido discípulo de un sabio o *guru*.—*N. del T.*

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

man, por su constante aliento durante el período, que tanto se ha estirado, de escribir y corregir el libro.

R. B. Braithwaite

Cambridge,
31 de octubre de 1951
23 de agosto de 1952

Con motivo de la reimpresión de este libro tengo ocasión de subsanar cierto número de pequeños errores, así como un defecto de mi definición original de sistema deductivo impuro *(pág. 51), sobre el que C. G. Hempel me ha llamado la atención. Estoy muy agradecido a todos los que han colaborado conmigo en esta forma.*

R. B. B.

4 de noviembre de 1954.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Introducción

¿Qué es la ciencia?

Tomaremos en este libro la palabra «ciencia» en un sentido tal que incluya todas las ciencias de la naturaleza —tanto física como biológica—, así como las partes de la psicología y de las ciencias sociales (antropología, sociología, economía) que tienen un objeto empírico; mientras que quedarán excluidas la filosofía en cuanto no es una «ciencia general», la historia que se ocupa meramente del acontecer de sucesos históricos particulares y las disciplinas de la matemática pura y de la lógica simbólica, que no tratan en absoluto de hechos empíricos (excepto, quizá, en un sentido muy peculiar). Este sentido de tal palabra corresponde bastante ajustadamente a su uso moderno más frecuente (que acaso se utilizó por primera vez públicamente en el nombre de la British Association for the Advancement of Science, fundada en 1931) y es sinónimo del de «ciencia natural» si se incluye al hombre dentro de la naturaleza.

En este sentido, pues, la función de una ciencia es la de asentar leyes generales que abarquen el comportamiento de los sucesos u objetos empíricos de que se ocupe, permitiéndonos de este modo enlazar nuestro conocimiento de sucesos conocidos separadamente y hacer predicciones fiables de eventos aún no conocidos. Esta función de asentar leyes generales es común a todas las ciencias de la naturaleza y es también característica de las partes de la psicología y de las ciencias sociales a las que ordinariamente llamamos científicas —por oposición a filosóficas—. Cuando una ciencia se encuentra en un grado de desarrollo muy elevado, como ocurre con la física, las leyes correspondientes formarán una jerarquía, en la que muchas leyes especiales tendrán el carácter de consecuencias lógicas de otras sumamente generales y expresadas en forma muy quintaesenciada; si la ciencia se encuentra en un estadio primerizo de su desarrollo —al que frecuentemente se denomina estadio «de historia natural»— las le-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

yes pueden consistir meramente en las generalizaciones que entrañe la clasificación de cosas en diversas clases. Obsérvese que clasificar una ballena entre los mamíferos es aseverar la generalización de que todas las crías de ballena se alimentan de la leche de sus madres, proposición que constituye una ley general, aun cuando de alcance limitado; nos permite predecir que la próxima ballena que encontremos será un mamífero, y aísla un rasgo importante en el que las ballenas difieren de los peces.

El que subrayemos cómo la función esencial de la ciencia es asentar leyes generales no significa que pasemos por alto el hecho de que en muchas ciencias el científico atribuye la máxima importancia a cuestiones históricas acerca de las causas de sucesos particulares y no a las que se refieren directamente a leyes generales: los biólogos se preguntan por el origen de la vida en la Tierra, los astrónomos por el del sistema solar. Pero afirmar que tal o cual evento particular es efecto de un conjunto de circunstancias entraña la aserción de una ley general, y preguntar por la causa de un acontecimiento es siempre preguntar por una ley general que sea aplicable a dicho acontecimiento particular; y si bien podemos estar más interesados por la aplicación de la ley que por ésta en sí misma, necesitamos asentar la ley para que podamos saber cuál es la que hemos de aplicar.

Así pues, el concepto fundamental para la ciencia es el de ley científica, y su objetivo fundamental el de asentar tales leyes. Para comprender el modo en que funciona una ciencia y aquél en que nos surte de explicaciones de los hechos que investiga es necesario comprender la naturaleza de las leyes científicas y en qué consiste el asentarlas.

Es contradictorio hablar de una «ley científica falsa». Puesto que nos vamos a ocupar, no de la verdad de las leyes científicas existentes, sino de la naturaleza de las proposiciones que en caso de ser verdaderas sean leyes científicas, llamaremos a estas proposiciones «hipótesis científicas». Por tanto, una hipótesis científica es una proposición general acerca de cosas de cierto tipo; y es una proposición empírica en el sentido de que cabe someterla al contraste de la experiencia: ésta es pertinente para la cuestión acerca de si la hipótesis del caso es verdadera o no, esto es, si se trata o no de una ley científica.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

La base empírica de la ciencia

¿Qué queremos decir aquí con «experiencia»? A grandes rasgos podemos dar dos sentidos posibles a «experiencia» en este contexto, uno más amplio y otro más restringido.

Según el sentido amplio, con «experiencia» se abarcan todos los hechos que en el lenguaje ordinario llamaríamos hechos de observación: hechos acerca de objetos materiales tales como sillas y mesas, acerca de acontecimientos físicos tales como destellos luminosos y también acerca de sensaciones y de otras experiencias, así como de sus objetos o contenidos. En el sentido restringido, aquella palabra abarca sólo esta última clase de hechos: hechos que constituyen los datos del conocimiento inmediato, directo, indudable, incorregible (por citar los adjetivos que emplean los filósofos). Entre estos últimos, los que acepten la tesis fenomenista de que el conocimiento de objetos y acontecimientos materiales es analizable de una u otra forma a base del conocimiento de sensaciones o sus objetos (datos sensoriales) tenderán a usar el sentido más restringido de «experiencia», mientras que los que admitan la tesis realista de que los objetos materiales son lógicamente independientes de la sensación tenderán a emplear el término de «experiencia» en el sentido más amplio.

Ahora bien, un libro —como el presente— dedicado a la filosofía de la ciencia no necesita ocuparse de las delicadas cuestiones involucradas en la discusión de la filosofía de la percepción o de «nuestro conocimiento del mundo exterior». Estas cuestiones han atraído, de un modo u otro, la atención de los mayores filósofos desde el tiempo de Sócrates, y no hay acuerdo alguno entre los mejores filósofos contemporáneos acerca de la respuesta que debería dárseles, ni siquiera, ciertamente, acerca de cómo deberían formularse exactamente. Los fenomenistas no han sido capaces de proponer análisis de las proposiciones sobre objetos materiales que convenzan a sus adversarios[1], y los realistas no han logrado satisfacer completamente la petición formulada por todos los filósofos de la tradición empirista de que la experiencia inmediata haya de considerarse como última instancia de apelación. En su forma moderna, esta controversia ha quedado profundamente entreverada con las cuestiones relativas a la naturaleza de la

[1] Puede verse mi propio intento de análisis cuasifenomenista en *Proceedings of the Aristotelian Society*, n. s., vol. 38 (1937-38), págs. 269 y sigs., y en *Erkenntnis*, volumen 7 (1938), págs. 281 y sigs.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

comunicación y al uso del lenguaje: algunos realistas preguntan si los enunciados acerca de la experiencia inmediata, que por su naturaleza es privada de quien la experimenta e incomunicable a los demás, no son más análogos a las interjecciones que a proposiciones públicamente comunicables, mientras que los fenomenistas no pueden concebir cómo pueda arraigar en los hechos un lenguaje público acerca de objetos materiales si no es por referencia al incorregible conocimiento proporcionado por la experiencia inmediata. Pero toda esta discusión no es pertinente en cuanto a las cuestiones de que se ocupa este libro; aquí tratamos de la naturaleza de las leyes científicas y de cómo se refieren a los hechos observados, que en la mayoría de los casos son hechos del comportamiento de objetos materiales —el movimiento de un cuerpo, el trazo de una escala al que señale la aguja de un aparato de medida, la explosión de una bomba atómica—, y lo que nos interesa es la relación entre los hechos de este tipo y las leyes científicas que los abarquen: en este contexto no nos preocupa la cuestión sobre si se tiene o no experiencia directa de semejantes hechos, ni, en caso de que no se tenga, sobre cuál sea su relación con los datos sensoriales o con otras entidades experimentadas inmediatamente. Por consiguiente, con el fin de debatir la filosofía de la ciencia podemos tomar «experiencia» en el sentido amplio, de modo que abarque todos los hechos que ordinariamente decimos que se observan, y dejar de lado la pregunta referente a si hay o no un sentido más fundamental de experiencia —la experiencia inmediata— a base de la cual pueda en definitiva analizarse la experiencia en sentido amplio.

Un realista y un fenomenista filosóficos pueden estar de perfecto acuerdo en cuanto al análisis de una ley de la mecánica a base de los movimientos observables de cuerpos materiales; discreparán acerca de si es menester un análisis de tales sucesos observables a base de algo epistemológicamente más primitivo, mas para el fenomenista las dos etapas del análisis son diferentes, de modo que el realista y él pueden ponerse de acuerdo para el debate de esta primera etapa sin perjuicio de que se pongan también en cuanto a su discrepancia sobre si existe o no una segunda.

En filosofía los problemas están tan entrelazados mutuamente que no debe desdeñarse ninguna ocasión que surja de separarlos. Por tanto, supondremos en este libro que la experiencia a que se refieren las leyes científicas incluye todos los hechos observables, y tomaremos «observación» en su sentido amplio y cotidiano, sin limitarlo filosóficamente. Tampoco haremos referencia alguna, fuera de este capítulo,

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

pírico sin ser definible explícitamente en términos experimentales es sumamente oportuno para el problema con que se enfrenta el fenomenista; pero en el problema de la percepción se encuentra un rasgo que falta en el de las leyes científicas, rasgo que suscita complicaciones filosóficas muy sutiles y difíciles, que no están entrañadas en el estudio de las leyes científicas: se trata del carácter privado de las sensaciones, datos sensoriales o hechos directamente conocidos que el fenomenista quiere tomar como datos últimos. El problema de la percepción requiere tener en cuenta cómo paso del conocimiento proporcionado por mis propias experiencias sensitivas —conocimiento que, para el fenomenista, es esencialmente privado— al conocimiento público de los objetos materiales del sentido común. De ahí que el filósofo de la percepción tenga que refutar el solipsismo o bien que avenirse a él, y que haya de explicar el paso de lo privado (o de lo que parece ser privado) a lo público. Pero un filósofo de la ciencia que se ocupe de las relaciones entre las leyes científicas, públicas, y los hechos de observación públicos no tiene por qué tratar en absoluto del problema de cómo se trascienda la experiencia inmediata; tiene, por tanto, una tarea más sencilla que la del filósofo de la percepción, y sería una equivocación poner en peligro sus posibilidades de éxito en la resolución de los difíciles problemas que le conciernen mezclándolos con los problemas, aún más difíciles y de una índole enteramente distinta, que se enfrentan al filósofo de la percepción.

3) Mi crítico podría redargüir, sin embargo, que si bien lo que he dicho es suficiente para justificar estas normas de comportamiento de un filósofo de la ciencia antes de 1905, la aparición de la teoría de la relatividad y de la mecánica cuántica ha hecho cambiar todo. La característica de la nueva física, se nos dice con frecuencia, es que apoya su estructura únicamente sobre observables, y que, por haber desechado conceptos caros al sentido común —simultaneidad absoluta, substancia material, leyes deterministas—, ha sido capaz de construir teorías fundamentales que logran una síntesis de la experiencia mejor que lo hacían las teorías de la física clásica. Herbert Dingle [2] llega a mantener que este rango tan pregonado de la nueva física ha sido, en realidad, algo característico de toda la física desde Galileo, aunque sólo ha logrado que se lo reconozca de modo explícito recientemente. Se pretende que la física posteinsteiniana (o, para Digle, postgalileana) no se basa en modo alguno sobre conocimientos del sentido común: que sus datos son acontecimientos tales como lecturas de agujas indi-

---

[2] *Through Science to Philosophy* (Oxford, 1937), caps. IV y V.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

cadoras, no substancias materiales permanentes, y que la construcción científica de electrones, protones, etc., a partir de tales acontecimientos directamente observables no pasa en absoluto a través de objetos materiales. La construcción lógica de objetos científicos tales como los electrones a partir de lo que se experimenta directamente rodearía la construcción lógica de los objetos materiales ordinarios a partir de la misma experiencia: ambas serían paralelas, cada una dirigida a una finalidad distinta; la física no continuaría el trabajo de síntesis más allá del estadio en que se detiene el sentido común, sino que, por el contrario, sintetizaría a lo largo de otra vía y sacando partido de rasgos de la experiencia que el sentido común olvidaría —y con razón, teniendo en cuenta su finalidad propia.

Ahora bien, en caso de que esta pretensión fuese exacta haría imposible, desde luego, tratar las observaciones que forman la base de las leyes científicas como observaciones —en el sentido en que el sentido común entiende esta palabra— de objetos materiales y de sus propiedades: sería preciso llegar hasta el fondo y desarrollar una teoría fenomenista de la ciencia basada solamente sobre los objetos de experiencia directa. Pero no veo la razón de aceptar tales pretensiones, ni siquiera en lo que respecta a la física contemporánea. Cuando los físicos cuánticos dicen que «la ciencia se ocupa solamente de cosas observables» el contexto permite ver claramente que no están hablando de datos sensoriales, sino de observaciones en el sentido usual de los laboratorios: están contraponiendo las observaciones de laboratorio a elementos no observables tales como las funciones de onda que emplean en sus teorías, y lo único que mantienen es que esta ciencia es un estudio empírico. Las «observaciones» a que se refieren no necesitan serlo en el sentido habitual de la palabra, que presupone una base de experiencia inmediata: pueden ser trazos en una película fotográfica o perforaciones hechas en una cinta por un contador de electrones; por lo que a la ciencia respecta, toda la «observación» puede llevarse a cabo por máquinas, cuyos datos se examinarán e interpretarán posteriormente. Y el no haberse dado cuenta de este punto ha hecho que muchos filósofos —y algunos científicos— crean que los progresos modernos de la física la han convertido en algo más subjetivo y más dependiente de las peculiaridades del observador humano de lo que solía ser. Pero el observador cuyo movimiento es pertinente para los hechos de la simultaneidad (de acuerdo con la teoría de la relatividad) no es una inteligencia desencarnada percibiendo datos sensoriales —las inteligencias no pueden moverse—, sino un cuerpo humano o un aparato registrador, una cámara, por ejemplo; y las

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

observaciones que perturban las posiciones o las velocidades de los objetos que intenta observar —según la mecánica cuántica— no son actos mentales, sino procesos en lentes o en espectroscopios. No hay nada subjetivo en el principio de incertidumbre de Heisenberg: la imposibilidad de medir con precisión dos cantidades físicas relacionadas no es una imposibilidad mental, sino una consecuencia de las leyes estadísticas fundamentales de la mecánica cuántica, según las cuales existe una relación inversa entre las precisiones respectivas con que aquellas cantidades pueden medirse por un aparato cualquiera que obedezca a tales leyes [3].

Por consiguiente, parece que la norma —que adoptaremos en este libro— de pasar por alto los problemas de la filosofía de la percepción está libre de objeciones serias. Y una consecuencia de ella es que no pretenderemos tratar en él todo problema filosófico que surja al considerar la naturaleza de la ciencia: sería ridículo esperar tal cosa; el libro se ocupará solamente del conjunto de problemas que se plantean al considerar la naturaleza de las teorías y leyes científicas y su verificación —temas que, sin duda, son más que sobrados para un libro.

Emplearemos los términos de «experiencia», «observación» [4] y otros cercanos a ellos en su sentido más amplio, de suerte que comprendan los hechos observados acerca de objetos materiales o sucesos que acontezcan en ellos, así como los hechos conocidos de modo inmediato sobre los contenidos u objetos de la experiencia directa. Podría decirse que es algo innecesario incluir esta segunda clase de hechos, ya que todos los datos empíricos de la ciencia son hechos referentes a objetos materiales o a acontecimientos que ocurran en ellos, pero así se excluiría la psicología de la categoría de ciencia, a menos que se limitasen sus datos —como desearían acaso los conductistas— a hechos observables, públicos, acerca del comportamiento de cuerpos humanos. Y como no quiero limitar la psicología desde el comienzo de esta manera, como tampoco imponer límites a la sociología y a la economía en caso de que quieran utilizar como datos hechos de experiencia directa, incluiremos estos últimos entre los hechos observables que pue-

[3] Se suele alegar que la mecánica cuántica es subjetiva de otra forma: en cuanto que predice probabilidades en vez de certidumbres. Mas, como veremos en el capítulo sexto, las probabilidades de que se ocupa han de explicarse a base de frecuencias estadísticas, y una frecuencia estadística del 50 por 100 no es más subjetiva que una del 100 por 100.

[4] Usaremos en ocasiones «observación» entendiendo que incluye hechos acerca de aparatos registradores (películas fotográficas, contadores de Geiger, etc.), que se interpretan como correspondientes a hechos observables.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

den tomarse como base empírica de una ciencia. Al emplear «experiencia» y «observación» de esta manera sigo el uso ordinario: pues hablo de que observo que tengo un dolor de muelas del mismo modo que de que observo que tengo la pluma en la mano, y tengo experiencia tanto del dolor de muelas como de la pluma, si bien esta última experiencia no será inmediata en caso de que el fenomenismo —o una teoría de la representatividad— sea la filosofía de la percepción exacta.

Por tanto, no utilizaremos el carácter público de sus datos como si fuese el rasgo distintivo de toda ciencia (frente a lo que querrían muchos autores). Las ciencias físicas y las biológicas normales emplean únicamente datos públicos, susceptibles de ser observados por cualquiera, pero las ciencias psicológicas y sociales pueden hacer uso también de datos privados, procedentes de la experiencia inmediata: éstos son en algunos casos deductibles de hipótesis generales de igual manera que lo son los datos públicos: la característica esencial de toda ciencia es, pues, este método hipotético-deductivo que se aplica a un material empírico; y si la psicología o la economía son capaces de elaborar hipótesis empíricamente contrastables, *ipso facto* son ciencias, ya sean o no privadas e incomunicables las consecuencias de tales hipótesis [5].

Las leyes científicas

Podemos ya volvernos hacia las leyes generales que toda ciencia se ocupa de asentar, sobre la base de la experiencia, en cumplimiento de su función. ¿Qué es una ley científica?

Todo el mundo está de acuerdo en una cosa: en que siempre incluye una generalización, esto es, una proposición que asevere una conexión universal entre propiedades; efectivamente, contiene siempre una proposición que enuncie que todo acontecimiento o cosa de tal o cual tipo, o bien tiene cierta propiedad, o se encuentra en determinada relación con otros acontecimientos —o cosas— que posean ciertas propiedades. Esta generalización puede aseverar la concomitancia de propiedades en la misma cosa o el mismo suceso, es decir, que todo lo que tenga la propiedad *A* tendrá asimismo la propiedad *B* —por ejemplo, que todo trozo de azúcar es soluble en agua—; puede

[5] Naturalmente, no es que sea esto lo único que haya que decir en cuanto a los problemas que han inquietado a los filósofos bajo los títulos de «solipsismo» o de «otras inteligencias», pero es lo bastante para mis propósitos en este libro.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

también aseverar que de cada dos acontecimientos o cosas de los cuales el primero posea la propiedad A y se encuentre en la relación R con el segundo, este último tendrá la propiedad B —por ejemplo, que en todos los casos en que haya una pareja de bolas de billar que se puedan mover libremente, si la primera se mueve y golpea a la segunda ésta también se moverá—; o bien puede tratarse de aserciones más complicadas, pero parecidas a las anteriores, referentes a tres, cuatro o más cosas. En cuanto a las relaciones entre estas cosas, pueden existir entre acontecimientos simultáneos en éstas, o entre sucesos correspondientes a una y la misma cosa o a dos o más cosas sin simultaneidad (tocaremos las cuestiones que surgen de las relaciones temporales en el capítulo noveno). Podemos reunir todos estos tipos de generalización con las generalizaciones de concomitancia —según las cuales todo lo que sea A será B— con tal de que concedamos que A y B puedan ser propiedades suficientemente complicadas; con lo cual, si dirigimos la atención exclusivamente a las concomitancias, nuestras observaciones se aplicarán también a generalizaciones de un tipo más complicado.

Si bien existe un acuerdo general acerca de que toda ley científica incluye una generalización, no hay acuerdo en cuanto a si incluye o no alguna otra cosa. El lenguaje apodíctico en que frecuentemente expresamos las leyes científicas (por ejemplo, «las mezclas de hidrógeno y oxígeno *tienen que* estallar si se produce una chispa eléctrica en su seno») tiende a hacernos creer que aseveran algo que excede a la mera conjunción constante que aseveraríamos en la generalización correspondiente; y los filósofos han propugnado tesis según las cuales ese algo suplementario sería una relación lógica análoga a la existente entre las premisas y la conclusión en una inferencia deductiva, o una relación de actividad semejante a la que hallamos en la volición, o una relación enteramente especial no parecida a ninguna otra. Pero a lo largo de los doscientos años transcurridos desde que Hume predicó la doctrina de que no hay nada suplementario (salvo un hecho psicológico concerniente a la asociación de ideas o de creencias en la mente de la persona que cree en la ley), la principal razón por la que muchos filósofos han llegado a otros puntos de vista ha sido que les parecía que la teoría de la conjunción constante al modo de Hume no era apropiada. Así pues, parece no haber ninguna necesidad de tomar en consideración opiniones que conviertan las leyes científicas en algo más que enunciados de una conjunción constante con tal de que sustentemos una tesis de ésta que sea apropiada.

En este libro nos dedicaremos a exponer semejante tesis. Admiti-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

remos que las leyes científicas no aseveran más (ni menos) que las generalizaciones *de facto* que estén incluidas en ellas; así, interpretaremos la ley de que todo átomo de hidrógeno consiste en un protón más un electrón en el sentido de que, de hecho, todo átomo de hidrógeno pasado, presente o futuro está constituido de este modo. Pero veremos que la manera en que utilizamos tales generalizaciones es más complicada que aquélla en que se presentaban a Hume, en el siglo XVIII. Para éste la cuestión era de cómo dar razón de la inducción por enumeración simple: esto es, de cómo podamos pasar del conocimiento de casos o ejemplos a una creencia racional en la generalización bajo la que caigan todos estos casos; y para ello sacó partido de la propensión de la inteligencia a asociar entre sí ideas correspondientes a cosas que hubieran estado asociadas entre sí en la experiencia. Pero una teoría adecuada de la ciencia de hoy tiene que explicar cómo llegamos a utilizar generalizaciones muy alambicadas (tales como la referente a la constitución protónico-electrónica del átomo de hidrógeno), que sin duda alguna no hemos sacado de una simple enumeración de casos: con objeto de llegar a tal explicación no hemos de considerar la generalización que sea aisladamente, sino en referencia al lugar que ocupe dentro de un sistema científico; y no tenemos que mirar la inducción primariamente como por simple enumeración, sino como el método por medio del cual asentamos hipótesis en el interior de sistemas científicos. Al combinar la tesis de la conjunción constante —de que las leyes científicas son únicamente generalizaciones— con una doctrina de la función de estas últimas en los sistemas científicos se coloca aquélla bajo una luz nueva: se responde a quienes se quejan de que dicha tesis subestima el puesto de la razón en la ciencia, y el subrayar la importancia de las relaciones lógicas existentes entre las generalizaciones situadas a niveles diferentes dentro del sistema permite satisfacer de algún modo a los que suspiran por leyes científicas lógicamente necesarias.

Lo que justifica que parta de suponer que las leyes científicas no son sino generalizaciones es que sólo puede hacerse ver que esta tesis es apropiada al desarrollar una teoría de la ciencia que la contenga. Desde el tiempo de Mach la mayoría de los autores acerca de la filosofía de la ciencia han sostenido la tesis de la conjunción constante para las leyes científicas, y lo que ha impedido que otros filósofos la aceptasen es que en la forma en que se la formula habitualmente está sujeta a críticas demoledoras; yo pretendo escapar a éstas incorporándolas dentro de una perspectiva más amplia de la función de las generalizaciones en la ciencia.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Otra razón para comenzar partiendo del punto de vista de la conjunción constante es que dentro de ella las leyes científicas son proposiciones lógicamente menos fuertes o exigentes de lo que serían desde cualquier otro punto de vista posible acerca de su naturaleza: cualquier otra tesis de la ley científica, si bien incluye en ésta una generalización, afirma que hay algo más que simplemente ésta; de modo que el supuesto de que toda ley científica no enuncie nada que exceda a una generalización es el más modesto que cabe hacer. Y esta modestia adquiere gran importancia cuando consideramos el problema de la inducción: ya es suficientemente difícil justificar nuestra creencia en las leyes científicas cuando se las mira meramente como generalizaciones, y esta tarea se hace aún más dificultosa si hemos de justificar una creencia en proposiciones que sean algo más que aquéllas. A mi entender, muchos de los que critican la tesis de la conjunción constante diciendo que no proporciona una base sólida para la inducción no se han percatado suficientemente de este hecho.

Así pues, para los propósitos de esta exposición admitiremos que las hipótesis científicas —que en caso de ser verdaderas serán leyes científicas— son equivalentes a generalizaciones —sin limitación en el espacio y el tiempo— de mayor o menor grado de complejidad y generalidad; y sólo incidentalmente tocaremos otras tesis acerca de la naturaleza de las leyes científicas.

Estructura de todo sistema científico

Un sistema científico consiste en un conjunto de hipótesis que formen un sistema deductivo, es decir, dispuesto de tal modo que tomando algunas de ellas como premisas se sigan lógicamente todas las demás como conclusiones. Podemos considerar que las proposiciones de todo sistema deductivo están colocadas en una serie de niveles, de suerte que las del nivel supremo aparecerían exclusivamente como premisas del sistema, las del nivel ínfimo sólo como conclusiones del mismo y las de los niveles intermedios serían las que puedan aparecer como conclusiones de deducciones procedentes de hipótesis de nivel más elevado y servir como premisas para deducciones que conduzcan a hipótesis de nivel inferior.

Como ejemplo consideremos un sistema deductivo bien sencillo, con las hipótesis distribuidas en tres niveles. (He elegido este ejemplo, sobre todo, porque sirve perfectamente para hacer visibles los puntos que es preciso hacer notar, y también, en parte, porque al construir

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

y asentar Galileo un sistema análogo quedó marcado un cambio de ruta decisivo en la historia de la ciencia.)

Este sistema tiene una hipótesis de nivel supremo:

I. Todo cuerpo en las proximidades de la Tierra y en caída libre hacia ésta cae con una aceleración de 9,8 metros por segundo cada segundo.

De esta hipótesis se sigue, aplicando principios muy sencillos del cálculo integral [6], la hipótesis:

II. Todo cuerpo que partiendo del reposo cae libremente hacia la Tierra recorre $4{,}9t^2$ metros en t segundos, cualquiera que sea t.

A partir de II se sigue, de acuerdo con el principio lógico —*el principio aplicativo*— que permite la aplicación de una generalización a sus casos particulares o ejemplos, el conjunto infinito de hipótesis siguiente:

III *a*. Todo cuerpo que partiendo del reposo cae libremente hacia la Tierra durante un segundo recorre una distancia de 4,9 metros.

III *b*. Todo cuerpo que partiendo del reposo cae libremente hacia la Tierra durante dos segundos recorre una distancia de 19,6 metros.

Etcétera.

En este sistema deductivo las hipótesis de los niveles segundo y tercero (II, III *a*, III *b*, etc.) se siguen de la hipótesis única del nivel supremo (I), y las del tercer nivel (III *a*, III *b*, etc.) se siguen asimismo de la hipótesis única del segundo nivel (II).

También ocurre aquí que las hipótesis son proposiciones generales empíricas de generalidad decreciente. En cuanto a la contrastación empírica de este sistema, se lleva a cabo sometiendo a contraste las hipótesis del sistema correspondientes al nivel ínfimo: su confirmación o su refutación es el criterio mediante el cual contrastamos la posible verdad de todas las hipótesis que contiene el sistema; así pues, el que asentemos o no un sistema como un conjunto de proposiciones verdaderas depende de que asentemos o no de esta forma sus hipótesis de nivel ínfimo.

La hipótesis de esta última índole III *a* se somete a contraste aplicándola a un caso particular: se permite caer un cuerpo libremente durante un segundo y se mide la distancia que recorre [7]; si se halla

---

[6] La hipótesis I puede expresarse por la ecuación diferencial $d^2s/dt^2 = 9{,}8$, cuya solución, con las condiciones iniciales (para $t = 0$) $s = 0$ y $ds/dt = 0$, es $s = 4{,}9t^2$.

[7] De hecho, el sistema que Galileo sometió a contraste era más complicado que el de nuestro ejemplo, pues él no era capaz de medir tiempos de caída de cuerpos con la precisión suficiente para contrastar III *a*: lo que contrastó empíricamente fue

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

un recorrido de 4,9 metros la hipótesis queda confirmada, pero si se encuentra que recorre una distancia mayor o menor que ésta, queda refutada.

Es conveniente considerar la lógica de este modo de proceder en dos pasos. Primero se observa —o se produce experimentalmente— un caso de caída libre de un cuerpo durante un segundo; entonces tenemos conocimiento empírico de la proposición siguiente:

e_1. Este cuerpo cae libremente hacia la Tierra, partiendo del reposo, durante un segundo.

Ahora se aplica la hipótesis general III *a* a este caso, deduciendo para ello primeramente de III *a* la proposición

III *a'*. Este cuerpo, partiendo del reposo, cae libremente hacia la Tierra durante un segundo sólo en caso de que recorra una distancia de 4,9 metros.

A partir de esta aplicación de la hipótesis general y, conjuntamente, de la proposición e_1 se deduce:

f_1. Este cuerpo recorre 4,9 metros.

Por consiguiente, la contrastación de una hipótesis científica consiste en deducir de ella una proposición de la forma «e_1 sólo si f_1», de la cual, conjuntamente con e_1, se sigue f_1, cuya verdad o falsedad se somete a la observación.

Se dice ordinariamente que la hipótesis III *a* ha quedado confirmada en caso de que se observe que f_1, consecuencia lógica de e_1 y III *a'*, es verdadera; y se dice que el testimonio f_1, conjuntamente con e_1 (conyunción que puede llamarse un *ejemplo* de la hipótesis), apoya ésta. Pero es evidente que dicho testimonio por sí solo no es suficiente para probar la hipótesis: sólo ocurriría así si ésta fuese una consecuencia lógica de la conyunción de f_1 y e_1 —cosa que no sucede, desde luego—. Es perfectamente posible que la hipótesis se cumpla en este ejemplo o caso, pero sea falsa en algún otro, y que, por consiguiente, sea falsa como proposición general; y, en realidad, esto es lo que ocurre por muchas veces que la hipótesis se confirme: independientemente del número de conyunciones de f_1 con e_1, f_2 con e_2, etc., que se hayan examinado y que hayan confirmado la hipótesis, habrá siempre casos no examinados, en los que la hipótesis podría ser falsa sin contradecir ninguno de los casos observados [8]. Por tanto, los datos

---

un sistema más alambicado, en el que las hipótesis de nivel ínfimo eran proposiciones acerca del descenso de cuerpos, rodando, por acanaladuras practicadas en planos inclinados.

[8] A menos, naturalmente, que la hipótesis considerada tenga sólo un número limitado de ejemplos o casos y no solamente se hayan examinado todos ellos, sino que

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

empíricos proporcionados por sus ejemplos no prueban nunca la hipótesis: podemos decir en ciertos casos que *asientan* ésta, indicando con ello que hacen razonable que la aceptemos, pero nunca la *prueban* en el sentido de que la hipótesis fuese una consecuencia lógica de tales datos.

La situación es distinta en caso de que se observe que f_1 es falsa, pues la conyunción de no-f_1 con e_1 es lógicamente incompatible con que la hipótesis sea verdadera: la falsedad de ésta es consecuencia lógica de la conyunción citada. Si llamamos a esta conyunción un *contraejemplo* de la hipótesis, podemos decir que cualquier contraejemplo prueba que la hipótesis correspondiente es falsa, esto es, la refuta.

Esta asimetría entre confirmación y refutación es consecuencia del hecho de que todas las hipótesis de una ciencia cualquiera son proposiciones de la forma «todo *A* es *B*». En cambio, las proposiciones de la forma «algunos *A* son *B*» (proposiciones existenciales [9]) —que son las contradictorias de las proposiciones generales— poseen la simetría inversa: basta un ejemplo para probarlas, mientras que no hay número de contraejemplos que sea suficiente para demostrar su falsedad.

Se ha dicho que no hay tragedia mayor que el asesinato de una hermosa hipótesis científica por un ejemplo discordante. Como veremos más adelante, normalmente es posible salvar de esta fatalidad cualquier hipótesis de nivel elevado sin más que preferir el sacrificio, en lugar suyo, de otra —también de alto nivel— que sea necesaria para la deducción; pero el hecho de que, en principio, toda hipótesis científica (o conyunción de ellas, en caso de que se precise más de una para la deducción de los hechos observables) pueda contraprobarse de modo concluyente mediante la observación, en tanto que jamás es posible probarla con análoga seguridad, distingue tajantemente la cuestión de refutar una teoría científica de la de asentarla: la primera es asunto simplemente de la lógica deductiva, en caso de que se tome el sistema de hipótesis como un todo [10], mientras que la

---

se sepa que no quedan casos por examinar. Las generalizaciones de este tipo, que pueden probarse a partir de un conocimiento de dichos casos mediante lo que los lógicos han llamado una *inducción completa*, no presentan ningún problema lógico, y, dado su escaso interés para la ciencia, no nos detendremos más en ellas: admitiremos, pues, que todas las hipótesis científicas son generalizaciones con un número ilimitado de ejemplos.

[9] En la terminología de la lógica tradicional se llamarían «proposiciones particulares» a mis proposiciones existenciales, y «proposiciones universales» a mis proposiciones generales; y ambos tipos quedarían abarcados con el término de «proposiciones generales».

[10] Tan simplemente que KARL POPPER adopta la posibilidad de falsación por la

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

segunda involucra la justificación de la inferencia inductiva, problema que ha preocupado a los filósofos desde los tiempos de Hume y al que dedicaremos el capítulo octavo de este libro.

En lo que respecta a la confirmación, la relación entre las hipótesis de nivel ínfimo y cualquier hipótesis del nivel inmediatamente superior es parecida a la existente entre casos o ejemplos de una hipótesis de aquel nivel y esta misma. En el ejemplo que habíamos puesto, las hipótesis del tercer nivel —III *a*, III *b*, etc.— son casos especiales de la de segundo nivel, II: puede verse que cada una de ellas se sigue de II de acuerdo con el principio aplicativo, mientras que ésta no es consecuencia lógica de ningún número finito de hipótesis del tipo de las III *a*, III *b*, etc. —la fórmula $s = 4{,}9t^2$ puede cumplirse para cualquier número finito de valores de s y t sin ser verdadera en general—. Ello se advierte con la máxima claridad si se representan las hipótesis del nivel ínfimo como puntos de una gráfica (fi-

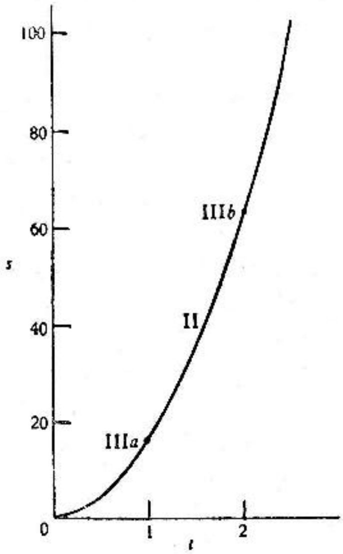


Fig. 1.

gura 1), en la que la hipótesis de segundo nivel esté representada por una curva que pase por todos ellos: además de la parábola $s = 4{,}9t^2$

experiencia como criterio para decidir si un sistema de hipótesis es o no un sistema científico empírico *(Logik der Forschung* [Viena, 1935], § 6). [Versión castellana de la refundición en lengua inglesa, de 1959: *La lógica de la investigación científica*, Madrid, Tecnos, 1962, págs. 39 y sigs.—*N. del T.*]

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

pueden trazarse sin límite curvas que pasen por un número finito cualquiera de puntos; así pues, la refutación de III *a* sirve para refutar II, pero no hay modo de probar aquella hipótesis que pruebe ésta. No obstante lo cual, los datos o testimonios en favor de III *a* lo son también en favor de II, y si son suficientes para que consideremos bien asentadas III *a*, III *b*, etc., pueden serlo también para que miremos II de análoga manera.

Entre II y I media una relación semejante a la que hay entre III *a* y II. Existe, sin embargo, la siguiente diferencia: mientras que el método de deducir III *a* a partir de II consiste meramente en el principio lógico que entraña el que toda proposición general implique cualquier caso especial de ella (principio aplicativo) —lo cual está implícito en el uso de las proposiciones generales—, la deducción de II partiendo de I se lleva a cabo utilizando métodos del cálculo integral, ya sea de forma explícita gracias a teoremas conocidos de este cálculo, ya implícita mediante la construcción de una demostración geométrica especial, como tuvo que hacer Galileo, por ignorar aquél. Pero esta diferencia carece de importancia para la índole general del procedimiento: II es tan consecuencia lógica de I como III *a* lo es de II, aun cuando la primera relación requiere unos conocimientos que es preciso haber adquirido específicamente, mientras que adquirimos el conocimiento de la segunda cuando nos enseñaron a usar la palabra «todo»[11].

Los sistemas deductivos tienen la característica general de que la fuerza lógica de las hipótesis aumenta cuanto más elevado sea su nivel. A veces ocurre que, no obstante ser más débil cada una de las hipótesis de cierto nivel que la del nivel inmediatamente superior de la que todas ellas son deductibles, la conyunción de éstas es equivalente a aquélla: así ocurrirá cuando exista un número limitado de casos específicos de la hipótesis de nivel superior, casos que estén aseverados cada uno de ellos por una de las hipótesis de nivel inmediatamente inferior. (Repárese en que esta situación no se dará nunca en la relación entre una hipótesis de nivel ínfimo y sus ejemplos, ya que ninguna hipótesis es una generalización puramente enumerativa de un conjunto finito de ejemplos.)

Existen otros puntos importantes acerca de los sistemas científicos deductivos que nuestro ejemplo permite ver intuitivamente. Puesto que los ejemplos observados de III *a* son un testimonio en favor

---

[11] Véase más adelante, en las páginas 99 y sigs.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

de II tanto como de III *a*, son un testimonio *indirecto*[12] en favor de todas las consecuencias lógicas de II, por ejemplo, de III *b*; así pues, una hipótesis de un sistema deductivo que no sea del nivel supremo no solamente está apoyada por la observación de sus ejemplos, o de ejemplos de hipótesis situadas en un nivel inferior del sistema, sino también por observaciones de ejemplos de otras hipótesis de éste. Por consiguiente, los testimonios que militan en favor de una hipótesis científica son frecuentemente mucho más fuertes que los testimonios *directos* formados por casos o ejemplos en su favor —o por ejemplos de una hipótesis que se siga lógicamente de ella—: así, mis razones para creer que todos los hombres son mortales no se limitan a saber que gran número de hombres ha muerto, sino que incluyen asimismo el conocimiento de que ha muerto gran número de animales —lo cual apoya la generalización más amplia de que todos los animales son mortales—. Una de las razones principales que existen para organizar las hipótesis científicas en un sistema deductivo es la de que los testimonios directos en favor de cada hipótesis de nivel ínfimo puedan convertirse en indirectos en favor de todas las demás del mismo nivel: si bien no hay cantidad de testimonios empíricos que baste para probar hipótesis alguna del sistema, cualquier dato empírico en favor de una parte cualquiera de éste coadyuva a asentarlo en su conjunto.

Pero hay un punto de importancia concerniente a la mayoría de los sistemas deductivos que nuestro ejemplo, tan sencillo, no hace visible. En éste sólo se utiliza una hipótesis de nivel superior como premisa para deducir las de nivel inferior: II se sigue lógicamente de I sola y III *a*, III *b*, etc., se siguen de II sola. Sin embargo, en casi todos los sistemas deductivos científicos cada deducción requiere más de una premisa: por ejemplo, Newton incorporó el sistema deductivo de Galileo en otro más amplio, en el que su hipótesis de nivel supremo dejó de serlo, transformándose en una hipótesis deductible de la conyunción de dos hipótesis de nivel superior, una la llamada (en plural) leyes del movimiento newtoniano y otra su ley de gravitación universal[13]. Como consecuencia, la mayor parte de los sistemas de-

[12] Se dice que unos hechos observados constituyen un *testimonio indirecto* en favor de una hipótesis p si existe un testimonio directo en favor de una hipótesis q (o de un conjunto de hipótesis, q_1, q_2, etc.) de la que se siga lógicamente p. Corolario de esta definición es que si los hechos observados constituyen un testimonio directo de un conjunto de hipótesis q_1, q_2, ..., q_n, forman uno indirecto de una cualquiera de éstas, ya que cada una de ellas se sigue lógicamente del conjunto.

[13] No enuncio explícitamente estas hipótesis porque utilizan los términos *fuerza* y *masa*, que corresponden a conceptos teoréticos del tipo que vamos a discutir en el capítulo tercero.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

ductivos utilizados por la ciencia no pertenecen al tipo simple de ramificación ejemplificado por el de Galileo, sino que en ellos existe cierto número de hipótesis de alto nivel que son todas ellas necesarias como premisas para unas deducciones u otras del sistema. Naturalmente, si fuésemos a ampliar lo que queremos decir cuando hablamos de hipótesis científica de modo que incluyésemos las conyunciones de generalizaciones, podríamos amontonar todas las premisas en una sola hipótesis conyuntiva, y tendríamos en todo sistema una sola hipótesis de nivel supremo, con lo que cualquier sistema científico podría ser tratado como de ramificación. Pero la combinación de hipótesis muy dispares en una sola, conyuntiva, tendría como efecto la confusión de nuestros pensamientos, y contaría, además, con la desventaja de que tendríamos que admitir como hipótesis científicas proposiciones que no fuesen generalizaciones.

Dado que las consecuencias de un conjunto cualquiera de hipótesis son asimismo consecuencias de cualquier conjunto de hipótesis que incluya aquél, siempre es posible aumentar el número de hipótesis de nivel supremo adjuntando otra cualquiera a las ya existentes. Pero de esta manera haríamos que los hechos observados fuesen un testimonio en favor de un conjunto de hipótesis de la que formaría parte una que no habría desempeñado ningún papel en la deducción de aquellas consecuencias a partir de dicho conjunto, y de este modo los convertiríamos en un testimonio indirecto en favor de tal hipótesis supernumeraria y de sus consecuencias; mas, puesto que esta última hipótesis puede consistir en cualquier generalización, llegaríamos al resultado, nada deseable, de que cualquier hecho observable sería un testimonio indirecto en favor de toda generalización, con independencia de su contenido [14]. Con objeto de evitar tal cosa estipularemos que cada una de las hipótesis de nivel supremo de un sistema tiene que ser necesaria para la deducción de las de nivel inferior del mismo —no puede incluirse ninguna que no desempeñe cierto papel—. Parecidamente, hemos de considerar que son distintos, y no englobar en uno solo, dos

[14] C. G. Hempel *(Mind,* n. s., vol. 54 (1945), pág. 104) plantea un argumento análogo a éste como objeción a que se defina la «confirmación» de una hipótesis a base de lo que se pueda deducir de ella en conyunción con proposiciones observables [esto es, sobre hechos observables *(N. del T.)*]. No pretendo dar una definición general de «confirmación», pero creo que si se restringen las hipótesis mismas de suerte que sean proposiciones generales y se excluyen de los sistemas científicos las hipótesis supernumerarias se evitan las dificultades que señala Hempel. Rudolf Carnap ha estudiado a fondo esta cuestión en *Logical Foundations of Probability* (Chicago, 1950), §§ 87 y sig.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

sistemas cuyos conjuntos respectivos de hipótesis de nivel supremo no tengan ninguna en común.

El hecho de que la mayoría de los sistemas deductivos científicos emplee más de una hipótesis de máximo nivel repercute notablemente en la contrastación empírica de éstas. Como hemos puesto de manifiesto, un ejemplo en contra es suficiente para refutar una generalización (hipótesis de nivel ínfimo), lo cual, a su vez, basta para refutar una hipótesis de nivel superior de la que aquélla se deduzca. Pero supongamos que, como ocurre frecuentemente, nos estamos ocupando de un sistema deductivo en el que no se tenga únicamente una hipótesis de nivel supremo —de la que se seguirían todas las de nivel inferior—, sino, en vez de ello, que todo él se siga de dos o más hipótesis de esta categoría; entonces, lo que la refutación de las hipótesis de nivel ínfimo refutaría sería la conyunción de estas varias de nivel máximo; o sea, la consecuencia lógica de la falsedad de las hipótesis de nivel ínfimo sería que al menos una de las de nivel supremo es falsa.

Así pues, para la casi totalidad de las hipótesis científicas —exceptuamos las generalizaciones directas de hechos observables que constituyen las hipótesis de nivel ínfimo de los sistemas deductivos— no es posible una refutación completa, como tampoco lo es la prueba completa: la experiencia nos puede decir que en alguna parte del sistema hay algo equivocado, pero nos cabe la elección en cuanto a lo que hayamos de considerar defectuoso. Por tanto, en casi todos los sistemas es posible mantener cualquier hipótesis frente a datos o testimonios aparentemente contrarios, a costa de modificar las demás; así, Ptolomeo fue capaz de salvar la hipótesis geocéntrica suponiendo que los planetas se movían alrededor de la Tierra en órbitas muy complicadas. Pero llega un momento en que las modificaciones que exige el sistema para salvar una hipótesis son menos plausibles que el rechazo de ésta, y entonces queda abandonada.

El sistema deductivo científico que la física ha ido edificando gradualmente con incorporación de los sistemas originales, de Galileo y sus contemporáneos, se ha desarrollado gracias a dejar de lado hipótesis siempre que el sistema llevaba a la predicción de resultados observables que no se observaban en la realidad. Pero quedaba al «olfato» del físico el decidir cuál hipótesis exactamente había de abandonarse en cada coyuntura; y, hablando en general, sólo se rechazaba una hipótesis cuando se tenía ya otra dispuesta a ocupar su puesto: mucho antes de que Einstein propusiera su teoría de la gravitación se sabía que la de Newton sola no podía dar cuenta del movimiento

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

que se observaba en el perihelio de Mercurio, pero no se destronó la teoría newtoniana hasta que la de Einstein no estuvo a mano para colocarse en su lugar. De modo que el proceso de refutación de una hipótesis científica es más complejo de lo que a primera vista parece.

No existe línea divisoria tajante y fija que señale el punto en que las síntesis de la experiencia propias del sentido común se convierten en una ordenación científica dentro de un sistema de esta índole. Del mismo modo que si remontamos el pensamiento del sentido común, tanto en el individuo como en la raza humana, no hay un punto a partir del cual no se creyese en generalizaciones algunas, rara vez existe en la historia de la ciencia una fecha histórica en la que se pueda decir que se dio a luz la primera hipótesis. Esta historia es la del desarrollo de los sistemas científicos, desde unos que contenían tan pocas generalizaciones —y tan livianamente asentadas— que uno puede muy bien vacilar en llamarlos en absoluto sistemas hasta unas imponentes estructuras constituidas por una enorme jerarquía de hipótesis; desarrollo que tiene lugar asentando algunas de las hipótesis iniciales, reemplazando otras por otras mejor asentadas y construyendo hipótesis de nivel superior bajo las que puedan subsumirse las de nivel inferior. Por otra parte, los problemas que tal desarrollo suscita son de tipos muy diversos, y entre ellos los hay históricos —tanto relativos a la causa de que un científico individual descubra una idea nueva como a la de que en general se acepten las ideas científicas—, en cuya solución entran la psicología individual del pensar y la sociología del pensamiento; pero estas cuestiones no son aquí asunto nuestro: de lo que nos estamos ocupando es de los problemas puramente lógicos referentes a la estructura interna de los sistemas científicos y a los papeles que en ellos representan las verdades formales de la lógica y de la matemática, así como de los problemas lógico-inductivos o epistemológicos que correspondan a los fundamentos del carácter razonable o no de aceptar sistemas científicos bien establecidos y asentados. Dedicaremos los tres capítulos que siguen al primero de estos conjuntos de problemas.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Los sistemas deductivos de la ciencia y sus representaciones

Una teoría científica es un sistema deductivo en el que se siguen lógicamente consecuencias observables de la consideración conjunta de hechos observables y el conjunto de hipótesis fundamentales del sistema; por tanto, todo estudio de la naturalea de una teoría científica es estudio de la del sistema deductivo que se utilice en ella. Dedicaremos el presente capítulo a la lógica interna de los sistemas deductivos científicos.

Todo sistema deductivo consiste en un conjunto de proposiciones (que llamaremos *proposiciones iniciales)* del cual se sigan, de conformidad con principios lógicos, todas las demás proposiciones (que llamaremos *proposiciones deducidas);* de éstas, unas se siguen de modo inmediato del conjunto de proposiciones iniciales, otras se siguen inmediatamente de otras que, a su vez, se siguen inmediatamente de las proposiciones iniciales, y así sucesivamente. De modo que toda proposición del sistema se sigue, ya inmediata, ya mediatamente, del conjunto de proposiciones iniciales, y toda proposición deducida de un sistema deductivo aparece al final de una cadena de pasos deductivos que comienza con el conjunto de proposiciones iniciales; la cadena que lleve a una proposición particular cualquiera puede ser larga o corta, pero tiene siempre una longitud finita, de suerte que dicha proposición se alcanza siempre tras un número limitado de pasos de deducción inmediata.

La manera natural de representar un sistema deductivo es la de escribir ordenadamente las expresiones simbólicas —ya sean cláusulas [*sentences*], fórmulas u otras— que representen aquellas proposiciones de tal modo que la relación espacial existente entre aquéllas cuando estén escritas en la página corresponda a la relación lógica entre las proposiciones del sistema; así, se transcribirán las proposiciones iniciales en la parte alta de la página, bajo ellas una propo-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

sición que sea consecuencia inmediata de las mismas, bajo ésta una proposición que sea consecuencia inmediata de las proposiciones iniciales solas, de la primera proposición deducida o de la conyunción de ésta y aquéllas, etc. Con lo cual toda cláusula que se encuentre en la página expresará una proposición que sea consecuencia inmediata de proposiciones expresadas por cláusulas que la precedan, y una serie de cláusulas de dicha página representará una cadena de pasos deductivos. Este método de representar un sistema deductivo es tan antiguo como Euclides, y daremos varios ejemplos de él en este capítulo, más adelante.

Este método natural de representar un sistema deductivo posee una característica que quedó completamente aclarada durante el siglo pasado: se ha visto que, mediante una elección apropiada del lenguaje simbólico en que se expresen las proposiciones, al hecho de que una proposición sea consecuencia inmediata de otras proposiciones puede hacérsele corresponder el hecho de que la cláusula que exprese aquélla puede sacarse de las cláusulas que expresen estas otras por medio de una manipulación sencilla efectuada con los símbolos de las cláusulas. Por ejemplo, en el sistema deductivo de la matemática elemental puede llegarse a la siguiente expresión de una proposición aritmética

$$``(9 - 2).(9 + 2) = 9^2 - 2^2"$$

a partir de esta expresión de una identidad algebraica

$$``(x - y).(x + y) = x^2 - y^2"$$

sin más que sustituir el símbolo «x» por el «9» y el símbolo «y» por el «2». Si se elige del modo conveniente el lenguaje en el que se vaya a expresar el sistema deductivo, dado un conjunto de cláusulas es posible escribir otra serie de ellas tal que cada una se obtenga en virtud de una manipulación simbólica de algunas de las que la preceden sin tener que pensar en su significado, pero de forma que esta última serie represente, no obstante tal circunstancia, una cadena deductiva del sistema.

Llamaremos *cálculo* a toda representación de un sistema deductivo realizada de suerte que a cada principio de deducción corresponda una regla de manipulación de símbolos. Empleando un cálculo para representar un sistema deductivo se tiene la enorme ventaja de que se consigue que las deducciones se efectúen por una mera manipulación de símbolos, y la de que puede comprobarse automáticamente si las deducciones son correctas mediante un puro examen de

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

las relaciones existentes entre los símbolos; y por esta razón el invento indio de los guarismos árabes ha constituido un hito tan importante en la historia de la civilización. Mas el empleo de un cálculo garantiza también que el pensamiento se haga enteramente explícito, ya que no puede utilizarse principio alguno de deducción que no esté representado en él por una regla de manipulación de símbolos. (Varios matemáticos del siglo XVIII llegaron a demostraciones matemáticas en las que posteriormente se han encontrado errores; pues tales pseudodemostraciones hacían uso de principios deductivos no válidos, cuyo carácter de tales se puso de manifiesto cuando los matemáticos del siglo XIX trataron de representarlas en un cálculo adecuado.)

Todo filósofo que reflexione acerca de la deducción caerá en la cuenta de que la correspondencia entre un sistema deductivo y el cálculo que lo represente no tiene nada de accidental. Ocurra lo que ocurra con otras formas menos precisas de pensar, el pensamiento deductivo no es independiente de las posibilidades de su expresión: el que la deducción silogística pueda expresarse del modo que lo hizo Aristóteles y el que la deducción a partir de identidades algebraicas lo pueda por sustitución de las variables no dejan de decirnos algo acerca de estos modos de deducción. En realidad, varios filósofos de la escuela lógico-positivista mantenían en mil novecientos treinta y tantos que cuando se conoce un cálculo que represente un sistema deductivo puro (esto es, que no contenga proposiciones contingentes) [1] se tiene un conocimiento completo de éste, por lo cual en la lógica formal y en la matemática no habría nada más que la relación entre unos símbolos y otros, y los principios de deducción no serían otra cosa que las reglas de manipulación de un cálculo simbólico. Esta tesis extremosa tiene hoy pocos defensores, pues se ha reconocido que no puede decirse todo acerca de la naturaleza del razonar matemático sin tener en cuenta su «semántica» además de su «sintaxis». Pero la semántica se ocupa de cada cálculo poniéndolo en relación con el sistema deductivo que exprese, y parece ser imposible que filosofemos de modo alguno acerca de la lógica formal o de la matemática sin considerar explícitamente las maneras de expresarse éstas. Actual-

[1] Al hablar de proposiciones *contingentes* nos referimos a aquéllas para cuya verdad o falsedad es pertinente la experiencia. Utilizo en esta caracterización el término de «contingente» (o «lógicamente contingente») en vez del de «empírica», porque se puede decir que ciertas proposiciones no contingentes (p. ej., si hay dos sillas en una habitación y tres en otra, en conjunto hay cinco sillas en las dos habitaciones) son «empíricas» en el sentido de que hablan *sobre* objetos empíricos —si bien en un sentido «vacío» de «sobre».

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

mente todos los trabajos de alguna utilidad sobre los fundamentos de la matemática involucran la construcción y discusión de unos cálculos apropiados [2].

Lo que aquí nos concierne no es la filosofía de las matemáticas, sino la de la ciencia en que entran proposiciones contingentes, y en este campo no se concede tan fácilmente que sea esencial considerar explícitamente el lenguaje en que se expresen las proposiciones científicas; pero dos excelentes razones me han inducido a imitar a los filósofos de la matemática y a enfocar el estudio de los sistemas deductivos científicos pasando por la ruta de los cálculos que sirven para representarlos: la primera consiste en que hemos de prestar atención al papel desempeñado por las matemáticas en tales sistemas, y que para hacerlo lo mejor es mirar detenidamente el cálculo que se utilice para su representación; en cuanto a la segunda razón, la desarrollaremos en el capítulo tercero, donde veremos que no es posible evaluar correctamente la función de las entidades teoréticas que intervengan en una teoría científica compleja —así los electrones o las funciones de onda— si no se examina explícitamente la forma en que las palabras que estén en lugar de ellas se usen en los tratados de la teoría correspondiente. Por consiguiente, empezaré por considerar la naturaleza de un cálculo haciendo abstracción de cómo esté relacionado con un sistema deductivo —pero sin olvidar, espero, que este modo de consideración es solamente un medio dirigido al fin de comprender la naturaleza de los sistemas deductivos empleados en la ciencia.

Si se lo aísla de toda interpretación, un cálculo es un juego de un solo jugador que se realiza con marcas sobre papel del modo siguiente. La dotación del juego consiste en una hoja de papel dividida por líneas horizontales y provista de ciertas marcas o sucesiones de ellas en las primeras líneas: se llama *fórmula* a cada una de las marcas o sucesiones de ellas que esté escrita en una línea, y designaremos

---

[2] *Nota bibliográfica.* Puede encontrarse una introducción a la moderna doctrina de los cálculos como juegos con símbolos y de los sistemas deductivos como interpretaciones de los cálculos en dos partes, publicadas por separado, de la *International Encyclopaedia of Unified Science: Foundations of Logic and Mathematics* [= vol. 1, número 3] (Chicago, 1939), de RUDOLF CARNAP, y *The Technique of Theory Construction* [= vol. 2, núm. 5] (Chicago, 1939), de J. H. WOODGER. En la obra de CARNAP *Introduction to Semantics* (Cambridge, Mass., 1942) se presenta una exposición más datallada.

La obra anterior de CARNAP, *Logical Syntax of Language* (Londres, 1937) (edición original en alemán, Viena, 1934), intentaba subsumir el conjunto de la filosofía bajo el estudio de los cálculos; pero en sus libros posteriores este autor está de acuerdo en que tal estudio ha de completarse con la «semántica» que se debe a Tarski y a otros lógicos polacos.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

con el nombre de *fórmulas iniciales* las que el jugador encuentre escritas en la hoja de papel antes de comenzar el juego; las reglas de éste son instrucciones al jugador en que se indica de qué modo puede escribir nuevas fórmulas en la hoja, de manera que cada una de éstas se sacará de alguna o algunas de las precedentes de acuerdo con las reglas del juego. Si llamamos *hacer una jugada* a escribir una nueva fórmula, jugar a este juego consistirá en hacer una serie de jugadas de acuerdo con las reglas del juego. Y éste, que se juega a partir de una dotación especificada (las fórmulas iniciales) y según reglas especificadas, es un cálculo.

Las reglas correspondientes a un cálculo pueden ser tales que al cabo de cierto número de jugadas no se pueda ejecutar ninguna más, con lo que terminará el juego: éste es el caso que se presenta con los juegos en sentido corriente, que se establecen siempre de modo que alguna regla —o combinación de ellas— garantice que el juego terminará tras un número finito de jugadas. Pero la mayoría de los cálculos de que hemos de ocuparnos no pertenecerán a este tipo de índole limitada, sino que en ellos será posible hacer otra jugada más en cualquier fase de su desarrollo: podremos dejar de jugar cuando hayamos llegado a la fórmula concreta que queríamos tener —y así lo haremos—, pero podríamos siempre continuar jugando y extraer más fórmulas.

Pueden especificarse de tal modo las reglas del juego que en cada fase sólo permitan hacer una jugada determinada; entonces, si el jugador quiere hacer una diferente desobedecerá a las reglas del juego. Como es natural, en cualquier momento puede dejar de jugar (e incluso empezar otro dotado de otro conjunto de reglas de juego), pero mientras continúe jugando no tiene libertad de elección. Los juegos —en sentido ordinario del término— de esta índole (por ejemplo, *Beggar-my-neighbour* *) son completamente aburridos, excepto para los niños pequeños; pero los cálculos-juegos correspondientes tienen la máxima importancia práctica, ya que pueden jugarse automáticamente, sin pensar, y por ello pueden enseñarse a los niños, que se los aprenden de memoria, y pueden construirse máquinas que jueguen a ellos: todas las máquinas calculadoras, desde el ábaco más sencillo hasta el «cerebro electrónico» más reciente, operan a base de cálculos no electivos; y su importancia se debe al hecho de que estos últimos

* Se trata de un juego de cartas en que cada jugador, siguiendo turno, ejecuta siempre la misma jugada: destapar carta de su montón (y según sea el valor de la que se saque ganará o perderá cartas): es parecido, pues, a nuestro «Jugar a la mayor».—*N. del T.*

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

rias ramas de la ciencia, y su estudio, juntamente con el de las relaciones que existen entre ellos y los cálculos que los representan, nos ayudará a enfrentarnos con el problema que nos ha de ocupar en el próximo capítulo, que es el de la condición que tienen los términos teóricos que se utilicen en una ciencia suficientemente desarrollada.

Los dos cálculos de que vamos a ocuparnos emplean marcas y sucesiones de marcas de un tipo especial, a las que llamaremos *elementos* y que definiremos del modo que sigue: definimos como *elemento primitivo* cualquier letra griega minúscula, y como *elemento no primitivo* cualquier sucesión de marcas a que se llegue adjuntado dos elementos cualesquiera —primitivos o no, iguales o distintos— y encerrándolos entre paréntesis. De este modo, α, β, γ, etc., serán elementos primitivos, mientras que $(\alpha\beta)$, $(\alpha\alpha)$, $((\alpha\beta)\gamma)$, $((\alpha\beta)\ ((\gamma\gamma)\ (\delta\alpha)))$, etc., serán elementos no primitivos; y cabe distinguir los elementos que aparezcan en el cálculo de otras marcas o series de marcas basándose en el hecho de que todo elemento, o bien es una sola letra griega, o es una serie de marcas en la que la primera y la última forman una pareja de paréntesis —es decir, una pareja consistente en un paréntesis izquierdo emparejado con un paréntesis derecho situado a su derecha— en la que los paréntesis que se encuentren entre aquella pareja (si es que hay alguno) forman parejas completas de paréntesis. Así pues, por mera inspección de los paréntesis podemos decir que en el último ejemplo dado de elemento no primitivo la parte $((\gamma\gamma)(\delta\alpha))$ es a su vez un elemento, en tanto que la $(\alpha\beta)((\gamma\gamma)$ no lo es.

Definimos las fórmulas de ambos cálculos como sucesiones de marcas consistentes en dos elementos con una flecha doble ($\leftrightarrow$) situada entre los dos; en cada fórmula habrá una y sólo una flecha doble, y el elemento que forme toda la expresión situada a la izquierda de ella recibirá el nombre de *elemento izquierdo* (que abreviaremos con I), mientras que el situado a su derecha será el *elemento derecho* (que también llamaremos D) de la fórmula.

Las reglas de juego del Primer cálculo son tales que autorizan cinco tipos de jugadas —y sólo cinco— para sacar una nueva fórmula de las que ya se hayan escrito (o sea, de las ya existentes).

I. El primer tipo de jugada que se permite consiste en escribir una nueva fórmula que reproduzca exactamente una de las ya existentes, con la sola diferencia de que se haya sustituido —en uno o en varios de los lugares en que aparezca— algún elemento que en ella apareciese (y que se encontrase además como elemento izquierdo o como elemento derecho de una fórmula ya existente) por el elemento derecho o por el izquierdo, respectivamente, de esta última. Así, si ya están

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

escritas $(\alpha\beta) \leftrightarrow ((\lambda\mu)\beta)$ y $\beta \leftrightarrow (\mu\nu)$, podremos escribir la nueva fórmula $(\alpha\beta) \leftrightarrow ((\lambda\mu)(\mu\nu)$, que se obtiene sustituyendo el elemento β —en el lugar en que aparece en el segundo miembro de la primera fórmula— por el elemento derecho de la segunda fórmula.

II. El segundo tipo de jugada reside en construir una nueva fórmula escribiendo como elemento izquierdo de la misma cualquier elemento que, o bien sea idéntico a algún elemento que constituya, ya el elemento izquierdo, ya el derecho, de una fórmula existente, o bien lo contenga; y como elemento derecho de ella su mismo elemento izquierdo una vez que se haya sustituido el elemento de la fórmula existente aludida, ya por su elemento derecho, ya por su izquierdo (respectivamente); además hay que añadir, naturalmente, entre ambos elementos así obtenidos, la flecha doble, para llegar a tener una fórmula completa. De este modo, si tenemos ya escrita $\alpha \leftrightarrow (\lambda\mu)$, podemos construir la nueva fórmula $(\alpha\beta) \leftrightarrow ((\lambda\mu)\beta)$, cuyo elemento derecho es el mismo que el izquierdo, con la sola diferencia de que α ha quedado sustituido por $(\lambda\mu)$.

Estas dos especies de jugada, pues, se apoyan en sustituir el elemento derecho o el izquierdo de una fórmula existente por su elemento izquierdo o derecho (respectivamente): la regla I efectúa tal sustitución en una fórmula completa ya existente, y la II construye una nueva fórmula cuyo elemento derecho sea idéntico al izquierdo salvo por la sustitución mencionada.

III. El tercer tipo autorizado de jugada es el siguiente: escribir una nueva fórmula sin más que sustituir un elemento cualquiera de alguna ya existente, en un solo lugar, por el elemento que se obtenga escribiendo aquél dos veces y encerrando esta pareja dentro de una pareja de paréntesis; o también, sin más que efectuar la sustitución inversa en un solo lugar de una fórmula ya existente en que se encuentre un elemento formado por dos elementos idénticos encerrados dentro de una pareja de paréntesis. Según esto, si tenemos ya escrita $(\alpha\beta) \leftrightarrow (\nu(\lambda\mu))$, podremos escribir la nueva fórmula $(\alpha\beta) \leftrightarrow (\nu((\lambda\lambda)\mu))$, y si entre las fórmulas escritas se encuentra $(\alpha\beta) \leftrightarrow ((\lambda(\mu\mu))\nu)$, podremos escribir $(\alpha\beta) \leftrightarrow ((\lambda\mu)\nu)$.

IV. El cuarto tipo de jugada que se puede llevar a cabo consiste en escribir una nueva fórmula obtenida sustituyendo cualquier grupo de dos elementos adyacentes, en un solo lugar de una fórmula existente, por el grupo formado por estos mismos, pero en orden inverso. Por consiguiente, si se tiene escrita $(\alpha\beta) \leftrightarrow ((\lambda\mu)\nu)$, podremos escribir $(\alpha\beta) \leftrightarrow (\nu(\lambda\mu))$.

V. De acuerdo con el quinto tipo de jugada, se puede escribir la

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

nueva fórmula que se obtenga efectuando la sustitución que indicamos inmediatamente en un solo lugar de una fórmula existente en que se encuentre una pareja de elementos adyacentes de los cuales uno sea, a su vez, una pareja de elementos adyacentes encerrada dentro de una pareja de paréntesis: desplácense éstos hacia la izquierda o hacia la derecha hasta que entre ellos queden encerrados el elemento que inicialmente no estaba dentro y, de los elementos que sí estaban, el más cercano a aquél. De esta forma, si se tiene escrita $(\alpha\beta) \longleftrightarrow ((\lambda\mu)(\mu\nu))$, podremos desplazar hacia la izquierda la pareja de paréntesis que encuadra $(\mu\nu)$ y escribir

$$(\alpha\beta) \longleftrightarrow (((\lambda\mu)\mu)\nu);$$

y, si se cuenta con la fórmula ya escrita $(\alpha\beta) \longleftrightarrow (((\lambda\mu)\mu)\nu)$, podremos desplazar hacia la derecha la pareja de paréntesis que enmarcan $(\lambda\mu)$ y escribir

$$(\alpha\beta) \longleftrightarrow ((\lambda(\mu\mu))\nu).$$

Las fórmulas iniciales del Primer cálculo son las tres siguientes:

$$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \longleftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda).$$

Toda fórmula derivada de este cálculo se obtendrá a partir de una o dos de las fórmulas iniciales y de las que ya se hayan derivado, realizando para ello alguno de los cinco tipos de jugadas que hemos especificado.

En la tabla I se encuentra una cadena de catorce jugadas, que conducen a una fórmula que necesitaremos para los debates posteriores. Hemos colocado en cabeza y sucesivamente las tres fórmulas iniciales, y les hemos atribuido los números [1], [2] y [3] (en orden arbitrario, pues es indiferente), por razones de conveniencia; señalamos en cada caso el método de obtención de la fórmula derivada.

TABLA I

[1]	$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu)$	
[2]	$\beta \longleftrightarrow (\mu\nu)$	
[3]	$\gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda)$	
[4]	$(\alpha\beta) \longleftrightarrow ((\lambda\mu)\beta)$	a partir de [1] en virtud de II: en $(\alpha\beta)$, *D* de [1] sustituye a *I* de la misma fórmula
[5]	$(\alpha\beta) \longleftrightarrow ((\lambda\mu)(\mu\nu))$	a partir de [4] y [2] en virtud de I: en [4], *D* de [2] sustituye a *I* de la misma fórmula
[6]	$(\alpha\beta) \longleftrightarrow (((\lambda\mu)\mu)\nu)$	a partir de [5] en virtud de V: $(((\lambda\mu)\mu)\nu)$ sustituye a $((\lambda\mu)(\mu\nu))$

[7]	$(\alpha\beta)\longleftrightarrow((\lambda(\mu\mu))\nu)$	a partir de [6] en virtud de V: $(\lambda(\mu\mu))$ sustituye a $((\lambda\mu)\mu)$
[8]	$(\alpha\beta)\longleftrightarrow((\lambda\mu)\nu)$	a partir de [7] en virtud de III: μ sustituye a $(\mu\mu)$.
[9]	$(\alpha\beta)\longleftrightarrow(\nu(\lambda\mu))$	a partir de [8] en virtud de IV: $(\nu(\lambda\mu))$ sustituye a $((\lambda\mu)\nu)$
[10]	$(\alpha\beta)\longleftrightarrow(\nu((\lambda\lambda)\mu))$	a partir de [9] en virtud de III: $(\lambda\lambda)$ sustituye a λ
[11]	$(\alpha\beta)\longleftrightarrow(\nu(\lambda(\lambda\mu)))$	a partir de [10] en virtud de V: $(\lambda(\lambda\mu))$ sustituye a $((\lambda\lambda)\mu)$
[12]	$(\alpha\beta)\longleftrightarrow((\nu\lambda)(\lambda\mu))$	a partir de [11] en virtud de V: $((\nu\lambda)(\lambda\mu))$ sustituye a $(\nu(\lambda(\lambda\mu)))$
[13]	$(\alpha\beta)\longleftrightarrow(\gamma(\lambda\mu))$	a partir de [12] y [3] en virtud de I: en [12], *I* de [3] sustituye a *D* de la misma fórmula.
[14]	$(\alpha\beta)\longleftrightarrow(\gamma\alpha)$	a partir de [13] y [1] en virtud de I: en [13], *I* de [1] sustituye a *D* de la misma fórmula.
[15]	$(\alpha\beta)\longleftrightarrow((\gamma\gamma)\alpha)$	a partir de [14] en virtud de III: $(\gamma\gamma)$ sustituye a γ
[16]	$(\alpha\beta)\longleftrightarrow(\gamma(\gamma\alpha))$	a partir de [15] en virtud de V: $(\gamma(\gamma\alpha))$ sustituye a $((\gamma\gamma)\alpha)$
[17]	$(\alpha\beta)\longleftrightarrow(\gamma(\alpha\beta))$	a partir de [16] y [14] en virtud de I: en [16], *I* de [14] sustituye a *D* de la misma fórmula

Unas cadenas análogas de jugadas que partan de efectuar sustituciones en $(\beta\gamma)$ y en $(\gamma\alpha)$ conducirán a

[31] $(\beta\gamma)\longleftrightarrow(\alpha(\beta\gamma))$

y a

[45] $(\gamma\alpha)\longleftrightarrow(\beta(\gamma\alpha))$

respectivamente.

Podemos dar a este cálculo muchas interpretaciones diferentes; vamos a indicar ahora aquélla de que nos ocuparemos más. Admítase que cada elemento primitivo (cada letra griega minúscula) represente una clase de cosas que posea cierta propiedad empírica: así, podemos suponer que α representa la clase de los albaricoques, la de los átomos de aluminio, la de las personas que padezcan astigmatismo o cualquier otra clase especificada diciendo que es la clase de las cosas que tengan una propiedad empírica determinada; puesto que carece de importancia en qué consista ésta, la llamaremos «*A*», de modo que admitiremos que α representa la clase de las cosas que tengan la propiedad *A*, o, abreviadamente, la clase de las *A*. De manera parecida, supondremos que β representa la clase de las *B*, γ la de las *C*, λ la de las *L*, μ la de las *M* y ν la de las *N*, siendo *B*, *C*, *L*, *M* y *N* propiedades empíricas. Admitiremos que el elemento formado por dos elementos adyacentes encerrados dentro de una pareja de paréntesis representará la clase de las cosas que sean miembros de la clase representada por el primer elemento —de la pareja de ellos adyacentes— y de la representada por el segundo; y llamaremos a aquella clase *intersección*, *en-*

cuentro o *producto lógico* de estas dos clases. De este modo, $(\alpha\beta)$ representará la clase de las cosas miembros de la clase designada por α y de la clase designada por β: esto es, la clase de las cosas que tengan la propiedad *A* y la *B* —si con *A* mentamos abreviadamente la propiedad de tener astigmatismo y con *B* la de ser británico, $(\alpha\beta)$ representará la clase de los británicos astigmáticos—. Análogamente, $(\alpha\alpha)$ representará la clase de las cosas que sean miembros de la clase designada por α y de la designada por α, $(\gamma(\alpha\beta))$ representará la de las cosas que sean tanto miembros de la clase que γ designe como de la que $(\alpha\beta)$ designe: esto es, representará la clase de las cosas que a la vez sean miembros de la clase designada por γ y de la clase cuyos miembros sean tanto miembros de la clase designada por α como de la designada por β. Todo elemento no primitivo representa la clase cuyos miembros son miembros de las clases representadas por los elementos que, adyacentes, lo forman (cuando se los encuadra con la pareja correspondiente de paréntesis); y en caso de que alguno de estos elementos, a su vez, sea no primitivo, representará, por su parte, una clase cuyos miembros sean a la vez miembros de dos clases. Por tanto, todo elemento no primitivo representa una clase formada a partir de clases designadas por elementos primitivos, merced al método de formar clases cuyos miembros sean los miembros comunes a dos clases; y todo elemento, primitivo o no, representa una clase de cosas que tienen una propiedad empírica.

Interpretaremos las fórmulas del cálculo admitiendo que la flecha doble, $\longleftrightarrow$, represente la relación de identidad de clases. De ahí que $\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu)$ se haya de interpretar como representante de la proposición según la cual la clase de las *A* es la misma que la de las cosas que sean a la vez *L* y *M*: puesto que toda fórmula consta de dos elementos unidos por una flecha doble, y dado que siempre puede decirse de cualquier par de clases de que hayamos de ocuparnos que son idénticas, toda fórmula de este cálculo representa una proposición. Por otra parte, la proposición representada por la fórmula $\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu)$ puede expresarse de diversos modos: en el lenguaje de las clases se expresa diciendo que la clase de las *A* es idéntica a la de las cosas que sean a la vez *L* y *M*; puede expresarse asimismo, sin utilizar dicho lenguaje, como la conyunción de la proposición general de que todo lo que sea *A* es también *L* y *M* con la proposición general de que todo lo que sea *L* y *M* es también *A*. De forma semejante, la fórmula $(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma(\alpha\beta))$ representa la proposición que cabe expresar diciendo que la clase de las cosas que sean *A* y *B* es idéntica a la de las cosas que sean tanto *C* como *A* y *B*; empleando la noción de inclusión podemos

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

expresar la misma proposición diciendo que la clase de las cosas que sean a la vez A y B está incluida en la clase de las C, y otro modo de expresarla sin utilizar el lenguaje de las clases consiste en la proposición general única según la cual todo lo que sea a la vez A y B será también B.

Con esta interpretación las reglas de juego del cálculo representan principios lógicos de deducción. Las reglas I y II representan propiedades lógicas de la identidad de clases: si dos clases son idénticas, la II expresa la verdad de que cualquier clase formada a partir de una de ellas será idéntica a la clase formada del mismo modo a partir de la otra, y la I expresa la verdad de que a partir de cualquier enunciado acerca de una de estas clases que sea expresable en el lenguaje de este cálculo por una fórmula se sigue el enunciado correspondiente acerca de la otra clase. Las reglas III, IV y V representan propiedades lógicas de la operación de intersección de clases: la III expresa la verdad de que a partir de cualquier enunciado expresable acerca de una clase se sigue el enunciado correspondiente acerca de la intersección de dicha clase consigo misma, y viceversa; la IV expresa la verdad de que a partir de cualquier enunciado expresable sobre la intersección de una clase con otra se sigue el enunciado correspondiente sobre la intersección de esta última con la primera; y la V expresa la verdad de que partiendo de cualquier enunciado expresable acerca de la intersección de una clase con la intersección de una segunda clase con otra tercera se sigue el enunciado correspondiente acerca de la intersección de la tercera clase mencionada con la intersección de la primera con la segunda, y viceversa.

Así pues, cada una de las reglas de juego del cálculo representa un principio deductivo según el cual puede deducirse una proposición de otra —o, en el caso de la regla I, de otras dos—. Puesto que toda proposición deductible de una o más proposiciones que sean a su vez deductibles de un conjunto de proposiciones es también deductible de este conjunto, toda proposición representable por una fórmula de este cálculo será deductible de las proposiciones representadas por las fórmulas iniciales, por lo cual toda cadena de jugadas del cálculo que comience en estas fórmulas iniciales representará una cadena de deducciones a partir de las proposiciones iniciales correspondientes. La serie de fórmulas que hemos presentado en la tabla I representa una cadena deductiva, en la que a partir de las proposiciones iniciales

[1] todo lo que sea A es también L y M, y viceversa,

[2] todo lo que sea B es también M y N, y viceversa,

[3] todo lo que sea C es también N y L, y viceversa,

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

se llega, a través de catorce pasos o etapas de deducción, a

[17] todo lo que sea A y B es también C.

Otros catorce pasos deductivos llevarían a

[31] todo lo que sea B y C es también A,

mientras que otros catorce más conducirían a

[45] todo lo que sea C y A es también B.

De esta suerte, interpretamos el Primer cálculo y las cuarenta y dos fórmulas derivadas de las tres iniciales como representación de un sistema deductivo (S_1) en el que de las tres proposiciones iniciales se deducen cuarenta y dos proposiciones; los principios deductivos según los cuales se realizan las deducciones forman parte de la lógica de clases: los dos primeros se refieren a las propiedades formales de la identidad de clases y los tres últimos a las propiedades formales de la intersección de clases; y la validez de estos principios es asunto de la lógica. Admitiremos que las seis propiedades empíricas, A, B, C, L, M y N, son lógicamente independientes, de suerte que ninguna de las tres proposiciones iniciales que las enlazan sea lógicamente necesaria; y llamaremos *sistema deductivo impuro* a todo sistema deductivo en el que, como ocurre en el S_1, las proposiciones iniciales sean contingentes. A este tipo de sistemas contrapondremos todo sistema en el que todas las proposiciones iniciales sean lógicamente necesarias, que recibirá el nombre de *sistema deductivo puro;* y dado que sólo cabe deducir una proposición contingente de un conjunto de proposiciones en el que esté incluida al menos una proposición también contingente, todas las proposiciones de un sistema deductivo puro serán lógicamente necesarias. Llamaremos *sistema deductivo mixto* a todo aquél en el que algunas de las proposiciones iniciales —pero no todas— sean contingentes; y, por fin, daremos el nombre de *sistema deductivo aplicado* a todo sistema que, o bien sea impuro, o bien mixto (es decir, que no sea un sistema puro)[3].

Importa advertir que los adjetivos «impuro», «puro», «mixto» y «aplicado» pueden calificar los sistemas deductivos, pero no los cálculos que los representan: normalmente, un mismo cálculo puede interpretarse de diversas maneras, ya como sistema deductivo puro, ya como impuro o como mixto. Podemos interpretar el primer cálculo perfectamente como sistema deductivo puro del siguiente modo: Admítase que cada elemento primitivo (cada letra griega minúscula) re-

---

[3] Existen también sistemas deductivos (p. ej., las demostraciones por reducción al absurdo) en los que algunas o todas las proposiciones iniciales son lógicamente imposibles; pero no nos ocuparemos de ellos en este libro.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

presente un número entero y positivo; admítase también que el elemento formado por dos elementos adyacentes más la pareja de paréntesis en que estén encerrados represente el máximo común divisor de los números representados por los dos elementos adyacentes; finalmente, admítase que el signo de la flecha doble represente la relación de identidad entre números. Entonces, las dos primeras reglas del juego representarán verdades acerca de la relación de identidad, y las tres últimas, verdades aritméticas acerca del máximo común divisor. Si suponemos que α, β, γ, λ, μ y ν representan, respectivamente, 6, 10, 8, 24, 30 y 40, las tres proposiciones iniciales que interpretan las tres fórmulas iniciales serán:

[1] 6 es el máximo común divisor de 24 y 30,
[2] 10 es el máximo común divisor de 30 y 40,
[3] 8 es el máximo común divisor de 40 y 24.

Por tanto, cuando se la interpreta de este modo, la tabla I representa una cadena de proposiciones en la que cada paso da origen a una nueva proposición deductible del conjunto inicial; por ejemplo, en once pasos llegamos a

[14] el máximo común divisor de 6 y 10 es el máximo común divisor de 8 y 6.

Como las proposiciones iniciales son lógicamente necesarias, ya que se trata de perogrulladas aritméticas, todas las proposiciones de este sistema deductivo son lógicamente necesarias, y éste se convierte en un sistema deductivo puro.

Los problemas especiales que se refieren a los sistemas de este último tipo son de la incumbencia de la lógica de las matemáticas más bien que de la lógica de la ciencia, y por ello no nos conciernen directamente. Pero los sistemas deductivos mixtos, en los que algunas proposiciones iniciales son lógicamente necesarias mientras que otras son lógicamente contingentes, tienen la máxima importancia en una ciencia adelantada, como la física, y es necesario que los estudiemos con cierto detalle.

En cuanto a la razón por la que se emplean sistemas deductivos de esta índole en las ciencias adelantadas, consiste en que toda ciencia de esta clase emplea un aparato matemático de tal magnitud que conviene utilizarlo *explícitamente* —incluyendo proposiciones de matemática pura en el sistema deductivo—, en lugar de hacerlo *implícitamente* para proporcionar principios deductivos de acuerdo con los cuales se lleven a cabo las deducciones. Mas para explicar esto hemos de construir un segundo cálculo.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

El segundo cálculo y su interpretación

En el sistema deductivo impuro, S_1, mediante el cual hemos interpretado nuestro Primer cálculo, todo el aparato matemático se utiliza en forma de principios deductivos y todas las proposiciones iniciales son contingentes. Mas es posible incluir dicho sistema dentro de un sistema mixto, S_2, que contenga unas proposiciones iniciales lógicamente necesarias y otras contingentes de tal modo que las proposiciones contingentes sean exactamente las mismas, y se deduzcan exactamente en el mismo orden, que en el sistema deductivo impuro S_1. La ventaja que tiene el pensar mediante el sistema mixto S_2 en lugar de hacerlo mediante el sistema impuro S_1 reside en que aquél utiliza menos principios deductivos, ya que gran parte del aparato matemático que se necesita ha de aparecer en forma de proposiciones de la parte pura del sistema: esta parte requerirá proposiciones iniciales suplementarias (ya que no cabe deducir proposiciones lógico-matemáticas a partir de proposiciones contingentes solas), pero éstas ocuparán el lugar de los principios deductivos que ya no sean necesarios.

Por consiguiente, el cálculo —llamémosle Segundo cálculo— que represente el sistema mixto S_2 diferirá del Primer cálculo por contener más fórmulas iniciales, pero las jugadas se efectuarán de acuerdo con un número menor de reglas de juego: considerado como un juego será más sencillo, en el sentido de que sólo será preciso retener dos reglas —en lugar de cinco— para jugar.

La primera regla es la misma que la I del Primer cálculo: permite que en cualquier fórmula existente sustituyamos el elemento izquierdo de cualquier fórmula existente por el derecho de esta misma (y viceversa).

La segunda regla se emplea para llevar a cabo jugadas a partir de fórmulas que contengan uno o más elementos del conjunto especial de elementos primitivos que llamaremos *variables*. Para los usos que haremos del segundo cálculo y de otros semejantes se necesitan solamente cuatro variables; reservaremos para este fin ξ, η, ζ y ω. La regla II afirma entonces que podemos escribir siempre una nueva fórmula sustituyendo una o más variables, en todos los lugares en que aparezcan en una fórmula ya existente, por un elemento o por unos elementos cualesquiera, con tal de que, en caso de que una variable que vayamos a sustituir aparezca en varios lugares de la fórmula original, en cada uno de éstos la sustituya uno y el mismo elemento. De este modo, si está ya escrita $(\xi\eta) \leftrightarrow (\eta\xi)$, podemos escribir la nueva fórmu-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

la $((\lambda\mu)\nu) \longleftrightarrow (\nu(\lambda\mu))$, que se obtiene sustituyendo ξ por $(\lambda\mu)$ en cada uno de los lugares en que aparecía ξ, y η por ν en cada uno de los lugares en que la fórmula original tenía η. Pero la regla no nos permitirá escribir $((\lambda\mu)\nu) \longleftrightarrow (\nu\xi)$ —en la que ξ queda sustituida por $(\lambda\mu)$ solamente en uno de los dos lugares en que aparecía aquella variable.

Las jugadas que estas dos reglas permiten son sustituciones en fórmulas completas que estén ya escritas. La primera autoriza que se sustituya cualquier elemento de una fórmula —en uno o en varios de los lugares en que aparezca en ésta— que sea elemento derecho o izquierdo de una fórmula por el elemento izquierdo o derecho, respectivamente, de esta última; y la segunda regla consiente que se haga la sustitución de cualesquiera variable o variables que haya en una fórmula —en todos los lugares en que aparezca o aparezcan en ésta— por un elemento o unos elementos arbitrarios, con tal de que cada variable se sustituya siempre del mismo modo y en todos los lugares en que aparezca [4]. Llamaremos a estos dos tipos de sustituciones la *sustitución de flecha doble* y la *sustitución de variables*, respectivamente.

Además de las tres fórmulas iniciales del Primer cálculo, en el Segundo cálculo se utilizan las tres fórmulas iniciales suplementarias que siguen:

$$(\xi\xi)\longleftrightarrow\xi, \quad (\xi\eta)\longleftrightarrow(\eta\xi), \quad (\xi(\eta\zeta))\longleftrightarrow((\xi\eta)\,\zeta).$$

En ellas aparecen exclusivamente variables como elementos primitivos.

Presentamos en la tabla II una cadena de veinticinco jugadas del Segundo cálculo (fórmulas [7]-[31]), de acuerdo con las cuales se extraen sucesivamente las catorce fórmulas derivadas del Primer cálculo (fórmulas [4]-[17] de la tabla I). Para facilitar las cosas hemos colocado en cabeza las seis fórmulas iniciales ([1]-[6]) y hemos indicado en cada caso la fórmula o fórmulas a partir de donde se llega a la fórmula derivada: mencionaremos ahora que la primera de éstas, [7], se obtiene mediante una sustitución de flecha doble, efectuada en la fórmula [4], que coloca el elemento derecho de la misma fórmula [4] en lugar del izquierdo, y que todas las demás fórmulas derivadas de la columna de la izquierda se obtienen mediante sustituciones de va-

---

[4] Puede adoptarse como regla de sustitución de variables, si se quiere, una, más sencilla, que tenga la forma necesaria para autorizar solamente la sustitución de una variable de cada vez: entonces se necesitarán varios pasos sucesivos para sustituir varias variables. La forma generalizada que hemos dado, en cambio, reduce el número de pasos precisos «enchufando» unos en otros los que son necesarios en caso de que se utilice la forma sencilla de esta regla.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

riables, mientras que se llega a las de la columna de la derecha por medio de sustituciones de flecha doble.

Pueden construirse cadenas de jugadas análogas que conduzcan a $(\beta\gamma) \leftrightarrow (\alpha(\beta\gamma))$ y a $(\gamma\alpha) \leftrightarrow (\beta(\gamma\alpha))$.

Hemos distribuido las fórmulas en dos columnas por la siguiente razón: las colocadas en las columnas de la izquierda poseen la importante característica de que ninguna de ellas se saca de ninguna fórmula de la columna derecha; la columna de la izquierda contiene las tres fórmulas iniciales nuevas —que se distinguen de las otras fórmulas iniciales por el hecho de no aparecer en ellas otros elementos primitivos que variables— y fórmulas que se extraen mediata o inmediatamente de ellas en virtud de las dos reglas de juego; así pues, las fórmulas de esta columna lo son de un cálculo cuyas fórmulas iniciales son

$$(\xi\xi) \leftrightarrow \xi, \quad (\xi\eta) \leftrightarrow (\eta\xi), \quad (\xi(\eta\zeta)) \leftrightarrow ((\xi\eta)\,\zeta),$$

y cuyas reglas de juego son las del Segundo cálculo (esto es, la regla de sustitución de flecha doble y la de sustitución de variables). Llamaremos ***cálculo algebraico*** [5] a todo cálculo dotado de una regla de sustitución de variables y cuyas fórmulas iniciales sólo contengan variables como elementos primitivos; por consiguiente, las fórmulas de la columna de la izquierda pertenecen a un cálculo algebraico que constituye una parte independiente (a la que llamaremos *parte algebraica)* del Segundo cálculo. (La diferencia esencial entre el Segundo cálculo y el Primero reside en que aquél contiene una parte algebraica, mientras que éste, que no utiliza variables, carece de tal cosa.) Las fórmulas que aparecen en el lado derecho de la tabla II son exactamente las mismas —y se han extraído en el mismo orden— que las que habían aparecido en la cadena del Primer cálculo reproducida en la tabla I; en éste se extraían, inmediata o mediatamente, de las tres fórmulas iniciales, carentes de variables, mientras que en el Segundo cálculo, por el contrario, se derivan haciendo uso de su parte algebraica.

Obtendremos ahora el sistema deductivo mixto S_2 interpretando los elementos y fórmulas del Segundo cálculo en que no aparezcan variables exactamente del mismo modo en que se interpretaban en el

---

[5] Hemos elegido este nombre porque el uso de símbolos como variables juntamente con una regla de sustitución de variables adecuada constituye la característica distintiva del álgebra en el sentido de los libros de texto elementales, y también porque un cálculo algebraico en el sentido que le doy a esta expresión corresponde con bastante aproximación a lo que los matemáticos contemporáneos llaman «un álgebra».

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

TABLA II

[4]	$(\xi\xi) \leftrightarrow \xi$		[1]	$\alpha \leftrightarrow (\lambda\mu)$	
[5]	$(\xi\eta) \leftrightarrow (\eta\xi)$		[2]	$\beta \leftrightarrow (\mu\nu)$	
[6]	$(\xi(\eta\zeta)) \leftrightarrow ((\xi\eta)\,\zeta)$		[3]	$\gamma \leftrightarrow (\nu\lambda)$	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
[7]	$\xi \leftrightarrow \xi$	a partir de [4] y [4]			
[8]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow (\alpha\beta)$	a partir de [7]	[9]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow ((\lambda\mu)\,\beta)$	a partir de [8] y [1]
			[10]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow ((\lambda\mu)\,(\mu\nu))$	a partir de [9] y [2]
[11]	$((\lambda\mu)\;(\mu\nu)) \leftrightarrow (((\lambda\mu)\;\mu)\;\nu)$	a partir de [6]	[12]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow (((\lambda\mu)\,\mu)\;\nu)$	a partir de [10] y [11]
[13]	$(\lambda(\mu\mu)) \leftrightarrow ((\lambda\mu)\;\mu)$	a partir de [6]	[14]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow ((\lambda(\mu\mu))\;\nu)$	a partir de [12] y [13]
[15]	$(\mu\mu) \leftrightarrow \mu$	a partir de [4]	[16]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow ((\lambda\mu)\;\nu)$	a partir de [14] y [15]
[17]	$((\lambda\mu)\;\nu) \leftrightarrow (\nu(\lambda\mu))$	a partir de [5]	[18]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow (\nu(\lambda\mu))$	a partir de [16] y [17]
[19]	$(\lambda\lambda) \leftrightarrow \lambda$	a partir de [4]	[20]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow (\nu((\lambda\lambda)\,\mu))$	a partir de [18] y [19]
[21]	$(\lambda(\lambda\mu)) \leftrightarrow ((\lambda\lambda)\,\mu)$	a partir de [6]	[22]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow (\nu(\lambda(\lambda\mu)))$	a partir de [20] y [21]
[23]	$(\nu(\lambda(\lambda\mu))) \leftrightarrow ((\nu\lambda)\;(\lambda\mu))$	a partir de [6]	[24]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow ((\nu\lambda)\;(\lambda\mu))$	a partir de [22] y [23]
			[25]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow (\gamma(\lambda\mu))$	a partir de [24] y [3]
			[26]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow (\gamma\alpha)$	a partir de [25] y [1]
[27]	$(\gamma\gamma) \leftrightarrow \gamma$	a partir de [4]	[28]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow ((\gamma\gamma)\;\alpha)$	a partir de [26] y [27]
[29]	$(\gamma(\gamma\alpha)) \leftrightarrow ((\gamma\gamma)\,\alpha)$	a partir de [6]	[30]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow (\gamma(\gamma\alpha))$	a partir de [28] y [29]
			[31]	$(\alpha\beta) \leftrightarrow (\gamma(\alpha\beta))$	a partir de [30] y [26

Primero los elementos y fórmulas con objeto de llegar al sistema deductivo impuro S_1; en lo que respecta a las variables, así como a los elementos y fórmulas que las contengan, es de advertir que no daremos una interpretación directa de las variables mismas —ξ, η y ζ— ni tampoco de los elementos que contengan una o varias de ellas —como $(\xi(\eta\zeta)$—, y que tampoco daremos interpretación directa alguna del signo de flecha doble en cuanto signo que aparece en fórmulas que contengan una o más variables; sino que, en vez de tal cosa, daremos una interpretación de toda fórmula completa en que aparezca una variable, del modo siguiente: ha de entenderse que tal fórmula expresa, acerca de toda clase, el mismo enunciado que enunciaría acerca de una clase determinada, designada por χ, si se sustituyese en dicha fórmula la variable, en todos los lugares en que aparezca, por χ. Así, ha de interpretarse la fórmula inicial $(\xi\xi) \leftrightarrow \xi$ en el sentido de que expresa la proposición de que la intersección de toda clase consigo

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

misma es esa misma clase, puesto que $(\chi\chi) \leftrightarrow \chi$ se interpretaría como expresión de la proposición de que la intersección de la clase designada por χ consigo misma es esa misma clase; análogamente, $((\lambda\mu)\eta) \leftrightarrow \leftrightarrow (\eta(\lambda\mu))$ expresará la proposición según la cual es verdad para toda clase que la intersección con ella de la intersección de la clase de las *L* con la clase de las *M* es igual a la intersección de aquella clase con la intersección de la clase de las *L* con la clase de las *M*. En caso de que haya dos o tres variables en la fórmula, ésta debe interpretarse como expresión acerca de toda pareja o terna de clases del mismo enunciado que enunciaría acerca de la pareja determinada de clases que designaríamos con χ, θ —o de la terna determinada de clases que designaríamos con χ, θ, φ— si sustituyésemos cada una de las variables de la fórmula, en cada uno de los lugares en que aparezca, por una de estas letras; de este modo, hemos de entender la fórmula inicial $(\xi\eta) \leftrightarrow (\eta\xi)$ en el sentido de que expresa la proposición según la cual es verdad para toda pareja de clases que la intersección de la primera de ellas con la segunda es la misma clase que la intersección de la segunda con la primera.

Con esta interpretación las reglas de juego representan principios lógicos de deducción. La regla de sustitución de flecha doble expresa, como antes, la verdad de que a partir de cualquier enunciado, expresable por una fórmula del cálculo, acerca de una clase se sigue el correspondiente enunciado acerca de una clase idéntica a ella. La regla de sustitución de variables expresa la verdad de que a partir de cualquier enunciado expresable acerca de toda clase se sigue el enunciado correspondiente acerca de cualquier clase determinada; lo cual es un caso particular del principio deductivo entrañado siempre que se emplean proposiciones generales que afirmen que lo que sea verdad de todo cuanto pertenezca a cierta categoría lógica se aplica a cualquier caso o ejemplo de dicha categoría —y, como diremos en el próximo capítulo, la noción de proposición general tiene una vinculación muy íntima con la utilización de este *principio aplicativo* (como lo ha llamado W. E. Johnson).

Al admitir esta interpretación, la serie de fórmulas de la tabla II representa una cadena de deducciones en el sistema deductivo mixto S_2 a partir de las seis proposiciones iniciales. Las proposiciones expresadas por las fórmulas que se encuentran en la columna de la derecha son contingentes: son las mismas que aparecían en la cadena deductiva del sistema deductivo impuro, S_1, representado por las fórmulas de la tabla I, y además se encuentran en el mismo orden en ambos casos; de modo que esta columna representa la parte impura

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

del sistema deductivo mixto S_2. Por lo que respecta a las proposiciones expresadas por las fórmulas que aparecen en la columna de la izquierda —que pertenecen a la parte algebraica del cálculo—, todas ellas son lógicamente necesarias: las representadas por fórmulas que contienen una o más variables son verdades lógicas generales acerca de propiedades y relaciones de clases, y las que están representadas por fórmulas que no contienen variable alguna son las aplicaciones de dichas verdades generales a casos particulares. Por ejemplo, $\xi \leftrightarrow \xi$ representa la verdad general de que toda clase es idéntica a sí misma, y $(\alpha\beta) \leftrightarrow (\alpha\beta)$ representa la aplicación de esta verdad general al caso de la clase de las cosas que sean tanto A como B: es decir, representa la proposición según la cual esta clase especial es idéntica a sí misma. Tanto las verdades generales como sus aplicaciones particulares son proposiciones lógicamente necesarias, y la parte algebraica del Segundo cálculo representa, por tanto, la parte pura del sistema deductivo mixto S_2, o sea, el aparato matemático que se requiere para deducir las proposiciones de la parte impura. Dado que la parte algebraica del Segundo cálculo es independiente del resto, todas las proposiciones de la parte pura de S_2 se siguen de proposiciones que también se encuentran en esta parte; y, en consecuencia, la parte pura es independiente de la impura de una manera en que esta última no lo es de aquélla. Así pues, la parte pura forma por sí misma un sistema deductivo —y precisamente un sistema deductivo puro—, que está representado en el Segundo cálculo por el cálculo algebraico que constituye la parte algebraica de aquél.

Mas —puede perfectamente preguntarse— ¿qué ventaja logramos empleando el sistema deductivo mixto S_2, representado por el Segundo cálculo, con preferencia al sistema deductivo impuro, S_1, que el Primer cálculo representa? ¿Qué virtud tiene la reducción del número de principios deductivos precisos a costa de aumentar el de proposiciones iniciales y de incrementar enormemente el número de pasos necesarios para deducir las proposiciones que queramos extraer? (Para deducir la proposición expresada por la fórmula $(\alpha\beta) \leftrightarrow (\gamma(\alpha\beta))$ son menester veinticinco pasos en el sistema S_2, en tanto que sólo se requieren catorce en el S_1.)

La respuesta a esta crítica es doble. En primer lugar debe advertirse que la mayor cantidad de pasos en la deducción dentro del sistema S_2 está compensada por la mayor sencillez de cada uno de ellos; los dos principios deductivos que se emplean en este sistema son tan sencillos que es muy improbable que se utilicen incorrectamente: para llevar a cabo una jugada en el Segundo cálculo lo único que hay que

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

hacer es copiar fórmulas que estén ya escritas, realizando en ellas las sencillas sustituciones que sean apropiadas, mientras que con objeto de realizar jugadas en el Primer cálculo se precisa asimismo construir fórmulas nuevas, doblar elementos de éstas, permutar su orden y desplazar parejas de paréntesis hacia la derecha o hacia la izquierda. Ni el Primer cálculo ni el Segundo son de tipo no electivo, de suerte que se requiere inteligencia para escoger cuál sea la jugada apropiada en cada fase; en cambio, la comprobación de que las jugadas hayan sido correctas es, desde luego, automática; pero es mucho más sencilla en el caso del Segundo cálculo, ya que basta comprobar si la jugada se ha ejecutado de acuerdo con una u otra de sus dos sencillas reglas.

La segunda ventaja que se consigue utilizando el sistema deductivo S_2, representado por el Segundo cálculo, es que ello nos permite construir deducciones de proposiciones contingentes en las que casi todos los pasos deductivos caigan en la parte pura del sistema deductivo —representada por la parte algebraica del Segundo cálculo—. Con un ejemplo se expone más claramente este punto: presentaremos, por tanto, una serie de fórmulas de este cálculo que representen una cadena de deducciones del sistema deductivo mixto S_2 y conduzcan a la fórmula [26] de la tabla II, pero siguiendo un camino cuya mayor y mejor parte se encuentre íntegramente en la parte pura del sistema deductivo mixto (lo mismo que en la tabla II, todas las fórmulas del lado izquierdo pertenecerán a la parte algebraica del segundo cálculo).

Si comparamos la cadena deductiva representada en la tabla III con la que representan las fórmulas [1]-[26] de la tabla II —ambas cadenas emplean las mismas proposiciones iniciales e idénticos principios deductivos—, nos percatamos, aparte del hecho secundario de que la primera cadena contiene cuatro pasos menos que la segunda, del importante hecho de que, de los dieciséis pasos de aquélla, los trece primeros se encuentran en la parte pura del sistema deductivo mixto, parte representada por la parte algebraica del cálculo; y la importancia de este hecho estriba en que posibilita una división del trabajo. Los teoremas del sistema deductivo puro pueden deducirse por matemáticos puros que trabajen con un cálculo algebraico, sin preocupación alguna por su aplicación a cualesquiera campos empíricos; y pueden aplicarse por el científico de modo que le permitan deducir consecuencias de sus hipótesis científicas. Al hombre de ciencia, por tanto, le es posible dejar todo el grueso de la tarea deductiva al matemático: sólo necesita añadir al final los dos o tres pasos

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

que se precisen para aplicar la labor de éste a la finalidad que persiga [6]; y puede ponerse de acuerdo con él de modo que tenga necesidad solamente de un principio deductivo para llevar a cabo estos dos o tres pasos, de modo que la posibilidad de cometer un error matemático se reduzca al mínimo.

Esta posibilidad de división del trabajo, merced a la cual todas las deducciones realmente difíciles se dejan en manos del matemático profesional, constituye la razón por la cual los científicos prefieren casi siempre sistemas deductivos mixtos, del tipo del S_2, a sistemas deductivos impuros, como el S_1. Desde el punto de vista del lógico filosófico, en la utilización de un sistema impuro se ven con mayor claridad que en la de uno mixto los rasgos filosóficos esenciales, pues

TABLA III

[4]	$(\xi\xi) \longleftrightarrow \xi$		[1]	$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu)$
[5]	$(\xi\eta) \longleftrightarrow (\eta\xi)$		[2]	$\beta \longleftrightarrow (\mu\nu)$
[6]	$(\xi(\eta\zeta)) \longleftrightarrow ((\xi\eta)\,\zeta)$		[3]	$\gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
[7]	$((\xi\eta)\,(\eta\zeta)) \longleftrightarrow (((\xi\eta)\,\eta)\,\zeta)$	a partir de [6]		
[8]	$(\xi(\eta\eta)) \longleftrightarrow ((\eta\xi)\,\eta)$	a partir de [6]		
[9]	$((\xi\eta)\,(\eta\zeta)) \longleftrightarrow ((\xi(\eta\eta))\,\zeta)$	a partir de [7] y [8]		
[10]	$(\eta\eta) \longleftrightarrow \eta$	a partir de [4]		
[11]	$((\xi\eta)\,(\eta\zeta)) \longleftrightarrow ((\xi\eta)\,\zeta)$	a partir de [9] y [10]		
[12]	$((\xi\eta)\,\zeta) \longleftrightarrow (\zeta(\xi\eta))$	a partir de [5]		
[13]	$((\xi\eta)\,(\eta\zeta)) \longleftrightarrow (\zeta(\xi\eta))$	a partir de [11] y [12]		
[14]	$((\xi\eta)\,(\eta\zeta)) \longleftrightarrow (\zeta((\xi\xi)\,\eta))$	a partir de [13] y [4]		
[15]	$(\xi(\xi\eta)) \longleftrightarrow ((\xi\xi)\,\eta)$	a partir de [6]		
[16]	$((\xi\eta)\,(\eta\zeta)) \longleftrightarrow (\zeta(\xi(\xi\eta)))$	a partir de [14] y [15]		
[17]	$(\zeta(\xi(\xi\eta))) \longleftrightarrow ((\zeta\xi)\,(\xi\eta))$	a partir de [6]		
[18]	$((\xi\eta)\,(\eta\zeta)) \longleftrightarrow ((\zeta\xi)\,(\xi\eta))$	a partir de [16] y [17]		

[6] Para extraer la fórmula $(\beta\gamma) \longleftrightarrow (\alpha\beta)$ de acuerdo con el método de la tabla III sólo se necesitan cuatro pasos más, ya que podemos partir de la fórmula [18]. Por el método de la tabla II no podemos empezar más abajo de la fórmula [7], con lo cual se hacen necesarios diecinueve pasos más.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

[19]	$((\lambda\mu)(\mu\nu)) \longleftrightarrow ((\nu\lambda)(\lambda\mu))$	a partir de [18]
[20]	$(\alpha(\mu\nu)) \longleftrightarrow ((\nu\lambda)\alpha)$	a partir de [19] y [1]
[21]	$(\alpha\beta) \longleftrightarrow ((\nu\lambda)\alpha)$	a partir de [20] y [2]
[22]	$(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma\alpha)$	a partir de [21] y [3]

en el primero todas las proposiciones iniciales son contingentes, y la lógica empleada yace íntegramente en los principios deductivos. Por otra parte, cualquier sistema deductivo mixto es susceptible de transformación en uno impuro equivalente sin más que emplear en el primero los principios deductivos adicionales que correspondan a las proposiciones iniciales lógicamente necesarias; y el lógico filosófico, que se ocupa primariamente de distinguir entre proposiciones necesarias y contingentes, puede preferir que se represente un sistema científico de modo que sea deductible de un conjunto formado sólo por proposiciones contingentes.

Es cierto que toda cadena de deducciones de un sistema mixto que, a través de una primera parte formada exclusivamente por proposiciones lógicamente necesarias (por ejemplo, las proposiciones representadas por [4]-[19] de la tabla III), conduzca a una proposición contingente determinada puede transformarse en una cadena sumamente breve de deducciones perteneciente a un sistema impuro con tal de que uno se disponga a utilizar un principio deductivo suficientemente complicado: por ejemplo, si aceptamos el empleo como principio deductivo de la verdad según la cual a partir de cualquier enunciado (expresable en un cálculo del tipo del Primero) acerca de la intersección entre la intersección de una primera clase con una segunda y la intersección de esta segunda clase con una tercera se sigue el enunciado correspondiente acerca de la intersección entre la intersección de la tercera clase con la primera y la intersección de la primera con la segunda, podemos valernos de un sistema deductivo que contenga este principio de deducción además de los dos primeros principios deductivos y las tres proposiciones iniciales del sistema S_1; y en este nuevo sistema deductivo puede llegarse a la fórmula $(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma\alpha)$ a través de no más de cinco pasos:

$(\alpha\beta) \longleftrightarrow ((\lambda\mu)\beta)$	en virtud de II del Primer cálculo,
$(\alpha\beta) \longleftrightarrow ((\lambda\mu)(\mu\nu))$	en virtud de I del Primer cálculo,
$(\alpha\beta) \longleftrightarrow ((\nu\lambda)(\lambda\mu))$	en virtud de la regla del cálculo que represente el nuevo principio deductivo,
$(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma(\lambda\mu))$	en virtud de I del Primer cálculo, y
$(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma\alpha)$	en virtud de I del Primer cálculo.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Pero un principio especial del tipo del que hemos introducido ahora no es intuitivamente evidente; y tampoco nos permitirá deducir otra cosa que una clase de proposiciones sumamente limitada: por ejemplo, es imposible deducir en este nuevo sistema deductivo la proposición expresada por $(\alpha\beta) \leftrightarrow (\gamma(\alpha\beta))$.

El empleo para las deducciones de un sistema deductivo mixto en el que todas las proposiciones primeras pertenezcan a un sistema puro satisface en gran medida la petición del lógico filosófico de que exista una separación neta entre lo lógicamente necesario y lo lógicamente contingente. Además, no sólo todas las proposiciones que aparecen en la parte pura de semejante deducción —excepto la última— son lógicamente necesarias, sino completamente generales: se trata, pues, de proposiciones de la lógica formal o de la matemática pura. Así, en la parte pura de la deducción representada en la tabla III las proposiciones expresadas por las fórmulas [4]-[18] se refieren a toda clase, a todo par de clases o a toda terna de clases: ninguna de ellas se refiere a ninguna clase particular de tal suerte que no se refiera asimismo a toda otra clase particular, de modo que son proposiciones pertenecientes a la lógica pura de las clases; y esta completa generalidad está representada en el cálculo por el hecho de que en ninguna de las fórmulas [4]-[18] aparece ningún elemento primitivo que no sea una variable. Solamente cuando se extrae la fórmula [19] a partir de la [18] en virtud de la regla de sustitución de variables, aparece una fórmula en la que se encuentran elementos primitivos distintos de las variables; esta transición representa la deducción de una proposición acerca de clases determinadas —la clase de las *L*, la de las *M* o la de las *N*— a partir de una proposición completamente general acerca de todas las ternas de clases. Así pues, la proposición que corresponde a la fórmula [19] no pertenece ya a la lógica pura de las clases, sino que es la aplicación de un teorema de esta lógica a un caso determinado: como las quince proposiciones que la preceden, es lógicamente necesaria, y ello merced solamente a su forma, ya que su necesidad lógica no depende de ninguna propiedad especial de las clases de que se ocupa, sino exclusivamente de ser una aplicación de un teorema general; por tanto, cabe llamarla, como a sus quince predecesoras, una proposición *formal;* pero no es completamente general, puesto que se refiere a tres clases determinadas: de ahí que sea una proposición de la matemática aplicada, y no de la pura.

Por tanto, en una deducción dentro de un sistema deductivo mixto análoga a la representada en la tabla III cabe distinguir tres fases: en primer término se encuentra la deducción del teorema completa-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

mente general que se necesita como aparato matemático; después tenemos la aplicación de este teorema al asunto u objeto determinado de que se trate, y, en tercer lugar, la utilización de esta proposición lógicamente necesaria, mas aplicada y particular, para que sirva, en conyunción con ciertas proposiciones contingentes, para deducir otras proposiciones contingentes. La primera fase pertenece a la lógica formal o a la matemática pura, la segunda a la lógica o a la matemática aplicadas y la tercera consiste en una deducción que se encuentra completamente dentro de la ciencia en cuestión.

El principio deductivo que se emplea para pasar de la primera fase a la segunda es aquél, tan sencillo, según el cual lo que es verdad de *todo* es verdad de *cualquiera (o principio aplicativo)*, y que, como veremos, no involucra sino la manera de dar sentido a los enunciados generales [7]. El principio que se utiliza para deducir los pasos finales dentro de la ciencia de que se trate es, en el caso representado en la tabla III, el de que lo que es verdad de una clase es verdad de una clase idéntica a ella —lo cual no involucra otra cosa que la forma en que se usa la palabra «idéntica» refiriéndose a clases—. Es posible construir un sistema deductivo más perfilado, y equivalente al S_2, en el que la lógica de la identidad de clases se presente en forma de unas proposiciones iniciales suplementarias que se adjunten a la parte pura del mismo; en este sistema (que ocuparía demasiado espacio si quisiéramos exponerlo aquí) el único principio que se utilizaría para deducir las proposiciones contingentes que formasen sus pasos finales sería el principio lógico conocido como *principio de separación* o *modus ponendo ponens*, que afirma que a partir de dos proposiciones de formas respectivas p y «no, p y no-q» * puede deducirse la proposición de forma q. Y siempre cabe construir una deducción en un sistema deductivo mixto que sea equivalente a una deducción en cualquier sistema deductivo aplicado en el que no se disponga de otro principio para deducir proposiciones contingentes que este principio de separación. Así pues, tanto la lógica interna de las deducciones en la fase intermedia, «de matemáticas aplicadas», como la correspondiente a las de la fase final, «científica», son de una sencillez extrema, pues todas las deducciones difíciles se encuentran en la fase inicial o «de matemáticas puras».

---

[7] Véase más adelante, en las páginas 99 y sigs.

* Quizá fuese preferible decir, en castellano, «p y q no, no»; sin embargo, el parecido con la formulación simbólica adoptada internacionalmente sería así menor.—*N. del T.*

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Desglose del aparato matemático

El hecho de que las proposiciones de matemática pura que aparezcan en un sistema deductivo científico formen un subsistema independiente se refleja en la división que se hace en la mayoría de los tratados que exponen cualquier ciencia que esté organizada en forma de un sistema deductivo de cierto grado de complejidad (por ejemplo, la física, la genética que utiliza técnicas estadísticas y la psicología factorial): a saber, la división entre una sección matemática introductoria —en la que se presentan las doctrinas de las matemáticas puras que no pueden suponerse del dominio corriente, pero necesarias para el resto de la obra— y el cuerpo principal de ésta, en el que dichas matemáticas «se aplican» al asunto pertinente. En realidad, en la física moderna se precisa tal cantidad de matemáticas puras superiores que se ha advertido la conveniencia de escribir separadamente tratados matemáticos para que los físicos los tengan en sus estanterías como obras de consulta: estas obras, cuyo título es generalmente el de *Métodos de la física matemática*, no contienen, propiamente hablando, nada de física, sino que son compendios de matemática pura, cuya diferencia con otros tratados matemáticos reside únicamente en que omiten ramas de aquella disciplina que no han encontrado todavía aplicación física, y en que los teoremas matemáticos se demuestran de forma menos general de la que se necesitaría para satisfacer el sentido estético de un profesor de matemáticas puras. Todo científico que esté sacando las consecuencias de una hipótesis científica puede construir, pues, un sistema deductivo sin más que tomar de uno de tales libros las teorías matemáticas puras que precise e incorporarlas implícitamente como subsistema de su sistema deductivo mixto; y, si está dispuesto a admitir la validez de este subsistema apoyándose en la autoridad de los matemáticos puros, no necesita seguir todas las etapas de los razonamientos de éstos: lo único que necesita hacer en forma explícita, realmente, es escoger, en su *Métodos de la física matemática*, *Métodos estadísticos para biólogos*, o lo que sea, los teoremas de que haya menester directamente para aplicarlos a su asunto. Por consiguiente, sólo precisa tener los conocimientos matemáticos indispensables para saber manejarse en los tratados de matemáticas y entender los teoremas matemáticos que utilice: no es necesario que sea lo suficientemente buen matemático como para apreciar en lo que valgan las demostraciones, ni, menos aún, como para construir éstas *ab initio*.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

En la historia moderna de la ciencia física ha sido un hecho afortunado el que el científico que estaba construyendo un sistema teórico nuevo se haya encontrado siempre con que las matemáticas de que tenía necesidad para su sistema habían sido ya elaboradas por matemáticos puros para su propio recreo: así, Einstein tuvo a mano al desarrollar la relatividad general (1915) la geometría no euclidiana de Riemann (1854) y el cálculo tensorial de Ricci (1887), y la multiplicación no conmutativa que utilizó la mecánica cuántica (1925-27) estaba ya presta desde que se estudiaron las matrices de Cayley (1858) y los métodos operativos para resolver ecuaciones diferenciales (Boole, 1844). Los biólogos modernos no han sido tan afortunados, y han tenido que excogitar por sí mismos la mayor parte de la estadística matemática que precisaban. Es tentador ponerse a especular sobre los progresos que hubieran hecho los griegos en mecánica si hubiesen conocido el álgebra, o sobre la rapidez con que habría avanzado la física en el siglo XVII si el cálculo infinitesimal se hubiese descubierto cuando despuntaba, y no hacia su final. Parece que la moraleja para los hombres de Estado es que en un «planeamiento» científico correcto habría que dotar a los matemáticos puros con cincuenta años de prioridad con respecto a los científicos.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

CAPITULO TERCERO

La condición de los términos teoréticos de una ciencia

Hemos expuesto en el último capítulo la función que desempeñan en la ciencia los sistemas deductivos explicando primero la noción de cálculo como juego con marcas trazadas en un papel y haciendo ver, después, cómo cabe interpretar semejante cálculo de modo que represente un sistema deductivo en el que las conclusiones sean proposiciones contrastables por medio de la observación. Podría perfectamente objetarse a este método de exposición que complica las cuestiones, pues para discutir la lógica de la ciencia sería innecesario en absoluto introducir la noción de cálculo: sólo sería esencial la de sistema deductivo, que cabría entender a la perfección considerando las relaciones lógicas existentes entre sus proposiciones, mientras que las fórmulas mediante las que pudieran expresarse éstas y las reglas con arreglo a las cuales cupiese ejecutar las jugadas de este cálculo-juego carecerían absolutamente de importancia. Por ejemplo, sería posible describir el sistema deductivo dado en las páginas 55 y sigs. como interpretación del Segundo cálculo presentando sus seis proposiciones iniciales, haciendo observar que tres de ellas son contingentes y las otras tres lógicamente necesarias y señalando que los dos principios de deducción utilizados —el principio aplicativo y el que afirma que cuanto sea verdad de una clase es verdad de una clase idéntica a ella— permiten extraer ciertas conclusiones contingentes. La ciencia, podría decirse, se ocupa de proposiciones, no de las expresiones de ellas: no tiene la menor trascendencia que un científico escriba en inglés o en francés, o que utilice notaciones geométricas o algebraicas para expresar sus proposiciones; y habría de exponer su método de deducir consecuencias observables a partir de hipótesis generales sin aducir semejantes minucias.

Si nos encontrásemos en el caso de que fuese posible entender primero por sí misma cada una de las cláusulas que apareciesen en

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

cualquier tratado científico y considerarla luego en sus relaciones lógicas con los significados de las otras cláusulas, esta crítica sería perfectamente válida, y podríamos someter a discusión la lógica de la ciencia teniendo a la vista únicamente las proposiciones expresadas por tales cláusulas y pasando por alto estas mismas. Naturalmente, tendríamos que emplear cláusulas (u otros símbolos equivalentes) para expresar aquellas proposiciones y sus relaciones mutuas, pero dichas cláusulas serían «transparentes» —valiéndonos de una metáfora de Bertrand Russell—: las «usaríamos», pero no las «mencionaríamos» (por emplear una distinción de W. V. Quine). Mas dista mucho de ocurrir que sea posible entender cada una de las cláusulas de la ciencia por sí misma, como dotada de un sentido directo. Fijémonos, así, en un ejemplo relativamente sencillo de la física contemporánea: «todo átomo de hidrógeno consta de un protón y un electrón»; aun dando por supuesto que la expresión «átomo de hidrógeno» tuviese un significado llano e inmediato, susceptible de ser captado por sí mismo, no cabe pretender que sea posible una comprensión adecuada de las palabras «electrón» y «protón» sin hacer referencia al sistema deductivo de la física en que aparezcan las proposiciones que se expresen por medio de ellas; pueden tener un significado independiente si entendemos «significado» en cierto sentido subjetivo —puedo pensar en un electrón como en una esfera diminuta, y en un protón como en otra esferilla minúscula con mayor masa que la anterior—, pero ésta no es la forma en que se utilizan en un tratado de física: en éste se emplean como símbolos de un cálculo que ha de interpretarse como sistema deductivo aplicado, y no se entienden como si tuvieran significado alguno estando aparte del lugar que ocupen en tal cálculo.

Lo que sucede en una ciencia abstracta es que, como en toda inferencia, hacemos uso de un cálculo que interpretamos como sistema deductivo, pero no que interpretemos aquél otorgando un significado a cada una de sus fórmulas separadamente: concedemos un significado directo a las fórmulas del cálculo que admitamos representen proposiciones acerca de entidades observables, e indirecto a las demás fórmulas —como representantes de proposiciones de un sistema deductivo en el que las proposiciones observables constituyan las conclusiones—. Así pues, no interpretamos el cálculo todo de un golpe —por expresarnos de este modo—, sino que lo hacemos primero con su parte final y vamos avanzando después hacia el comienzo. Como símil del ajuste de un sistema deductivo a un cálculo es mejor un cierre de cremallera que la medición de una varilla superponiendo simultáneamente sus extremos sobre los trazos de una regla graduada: de

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

esta suerte construiremos un cálculo destinado a representar una teoría eléctrica de tal modo que sus fórmulas finales expresen proposiciones acerca de destellos luminosos observables o de lecturas de agujas indicadoras en aparatos de medida —como en un cierre de cremallera, cada lado estará perfectamente sujeto a un extremo—, pero sus fórmulas precedentes acerca de campos de fuerzas, de funciones de onda, de electrones y de otros *conceptos teoréticos* (según vamos a llamarlos) se ajustarán sobre el sistema deductivo de un modo derivado, en virtud del lugar que ocupen en éste, y daremos un significado a las expresiones «vector del campo eléctrico», «electrón», etc., a base de su aparición en tales fórmulas.

Este carácter indirecto del significado que poseen los términos teoréticos de toda ciencia plantea inmediatamente al filósofo científico el problema acerca de cómo sea posible otorgar este significado indirecto. En cuanto filósofo no puede contentarse con decir que aparecen en «ecuaciones matemáticas» y no tener en cuenta el modo que éstas tengan de significar [1], ni considerarse satisfecho diciendo que los términos teoréticos son «meros símbolos» a los que da sentido exclusivamente su relación mutua [2]: pues aunque estas relaciones desempeñarán, sin duda, un gran papel en la determinación de su significado, la experiencia tiene que incidir, de un modo u otro, sobre dicha determinación; ya que, si no ocurriera así, estos símbolos no representarían en modo alguno conceptos empíricos, y lo que tomamos por física resultaría no ser otra cosa que matemática pura. La cuestión está en el modo en que sea también concepto empírico un concepto teorético tal como el de electrón, y no cabe responder a ella negando con carácter absoluto que éste sea un concepto empírico.

Bertrand Russell, con su doctrina de las «construcciones lógicas» [3],

---

[1] Sir WILLIAM DAMPIER escribía en 1944: «Han desaparecido las últimas huellas del antiguo átomo, duro y másico; han fracasado sus modelos mecánicos y los conceptos últimos de la física han ido a parar, según parece, a la decorosa oscuridad de las ecuaciones matemáticas» (*A Shorter History of Science* [Cambridge, 1944], página 154). Mas un filósofo no puede permitir que la oscuridad sea decorosa, especialmente cuando ésta no es la de las matemáticas puras que entren en juego (que son abstrusas, pero no oscuras), sino la de la aplicación de la matemática.

[2] Como le ocurría a SIR ARTHUR EDDINGTON: «Jamás llegó a descubrir lo que sea el carbono; es siempre un símbolo... El carbono es un símbolo sólo definible a base de otros símbolos pertenecientes al esquema cíclico de la ciencia». *(The Nature of the Physical World* [Cambridge, 1928], pág. 269 [versión castellana, *La naturaleza del mundo físico,* Buenos Aires, Edit. Sudamericana, 1945, pág. 311.— *N. del T.*].)

[3] «La máxima suprema en el filosofar científico es ésta: *siempre que sea posible se han de sustituir las entidades inferidas por construcciones lógicas*». *(Mysticism*

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

dio a tal cuestión una respuesta explícita que se encontraba implícita en los escritos de muchos filósofos de la ciencia, como Mach y Karl Pearson. Según esta tesis, los electrones son construcciones lógicas llevadas a cabo a partir de los acontecimientos observados y los objetos mediante los que quepa detectar su presencia; lo cual equivale a decir que es posible definir explícitamente «electrón» a base de dichas observaciones. Para esta tesis, pues, se puede traducir —sin pérdida de significado— toda cláusula que contenga la palabra «electrón» a otra en la que aparezcan solamente palabras que denoten entidades (acontecimientos, objetos, propiedades) directamente observables; esta traducción podrá ser muy difícil de realizar, pero es siempre posible, y será asunto del filósofo de la ciencia el hacer patente la forma de llevar a cabo tales traducciones y mostrar así de qué modo quepa definir explícitamente los términos teoréticos de una ciencia por medio de entidades observables. Como es natural, no se pretende que el filósofo de la ciencia vaya a definir términos determinados de ninguna ciencia determinada, pero sí que describa la manera en que podrían definirse —descripciones que pueden ser diferentes para clases distintas de términos teoréticos o para los correspondientes a ciencias distintas.

Esta opinión de que la condición de los términos teoréticos es la de «construcciones lógicas» ha sufrido la crítica de F. P. Ramsey, que construyó un ejemplo de sistema deductivo aplicado muy sencillo para hacer visible su crítica [4]. Por mi parte, he logrado construir ejemplos todavía más sencillos, y dedicaremos la mayor parte del resto del capítulo a su estudio. Aun cuando mis ejemplos y la mayoría de las cosas que voy a decir acerca del modo en que elucidan el funcionamiento de las teorías no proceden de Ramsey, la crítica principal de la tesis citada —a saber, que si los términos teoréticos de una teoría se construyeran lógicamente a partir de entidades observables aquélla no sería susceptible de modificación alguna destinada a explicar tipos nuevos de hechos— es la de aquel autor, y mi exposición sirve solamente para perfilarla.

---

and Logic and other essays [Londres, 1918], pág. 155 [versión castellana, *Misticismo y lógica y otros ensayos*, Buenos Aires, Paidós, 1951, pág. 155].)

[4] En «Theories» (1929), trabajo publicado póstumamente en *The Foundations of Mathematics and other logical essays* (Londres, 1931), págs. 212 y sigs.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Las teorías de «factores» como ejemplos

Para hacer visible nuestra crítica nos valdremos de teorías que expliquen las generalizaciones empíricas —que asocian la aparición de una propiedad con la de otra— introduciendo «factores» teóricos inobservables, que darían razón de semejantes generalizaciones. Construiremos teorías demasiado sencillas para poder ser explicativas en ninguna rama de la ciencia, pero que tendrán la máxima simplicidad compatible con la posibilidad de explicar fenómenos complicados como resultado de las combinaciones de un número limitado de átomos —o de otros factores—: teorías que desempeñan un gran papel en genética y en la psicología de los «factores de la inteligencia», así como en química y en física. Utilizaremos en estos ejemplos un aparato deductivo consistente sólo en el del álgebra booleana, que es un tipo de matemáticas particularmente sencillo; en cuanto a los cálculos y los sistemas deductivos de que nos ocuparemos sobre todo, serán los que hemos expuesto ya en el último capítulo.

En los dos cálculos allí presentados partíamos de tres fórmulas iniciales,

$$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \longleftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda),$$

y en ambos aparecían como fórmulas derivadas las tres siguientes:

$$(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma(\alpha\beta)), \quad (\beta\gamma) \longleftrightarrow (\alpha(\beta\gamma)), \quad (\gamma\alpha) \longleftrightarrow (\beta(\gamma\alpha)).$$

En los dos sistemas deductivos que hemos presentado como interpretaciones de estos cálculos otorgamos un significado a los símbolos de éstos de modo que las fórmulas que acabamos de reproducir tuvieran idéntica interpretación en uno y otro sistema deductivo, interpretaciones que vamos a repetir ahora para facilitar la lectura (las letras mayúsculas *A*, *B*, *C*, ... representan propiedades empíricas):

$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu)$	representa	Todo lo que sea *A* es también *L* y *M*, y viceversa;	$[p_1]$
$\beta \longleftrightarrow (\mu\nu)$		Todo lo que sea *B* es también *M* y *N*, y viceversa;	$[p_2]$
$\gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda)$		Todo lo que sea *C* es también *N* y *L*, y viceversa;	$[p_3]$
$(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma(\alpha\beta))$		Todo lo que sea *A* y *B* es también *C*;	$[q_1]$
$(\beta\gamma) \longleftrightarrow (\alpha(\beta\gamma))$		Todo lo que sea *B* y *C* es también *A*;	$[q_2]$
$(\gamma\alpha) \longleftrightarrow (\beta(\gamma\alpha))$		Todo lo que sea *C* y *A* es también *B*,	$[q_3]$

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

En ambos sistemas deductivos las tres primeras proposiciones son las únicas proposiciones iniciales contingentes: en S_1 no hay otras proposiciones iniciales, mientras que en S_2 existen, además, tres proposiciones iniciales lógicamente necesarias; y si llamamos *premisas* sólo a proposiciones contingentes, estas tres a que nos estamos refiriendo (p_1, p_2 y p_3) son las únicas premisas que se requieren para deducir las tres últimas (q_1, q_2 y q_3); pues éstas se siguen lógicamente —como todas las demás proposiciones de S_1 y todas las de la parte impura de S_2— de la conyunción de las tres premisas. Las seis proposiciones que acabamos de reproducir son, por otra parte, proposiciones generales, y podemos decir, en el lenguaje del capítulo primero, que q_1, q_2 y q_3 son hipótesis de nivel inferior al de p_1, p_2 y p_3; mas como en este capítulos nos incumbe solamente la relación que haya entre las proposiciones p y las q, llamaremos simplemente a las primeras *las hipótesis*, y a las últimas *las generalizaciones empíricas*. En beneficio de la sencillez utilizaremos el Segundo cálculo del capítulo precedente (y una ligera modificación del mismo), así como el sistema deductivo S_2 (o una leve modificación suya) como interpretación de aquél.

En la exposición que hicimos en el capítulo anterior interpretamos los cálculos confiriendo directamente significado a cada uno de los seis símbolos α, β, γ, λ, μ y ν; pero ello no es posible en la situación con que nos encontramos en una ciencia adelantada tal como la física: en estos casos se concede significado directo únicamente a algunos de los símbolos que han de tener significación empírica, y el de los demás es sólo indirecto.

Una teoría «trifactorial»

Con objeto de ver cómo es posible tal cosa, consideremos ahora la forma en que puede interpretarse un cálculo sin conferir directamente un sentido a cada uno de sus símbolos.

Supongamos que existan tres propiedades observables, *A*, *B* y *C*, a cuyo respecto se haya averiguado mediante experimentos u observaciones que se cumplen las dos generalizaciones empíricas siguientes:

q_1 Todo lo que sea *A* y *B* es también *C*, y
q_2 Todo lo que sea *B* y *C* es también *A*.

Vamos a tratar ahora de explicar estas generalizaciones mediante una teoría científica, es decir, a tratar de encontrar hipótesis de las que quepa deducirlas. Probemos con una teoría que las explique in-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

troduciendo tres propiedades teoréticas, L, M y N, tales que la aparición de cada una de las propiedades observables A, B y C esté vinculada a la presencia conjunta de dos o tres de estos factores teoréticos; esto equivale a proponer las tres hipótesis

p_1 Todo lo que sea A es también L y M, y viceversa;
p_2 Todo lo que sea B es también M y N, y viceversa;
p_3 Todo lo que sea C es también N y L, y viceversa.

Pero estas tres hipótesis son las premisas de los dos sistemas deductivos del último capítulo, y en ambos sistemas las generalizaciones se siguen lógicamente a partir de las hipótesis tomadas conjuntamente; por tanto, la teoría que las contenga servirá de explicación de las generalizaciones empíricas.

La teoría, sin embargo, no sólo explica lo conocido, sino que predice lo aún no conocido; pues de dichas hipótesis se sigue una tercera generalización empírica, a saber,

q_3 Todo lo que sea C y A es también B,

que cabe someter al contraste de la observación o del experimento; en caso de que se confirme, apoya a la teoría, pero si la experiencia la refuta la teoría queda descartada. Y podría muy bien haber ocurrido que el científico no hubiese pensado en esta generalización empírica si no hubiera pasado por la etapa de construir una teoría que diese razón de las generalizaciones empíricas que había descubierto.

La teoría se vale de los tres factores L, M, y N. ¿De qué naturaleza son? Si son observables directamente no hay problema: se admitirá que los símbolos λ, μ y ν están, respectivamente, en el cálculo que represente el sistema deductivo, en lugar de la clase de las L, la de las M y la de las N, del mismo modo que se admite que α, β y γ están, respectivamente, en lugar de la clase de las A, la de las B y la de las C. Pero puede suceder que no sean directamente observables, que sea menester «suponerlos», «asumirlos» o «introducirlos» con objeto de «explicar» o «dar razón de» las generalizaciones empíricas que, según hemos averiguado, se cumplen en lo que respecta a las propiedades observables A, B y C. Entonces, ¿cuál es la condición de L, M y N? O —por decirlo con mayor precisión— ¿cómo se les da significado a los símbolos de un cálculo que represente el sistema deductivo de la teoría?

La primera respuesta que se le ocurre a uno es que los símbolos λ, μ y ν tendrán que *definirse* a base de los significados que tengan α, β y γ: en este caso los factores L, M y N, en cuyo lugar se encuen-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

tran aquellos primeros símbolos, resultarán ser lo que Rusell llama *construcciones lógicas* a partir de *A*, *B* y *C*.

Si queremos someter a examen esta contestación lo primero que hay que hacer es ponerse en claro sobre lo que se quiere decir en este contexto con la palabra «definición». Puesto que siempre se define un símbolo (el *definiendum)* a base del *significado* de otro (el *definiens)*, no es posible explicar la definición haciendo referencia solamente a un cálculo sin interpretar, esto es, a un cálculo que se considere independientemente de su interpretación. Pero tanto en el Primer cálculo como en el Segundo, que contienen una regla de sustitución de flecha doble, se puede interpretar toda fórmula en que exista un elemento primitivo que aparezca solo, o bien como elemento derecho o bien como elemento izquierdo —y que no aparezca también en el otro elemento de la fórmula—, pensando que proporciona una definición de dicho elemento primitivo a base del significado del otro miembro de la fórmula (con tal de que éste tenga ya un significado): pues dos símbolos son *universalmente sinónimos* cuando cabe siempre sustituir uno de ellos por el otro en cualquier cláusula en que aquél aparezca sin que varíe el significado de ésta, y, por consiguiente, si sabemos cuál es el significado del segundo símbolo pero desconocemos el del primero, el hecho de la sinonimia universal nos permitirá definir éste a base de aquél. Ahora bien, la regla de sustitución de flecha doble nos autoriza para sustituir en cualquier fórmula del cálculo el elemento izquierdo de una fórmula por el derecho, y viceversa, de modo que los elementos derecho e izquierdo de toda fórmula del cálculo son *sinónimos dentro de éste;* y en caso de que a uno de ellos no se le haya dado interpretación por el momento, no hay dificultad en que lo definamos como el significado del otro elemento. Desde luego, si se les ha otorgado un significado a ambos elementos es posible que sean sinónimos dentro del cálculo sin serlo fuera y, por tanto, sin ser universalmente sinónimos. Así, en caso de que θ y φ representen dos clases idénticas entre sí (es decir, si ambos representan la misma clase), estos símbolos serán sinónimos dentro de un cálculo que tenga una regla de sustitución de doble flecha si es que contiene, además, la fórmula $\theta \underset{\longleftrightarrow}{} \varphi$ que representa dicha identidad; pero en caso de que θ represente la clase de los animales racionales y φ la de los bípedos implumes, θ y φ no serán universalmente sinónimos, ya que la proposición de que yo soy un animal racional (esto es, la de que soy un miembro de la clase de los animales racionales, proposición que no es expresable dentro de este cálculo) no es la misma que la proposición de que soy un bípedo implume. Sin embargo, cuando no se ha

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

dado significado a un elemento primitivo del cálculo, un método de hacerlo es utilizar una fórmula de éste en que aquél aparezca sólo como elemento izquierdo o como elemento derecho, y definirlo como significado del elemento que constituya el otro miembro de la fórmula; entonces la regla de sustitución de flecha doble del cálculo garantizará la sinonimia dentro de éste del *definiendum* y el *definiens*.

Llamaremos *fórmula definitoria de θ* a toda fórmula que puede utilizarse para sacar de ella una definición del elemento primitivo θ. En todos los cálculos de que nos vamos a ocupar, toda fórmula en que θ constituya la totalidad del elemento izquierdo (o del derecho) y no aparezca en el elemento derecho (o el izquierdo) es fórmula definitoria de θ. No puede emplearse para definir θ una fórmula definitoria de este símbolo a menos que se haya dado ya significado al otro miembro de la misma, de modo que una fórmula definitoria sólo algunas veces es una fórmula que define.

Por ejemplo, si en nuestros cálculos Primero o Segundo admitimos que λ, μ y ν representan, respectivamente, la clase de los cuadriláteros planos, la clase de las figuras planas equiláteras y la de las figuras equiángulas, podemos admitir que las tres fórmulas iniciales,

$$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \longleftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda)$$

nos definen α, β y γ: α quedará definida como designación de la clase de los rombos (cuadriláteros planos equiláteros), β de la clase de las figuras regulares (figuras planas equiláteras y equiángulas) y γ de la clase de los rectángulos (cuadriláteros planos equiángulos). En cuanto a las fórmulas derivadas, expresarán las proposiciones según las cuales todos los rombos regulares son rectangulares, todos los rectángulos regulares son rombos y todos los rombos rectangulares son rombos: todas ellas son proposiciones lógicamente necesarias, que se siguen lógicamente de las proposiciones del sistema deductivo que corresponden a las definiciones de α, β y γ, o sea, de «rombo», de «figura regular» y de «rectángulo».

Mas lo que se necesita para que sea posible considerar los factores teoréticos como construcciones lógicas a partir de procesos observables es un proceso inverso a éste [5]: tenemos necesidad de definiciones de

[5] RUSSELL expresa esta condición de la siguiente forma: «La física presenta los datos sensoriales como funciones de objetos físicos, pero la verificación sólo es posible si cabe presentar éstos como funciones de aquéllos. Por consiguiente, tenemos que resolver las ecuaciones que expresen los datos sensoriales a base de los objetos físicos, con objeto de que, en lugar de tal cosa, nos expresen los objetos físicos a base de los datos sensoriales». (*Mysticism and Logic and other essays*, pág. 146 [versión castellana citada, págs. 146 y sig.].)

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

los símbolos λ, μ y ν que nos representen los factores teoréticos a base de las propiedades observables correspondientes, y precisamos, por tanto, tener fórmulas del cálculo en que λ, μ y ν aparezcan como elementos derechos (o izquierdos) solos. ¿Se puede extraer semejantes fórmulas definitorias?

Tanto en el caso del Primer cálculo como en el del Segundo la respuesta es negativa. Mas su negatividad no acaba enteramente con la cuestión: estos dos cálculos son sumamente sencillos, en el sentido de que sus reglas permiten solamente muy pocos tipos de jugadas, y, en realidad, al construirlos los he hecho todo lo sencillos posible dentro de cumplir la finalidad de explicar las relaciones entre los cálculos y los sistemas deductivos; de modo que, de hecho, su interpretación como sistemas deductivos aplicables a clases empíricas (la clase de las A, etc.) no incluye cuanto hay en la lógica de clases: existen proposiciones —acerca de las relaciones entre clases empíricas— que son consecuencia de las tres premisas dadas, pero que no pueden expresarse en ninguno de estos dos cálculos; y existen también verdades lógicas sobre las relaciones entre clases que, por ser inexpresables en el Segundo cálculo, no se encuentran en la parte pura de S_2. De ahí que tengamos una prometedora vía de ataque a este problema en la adjunción de reglas suplementarias a la parte algebraica de dicho cálculo, de suerte que ésta llegue a representar la totalidad, y no una mera parte, de la lógica de clases; y entonces podremos ver si en este cálculo modificado aparecen o no fórmulas que permitan la definición de λ, μ y ν. Construyamos, pues, un nuevo cálculo con dotación y reglas parecidas a las del Segundo cálculo, pero con dos modificaciones. En primer término, será preciso ampliar la definición de *elemento no primitivo* de modo que incluya un nuevo tipo, a saber, todo elemento que se obtenga añadiendo una prima, ′, tras cualquier elemento, ya sea primitivo o no primitivo: así pues, α', $(\alpha')'$, $(\alpha\beta)'$, $(\alpha'\beta')'$, etc., serán elementos del nuevo cálculo. La segunda modificación consistirá en introducir la fórmula

$$((\xi'\eta')'\,(\xi'\eta)')\longleftrightarrow\xi$$

en lugar de aquella otra más sencilla, $(\xi\xi)\longleftrightarrow\xi$, que se encontraba como fórmula inicial del Segundo cálculo (fórmula [4] de las tablas II y III), y que ahora aparecerá como fórmula derivada. Con tal de que se dé una interpretación a los elementos primados (es decir, a los dotados de una prima), puede interpretarse este nuevo cálculo exactamente de la misma forma que se interpretaba el Segundo cálculo como un sistema deductivo, S_2, y llegarse así al sistema deductivo S_3. Inter-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

pretaremos todo elemento primado de modo que se entienda representar la clase de las cosas carentes de la propiedad empírica que especifique la clase representada por el mismo elemento pero sin prima: esto es, cada elemento primado representará lo que se llama el *complemento* de esta última clase. Así pues, si α representa la clase de las cosas dotadas de la propiedad A (brevemente, la clase de las A), α' representará las clases de las cosas carentes de esta propiedad (brevemente, la clase de las no-A).

En este sistema deductivo, S_3, que el nuevo cálculo representa, hay sitio para todas las proposiciones de la lógica de clases: la parte pura de S_3 forma un sistema deductivo puro y completo de esta lógica, que está representado por el cálculo algebraico que es parte del nuevo cálculo. Mas puesto que habremos de tomar en consideración otros cálculos dotados de la misma parte algebraica llamaremos *cálculo de Huntington* al cálculo algebraico cuyas fórmulas iniciales sean

$$((\xi'\eta')' \ (\xi'\eta)') \longleftrightarrow \xi, \quad (\xi\eta) \longleftrightarrow (\eta\xi), \quad (\xi(\eta\zeta)) \longleftrightarrow ((\xi\eta)\zeta),$$

y cuyas reglas de juego sean la de sustitución de flecha doble y la de sustitución de variables [6]; y, por ello, podremos considerar el nuevo cálculo, que representa al sistema S_3, como un cálculo de Huntington con adjunción de las tres fórmulas iniciales sin variables

$$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \longleftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda).$$

Preguntemos ahora si es posible extraer en este cálculo fórmulas en que λ, μ y ν se encuentren, solos, formando elementos izquierdos (o derechos). La respuesta sigue siendo negativa. Pero puesto que el nuevo cálculo representa un sistema deductivo que contiene la totalidad de la lógica de clases, podemos preguntar no en vano si es posible añadirle fórmulas iniciales suplementarias del tipo pedido —que contengan λ, μ y ν —que no afecten a las fórmulas del cálculo que no contengan estos elementos; o sea, que no permitan extraer en este cálculo más fórmulas en que no aparezcan λ, μ y ν que las que podrían

[6] Las tres fórmulas iniciales y la dotación de este cálculo son equivalentes al «conjunto simplificado de postulados» para el álgebra booleana publicado por E. V. HUNTINGTON en *Mind*, n. s., vol. 42 (1933), págs. 203 y sigs.; para una demostración de que este cálculo representa un sistema deductivo completo de clases véase también E. V. HUNTINGTON, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 35 (1933), págs. 274 y sigs. y 557 y sigs.; sin embargo, la forma en que yo lo expongo, a base de un cálculo como juego con símbolos, difiere de la manera en que lo trata HUNTINGTON, que es la tradicional matemática. Este autor formuló muchos conjuntos de postulados para el álgebra de Boole, y el de 1933, que yo utilizo aquí, es enteramente distinto que su famoso «primer conjunto de postulados», publicado en 1904.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

extraerse si no se hubiesen añadido las fórmulas iniciales suplementarias. Pues, en caso de que podamos hacer tal cosa, podremos definir λ, μ y ν de un modo que no esté fijado necesariamente por su utilización en el cálculo interpretado como sistema S_3, sino que deje como estaba, sin perturbación alguna, el resto de las fórmulas que se puedan extraer en el cálculo; por consiguiente, en lo que respecta al funcionamiento de éste, las nuevas fórmulas iniciales serán *ociosas*.

Cabe encontrar tales fórmulas ociosas [7]: se las puede expresar en la forma más general con ayuda de los elementos θ, φ y ψ, cada uno de los cuales puede interpretarse como representante de cualquier clase, sin distinción [8]. Entonces, las fórmulas ociosas son

$$\lambda \longleftrightarrow ((\gamma'\alpha')\ \ (\beta'(\theta'(\varphi\psi)))')',$$
$$\mu \longleftrightarrow ((\alpha'\beta')\ \ (\gamma'(\theta(\varphi'\psi)))')',$$
$$\nu \longleftrightarrow ((\beta'\gamma')\ \ (\alpha'(\theta(\varphi\psi')))')'.$$

Podemos escribirlas de una manera más sencilla si introducimos en el cálculo de Huntington el nuevo símbolo $\cup$ —admitiendo que todo par de elementos con dicho símbolo entre ellos y encerrados en su conjunto entre paréntesis, por ejemplo, $(\alpha \cup \beta)$, $(\alpha \cup (\alpha \cup (\beta\gamma')'))$, etc., sea un elemento del cálculo— y añadimos la fórmula inicial

$$(\xi \cup \eta) \longleftrightarrow (\xi'\eta')',$$

que servirá para definir $(\alpha \cup \beta)$ a base del significado de $(\alpha'\beta')'$. Dado que el sistema S_3 interpreta $(\alpha'\beta')'$ como representante del complemento de la intersección del complemento de la clase de las A con el complemento de la clase de las B, que es lo mismo que la clase cuyos miembros sean miembros de la clase de las A o de la clase de las B (o de ambas), podemos emplear esta interpretación para definir $(\alpha \cup \beta)$ como representante de la clase llamada *unión, reunión* o *suma lógica* de las dos clases representadas por α y por β. La introducción del nuevo símbolo $\cup$ por medio de la nueva fórmula inicial $(\xi \cup \eta) \longleftrightarrow (\xi'\eta')'$ no tiene más significación que la de abreviar las fórmulas, y por ello seguiremos llamando simplemente «cálculo de Huntington» al cálculo

[7] En el lenguaje del álgebra ordinaria este problema es el de resolver el conjunto de las tres «ecuaciones simultáneas» $\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu)$, $\beta \longleftrightarrow (\mu\nu)$ y $\gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda)$ para λ, μ y ν. En A. N. WHITEHEAD, *Universal Algebra* (Cambridge, 1898), págs. 79 y sig., se encontrará la solución general que aquí damos, juntamente con otras formas de resolverlo; las fórmulas derivadas $(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma(\alpha\beta))$, $(\beta\gamma) \longleftrightarrow (\alpha(\beta\gamma))$ y $(\gamma\alpha) \longleftrightarrow (\beta(\gamma\alpha))$ forman, en su lenguaje, la «resultante» de «eliminar» λ, μ y ν del conjunto dado de ecuaciones simultáneas.

[8] Los elementos θ, ϕ y ψ no son variables, ya que no se les aplica la regla de sustitución de variables.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

de este tipo que utilizaremos de ahora en adelante con esta cuarta fórmula inicial suplementaria.

En este cálculo es posible presentar las fórmulas ociosas así:

$$\lambda \longleftrightarrow ((\gamma \smile \alpha) \smile (\beta'(\theta'(\varphi\psi)))),$$
$$\mu \longleftrightarrow ((\alpha \smile \beta) \smile (\gamma'(\theta(\varphi'\psi)))),$$
$$\nu \longleftrightarrow ((\beta \smile \gamma) \smile (\alpha'(\theta(\varphi\psi')))),$$

siendo θ, φ y ψ elementos cualesquiera.

Nos hallamos ahora en la situación siguiente: 1) en el cálculo de Huntington al que se han añadido las fórmulas iniciales carentes de variables $\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu)$, $\beta \longleftrightarrow (\mu\nu)$ y $\gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda)$, es posible extraer las fórmulas

$$(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma(\alpha\beta)), \quad (\beta\gamma) \longleftrightarrow (\alpha(\beta\gamma)), \quad (\gamma\alpha) \longleftrightarrow (\beta(\gamma\alpha));$$

2) en este mismo cálculo no se pueden extraer fórmulas en las que λ, μ o ν se encuentren formando, por sí solas, el elemento izquierdo (o el derecho); 3) si a este cálculo se le adjuntan como fórmulas iniciales las tres fórmulas ociosas, ello no nos permite extraer fórmula alguna en que sólo aparezcan α, β o γ como elementos primitivos y que no fuese extraíble antes de dicha adjunción, y 4) en el cálculo de Huntington ampliado —en lo que respecta a fórmulas carentes de variables— mediante las tres fórmulas ociosas y las siguientes,

$$(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma(\alpha\beta)), \quad (\beta\gamma) \longleftrightarrow (\alpha(\beta\gamma)), \quad (\gamma\alpha) \longleftrightarrow (\beta(\gamma\alpha)),$$

es posible extraer las fórmulas [9]

$$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \longleftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda).$$

Si interpretamos estos cálculos como representantes de las relaciones existentes entre las hipótesis de la teoría y las generalizaciones empíricas, 3) hace ver que se dispone de fórmulas de tipo apropiado para definir los términos teoréticos por medio de las propiedades observables, mientras que 1) y 4) juntas nos indican que, en caso de que sea posible llevar a cabo tal definición mediante dichas fórmulas, las hipótesis de la teoría serán lógicamente equivalentes a las generalizaciones empíricas, ya que cada uno de estos conjuntos sería deductible del otro.

---

[9] El proceso de extracción es demasiado largo para que hagamos aquí otra cosa que indicarlo. Utilizando las fórmulas ociosas del cálculo de Huntington podemos reducir el desarrollo de $(\lambda\mu)$ a $(\alpha \smile (\beta\gamma))$; y de aquí, dado que $(\beta\gamma) \longleftrightarrow (\alpha(\beta\gamma))$,

$$(\lambda\mu) \longleftrightarrow (\alpha \smile (\alpha(\beta\gamma)));$$

de donde $(\lambda\mu) \longleftrightarrow \alpha$.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

UN DIAGRAMA ESPACIAL DE LA TEORÍA TRIFACTORIAL

Tal vez sea útil explicar la situación en que nos hallamos de una forma más concreta, valiéndonos de un diagrama. Puesto que estamos interpretando todos los cálculos que nos conciernen ahora como sistemas deductivos que se ocupan de relaciones entre clases, y puesto que cabe ejemplificar éstas mediante diagramas espaciales, podemos decir lo que pretendemos de un modo menos abstracto refiriéndonos a un diagrama apropiado [10].

Supongamos que, con referencia a la figura 2, damos significado a los elementos primitivos de nuestros cálculos del modo siguiente:

α designará la clase de los puntos situados en o en el interior del rombo *afde*;

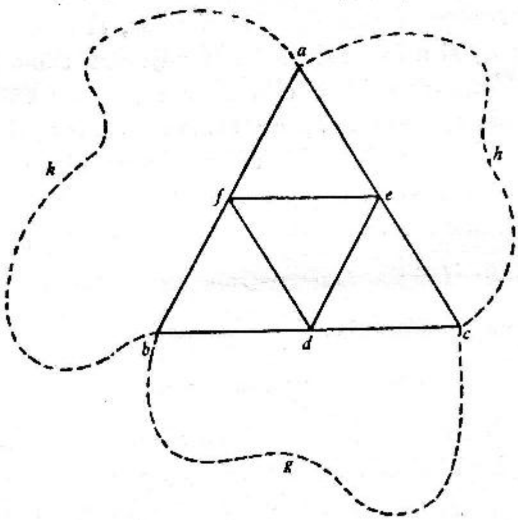


Fig. 2.

β designará la clase de los puntos situados en o en el interior del rombo *bdef*;

γ designará la clase de los puntos situados en o en el interior del rombo *cefd*.

Entonces, $(\alpha\beta)$ representará la clase de los puntos que a la vez estén situados en el rombo *afde* o en su interior y en el rombo *bdef* o en su

[10] No entran en juego las propiedades *métricas* de las figuras espaciales que dibujemos.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

interior, esto es, la clase de los puntos situados en el triángulo *def* o en su interior.

$(\gamma(\alpha\beta))$ representará la clase de los puntos que estén a la vez en el rombo *cefd* o en su interior y en el triángulo *def* o en su interior; es decir, la clase de los puntos que se encuentran en el triángulo *def* o en su interior.

Análogamente, tanto $(\beta\gamma)$ como $(\alpha(\beta\gamma))$, $(\gamma\alpha)$ y $(\beta(\gamma\alpha))$ representarán, cada uno de ellos, la clase de los puntos que se encuentran en el triángulo *def* o en su interior.

Por otra parte, la figura se ha dibujado de tal modo que la zona de solapamiento de cada par de rombos cae dentro del tercer rombo; relaciones que se expresan por las fórmulas

$$(\alpha\beta)\longleftrightarrow(\gamma(\alpha\beta)),\quad (\beta\gamma)\longleftrightarrow(\alpha(\beta\gamma)),\quad (\gamma\alpha)\longleftrightarrow(\beta(\gamma\alpha)),$$

que corresponden a las generalizaciones empíricas que nos proponemos explicar mediante nuestra teoría científica.

Al aplicar ésta al diagrama se deducen estas relaciones a partir de las existentes entre cada uno de los rombos tomado separadamente y otras tres figuras espaciales que corresponden a λ, μ y ν. En el diagrama dibujado,

supondremos que λ designa la clase de los puntos situados en la figura *hafdc* o en su interior;

supondremos que μ designa la clase de los puntos situados en la figura *kbdea* o en su interior, y

supondremos que ν designa la clase de los puntos situados en la figura *gcefb* o en su interior.

Entonces, $(\lambda\mu)$ representa la clase de los puntos que se encuentren a la vez en la figura *hafdc* o en su interior y en la *kbdea* o en su interior: o sea, la clase de los puntos situados en el rombo *afde* o en su interior; y, de modo parecido, $(\mu\nu)$ representa la clase de los puntos situados en el rombo *bdef* o en su interior, y $(\nu\lambda)$ la clase de los puntos situados en el rombo *cefd* o en su interior.

Tomadas juntamente, las fórmulas $\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu)$, $\beta \longleftrightarrow (\mu\nu)$ y $\gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda)$, que corresponden a las hipótesis de la teoría, expresan el hecho de que el solapamiento de cada pareja de figuras sea un rombo; y la teoría deduce, por consiguiente, el hecho de que cada pareja de rombos, al solaparse, caiga dentro del tercer rombo, a partir del hecho de que quepa considerar cada rombo como resultado del solapamiento de dos de las tres figuras existentes.

En el diagrama puede advertirse que lo único que se necesita para que cada uno de los rombos pueda ser considerado como solapamien-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

to de dos figuras es que las porciones de éstas que se hallen fuera del triángulo *abc* (es decir, las zonas limitadas por los lados de este triángulo y la línea punteada) no se solapen entre sí: puesto que, por ejemplo, si la zona *haec* tuviera una parte común con la *kafb*, los puntos de esta región común serían miembros de la clase representada por $(\lambda\mu)$, y tendrían que serlo, por tanto, de la clase designada por α, todos cuyos puntos se encuentran en el triángulo *abc* o en su interior.

La indeterminación resultante en cuanto a las partes punteadas de los límites de las zonas correspondientes a λ, μ y ν se refleja en la aparición de los elementos θ, φ y ψ —cuya interpretación está indeterminada— en las fórmulas propuestas como definiciones posibles de λ, μ y ν a base de α, β y γ. La clase de los puntos situados en la parte de la zona correspondiente a λ que se encuentra fuera del triángulo *abc* quedará representada por $(\alpha'(\beta'(\gamma'(\theta'(\varphi\psi)))))$, la clase análoga para μ lo estará por $(\alpha'(\beta'(\gamma'(\theta(\varphi'\psi)))))$, y la correspondiente a ν por $(\alpha'(\beta'(\gamma'(\theta(\varphi\psi')))))$; y la intersección de las dos primeras de estas clases estará representada por $(\theta\theta')$, ya que en el cálculo de Huntington podemos extraer la fórmula

$$((\alpha'(\beta'(\gamma'(\theta'(\varphi\psi)))))(\alpha'(\beta'(\gamma'(\theta(\varphi'\psi))))))\longleftrightarrow(\theta\theta').$$

$(\theta\theta')$ representa la clase de las cosas que a la vez tengan y carezcan de la propiedad correspondiente a θ, y como no hay nada que a la vez posea esta propiedad y carezca de ella, dicha clase está vacía, esto es, no tiene miembros. Puede considerarse que todas las clases vacías constituyen una y la misma clase, puesto que $(\xi\xi') \longleftrightarrow (\eta\eta')$ es una fórmula que puede extraerse en el cálculo de Huntington; llamaremos *clase nula* a esta clase única, y la designaremos por *o* (al que designaremos como *elemento nulo)*. Cada una de las intersecciones de todas las parejas análogas de clases será asimismo la clase nula.

Parece ahora que hemos llegado a un punto muerto en nuestro intento de definir los símbolos λ, μ y ν, que han de representar nuestros conceptos teoréticos por medio de los símbolos α, β y γ, interpretables directamente en términos empíricos: es cierto que hemos conseguido encontrar fórmulas que nos permitan identificar las clases designadas por λ, μ y ν con clases construidas a partir de las designadas por α, β y γ, pero tales construcciones se valen de tres clases indeterminadas, que pueden ser cualesquiera. Y no se pueden imponer restricciones a estas últimas reforzando las fórmulas iniciales de la parte algebraica del cálculo (en la forma en que antes reforzamos el segundo cálculo), ya que el cálculo de Huntington representa la

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

totalidad de la lógica de clases y es, por tanto, todo el aparato lógico con que contamos para tratar nuestro objeto. Así pues, si expresamos la situación a la base de nuestro diagrama, nos encontramos con que las figuras que corresponden a λ, μ y ν están determinadas por los rombos correspondientes a α, β y γ sólo en lo que se refiere a las partes situadas sobre el triángulo *abc* —que corresponde a $(\alpha \cup (\beta \cup \gamma))$— o en su interior: fuera de este triángulo dichas figuras pueden tener cualesquiera tamaño y forma que queramos, con tal únicamente de que ninguna de ellas se solape con otra; es decir, si imaginamos que las líneas punteadas del diagrama, que constituyen los límites de estas zonas extratriangulares, están formadas por un hilo elástico, será posible estirarlas de cualquier modo que nos plazca sin que las relaciones entre las distintas zonas dentro del triángulo queden afectadas —siempre que aquéllas no se crucen entre sí.

Hay dos métodos que semejan fijar estas regiones extratriangulares de un modo menos arbitrario: o bien acordamos que sean todo lo grandes posible o bien todo lo pequeñas posible; de esta forma no nos libramos de la arbitrariedad, mas parece haber cierta justificación para esta manera de realizar la elección y, por tanto, para nuestra definición de λ, μ y ν.

El método por el cual lograríamos que una de estas zonas extratriangulares fuese todo lo mayor posible sería el de hacerla coextensa con la totalidad del plano menos el triángulo; entonces se trataría de la región correspondiente al elemento $(\alpha'(\beta'\gamma'))$. Pero puesto que no se permite que se solapen dos zonas, sólo una de ellas puede ser idéntica a la que acabamos de mencionar, y las otras dos tienen que desaparecer, ya que quedan algo así como expulsadas del espacio lógico disponible. Si λ va a representar la clase favorecida llegaremos a las fórmulas que especifiquen λ, μ y ν admitiendo que θ sea el elemento nulo, *o*, y que tanto φ como ψ sean su complemento, *o'*; lo cual nos permitirá extraer las fórmulas

$$\lambda \longleftrightarrow ((\gamma \cup \alpha) \cup \beta'), \quad \mu \longleftrightarrow (\alpha \cup \beta), \quad \nu \longleftrightarrow (\beta \cup \gamma).$$

Mas como λ, μ y ν aparecen de modo simétrico en las fórmulas

$$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \longleftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda)$$

que expresan las hipótesis de esta teoría, no hay razón alguna para hacer máxima una de ellas con preferencia a otra cualquiera.

La situación es diferente, sin embargo, si tratamos de conseguir que las regiones extratriangulares sean lo más pequeñas posible, ya que se puede hacer que se anulen las tres, lo cual corresponde a admi-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

tir que tanto θ como φ y ψ sean el elemento nulo, **o**. En este caso las zonas correspondientes a λ, μ y ν serían los trapecios ***afdc, bdea*** y ***cefb***, respectivamente, y haciendo iguales θ, φ y ψ al elemento nulo podemos extraer las fórmulas

$$\lambda \longleftrightarrow (\gamma \cup \alpha), \quad \mu \longleftrightarrow (\alpha \cup \beta), \quad \nu \longleftrightarrow (\beta \cup \gamma),$$

que son perfectamente simétricas en α, β y γ.

Ello parece ser exactamente lo que queríamos. Se pueden definir los símbolos λ, μ y ν mediante estas fórmulas a base de los significados de α, β y γ, con exclusión de todo otro concepto empírico, y es posible analizar los conceptos teoréticos designados por λ, μ y ν a base de propiedades observables, valiéndose del castellano normal, sin necesidad de ningún lenguaje simbólico: λ representa la clase de las *L*, siendo *L* la propiedad de ser *C* o *A* (o ambas), del mismo modo que ser un doctor es ser un médico o un cirujano, o ambas cosas. No hay ningún misterio en cuanto a la condición de *L*, *M* y *N*: estos factores aparecerán como construcciones lógicas de un tipo muy sencillo a partir de las propiedades observables *A*, *B* y *C*; y, además, su campo colectivo de aplicación será exactamente el mismo que el de *A*, *B* y *C* tomados colectivamente: la clase de las cosas que posean alguna o algunas de las propiedades *L*, *M* y *N* será la misma que la clase de las que tengan alguna o algunas de las propiedades *A*, *B* y *C*. Es cierto que sigue habiendo un elemento de arbitrariedad en la elección de *L*, *M* y *N*, ya que podrían haberse escogido otras propiedades más amplias sin afectar a su validez en la teoría científica; pero su elección como las mínimas propiedades que cumplan las condiciones que se les exigen podría quedar justificada por un principio metodológico de moderación: *entia explicantia non sunt amplificanda praeter necessitatem*.

Hemos visto que si en nuestro cálculo adoptamos las tres fórmulas correspondientes a las definiciones propuestas de λ, μ y ν como fórmulas iniciales en lugar de las fórmulas

$$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \longleftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda),$$

que representan las hipótesis de la teoría, y si añadimos como fórmulas iniciales las tres siguientes

$$(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma(\alpha\beta)), \quad (\beta\gamma) \longleftrightarrow (\alpha(\beta\gamma)), \quad (\gamma\alpha) \longleftrightarrow (\beta(\gamma\alpha)),$$

que representan las generalizaciones empíricas, en el cálculo modificado que así resulta podemos extraer las fórmulas que representan las hipótesis de la teoría. Esto equivale a decir que, si definimos de

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

este modo los términos teoréticos λ, μ y ν, las hipótesis de nuestra teoría serán lógicamente deductibles de las generalizaciones empíricas para explicar las cuales se las había propuesto; y como éstas son, desde luego, deductibles de aquéllas, semejante definición de los términos teoréticos hará que el conjunto de hipótesis sea lógicamente equivalente al de generalizaciones empíricas. El sistema deductivo conducente de las hipótesis a las generalizaciones sería reversible, y conduciría con igual facilidad de éstas a aquéllas.

A primera vista esta conclusión parece merecer la bienvenida; no obstante lo cual, una breve reflexión hace ver que si los términos teoréticos se definen de suerte que conviertan la teoría en algo lógicamente equivalente a los hechos que explica, ésta se transforma en una mera forma distinta de enunciar tales hechos: las hipótesis de la teoría se vuelven traducciones de las generalizaciones empíricas en lugar de explicaciones de ellas —en cualquier sentido de importancia de «explicación»—, y no se extienden más allá del limitado número de generalizaciones de partida: no sólo tienen exactamente el mismo campo de aplicación que éstas, sino que dicen exactamente las mismas cosas acerca de este campo. Por consiguiente, la definición de los términos teoréticos sacrificaría uno de los objetos principales de la construcción de cualquier teoría empírica, que es el de tener la posibilidad de ampliarla en el futuro, si se tiene ocasión, para explicar hechos acerca de cosas nuevas, incorporándola en una teoría más general cuyo campo de aplicación sea más extenso; cuestión que podemos poner de manifiesto perfectamente explicando cómo puede incorporarse una teoría «trifactorial» en una «cuadrifactorial».

Una teoría «cuadrifactorial»

Supongamos que se adviertan otras dos propiedades observables, D y E, a cuyo respecto se averigüe que se cumplen las dos generalizaciones siguientes:

Todo lo que sea A y D es también E, y
Todo lo que sea E y A es también D.

Es natural que intentemos explicarlas, no construyendo una teoría enteramente nueva, sino modificando la teoría trifactorial que ya teníamos: introduciríamos una cuarta propiedad teorética, R, tal que la aparición de D correspondiese a la presencia conjunta de R y de uno de los tres factores ya introducidos, y que la de E correspondiese a la presencia conjunta de R con otro de estos factores. Es fácil ver que si añadimos a las tres hipótesis de la teoría trifactorial las dos siguientes:

Todo lo que sea D es también L y R, y viceversa,
Todo lo que sea E es también M y R, y viceversa,

podemos deducir las nuevas generalizaciones empíricas. Por consiguiente, la adjunción de un factor adicional, R, a los tres factores, L, M y N, de la teoría original —el paso de una teoría trifactorial a una cuadrifactorial— da cuenta del modo más económico posible de las nuevas generalizaciones empíricas, y vincula éstas con las antiguas al construir una teoría en que todas ellas sean lógicamente deductibles.

En el cálculo de Huntington se puede representar el sistema deductivo de la teoría cuadrifactorial añadiendo las cinco fórmulas iniciales carentes de variables siguientes,

$$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \longleftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda), \quad \delta \longleftrightarrow (\lambda\rho), \quad \varepsilon \longleftrightarrow (\mu\rho),$$

en las que α, β, γ, δ y ϵ representarán, respectivamente, la clase de las A, la de las B, la de las C, la de las D y la de las E. En este cálculo modificado se pueden extraer las fórmulas

$$(\alpha\delta) \longleftrightarrow (\varepsilon(\alpha\delta)), \quad (\delta\varepsilon) \longleftrightarrow (\alpha(\delta\varepsilon)), \quad (\varepsilon\alpha) \longleftrightarrow (\delta(\varepsilon\alpha))$$

del mismo modo que se extraían las fórmulas análogas en la tabla I o en la II, y la primera y la tercera de ellas representan las generalizaciones empíricas que han dado origen a la teoría cuadrifactorial, mientras que la segunda representa una nueva generalización empírica,

Todo lo que sea D y E es también A,

generalización predicha por la teoría para que se la confirme o se la rechace empíricamente. Además, puesto que $((\mu\nu)(\lambda\rho)) \longleftrightarrow ((\nu\lambda)(\mu\rho))$ es una fórmula que puede extraerse en este cálculo, podemos sacar en él la fórmula

$$(\beta\delta) \longleftrightarrow (\gamma\varepsilon),$$

que representa la generalización empírica doble

Todo lo que sea B y D es también C y E, y viceversa,

fórmula que la teoría cuadrifactorial presenta también para que se la someta a contraste empírico. (Esta consecuencia ha constituido una sorpresa para mí: no habría pensado en ella si no me hubiese puesto

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

deliberadamente a buscar todas las conclusiones posibles deductibles de las cinco hipótesis de esta teoría.)

La teoría cuadrifactorial, sin embargo, no se limita a ofrecernos nuevas generalizaciones empíricas acerca de propiedades ya conocidas, sino que sugiere la posibilidad de que exista una nueva propiedad observable vinculada a las que conocíamos. En efecto: hemos introducido y supuesto los cuatro factores para que den razón de las relaciones existentes entre las cinco propiedades observables, considerando cada una de ellas como combinación de dos factores —de entre dichos cuatro—; en el cálculo que representa la teoría, las fórmulas iniciales, carentes de variables, que expresan las hipótesis,

$$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \longleftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda), \quad \delta \longleftrightarrow (\lambda\rho), \quad \varepsilon \longleftrightarrow (\mu\rho)$$

utilizan cinco combinaciones de las cuatro letras griegas λ, μ, ν y ρ tomadas de dos en dos; pero si paramos mientes en cuántas combinaciones posibles tienen estas cuatro letras tomadas de dos en dos, encontramos que existe una sexta, no empleada aún, que es la de ν con ρ. Por consiguiente, podemos modificar el cálculo que representa la teoría añadiendo una sexta fórmula inicial carente de variables:

$$\varkappa \longleftrightarrow (\nu\rho).$$

En este cálculo podrían extraerse las siguientes fórmulas que relacionan κ con α, β, γ, δ y ϵ:

$$(\beta\varepsilon) \longleftrightarrow (\varkappa(\beta\varepsilon)), \quad (\varepsilon\varkappa) \longleftrightarrow (\beta(\varepsilon\varkappa)), \quad (\varkappa\beta) \longleftrightarrow (\varepsilon(\varkappa\beta)),$$
$$(\gamma\varkappa) \longleftrightarrow (\delta(\gamma\varkappa)), \quad (\varkappa\delta) \longleftrightarrow (\gamma(\varkappa\delta)), \quad (\delta\gamma) \longleftrightarrow (\varkappa(\delta\gamma)),$$
$$(\alpha\varkappa) \longleftrightarrow (\beta\delta), \quad (\gamma\varepsilon) \longleftrightarrow (\alpha\varkappa).$$

Como hasta ahora hemos logrado interpretar α, β, γ, δ y ϵ como representantes de clases de propiedades observables, parece que no será vano tratar de ver si existe una sexta propiedad observable, K, que pueda suponerse representada por κ y que guarde las relaciones expresadas por estas fórmulas[11]; y en caso de que pueda encontrarse semejante propiedad, no se precisará ningún factor nuevo para dar razón de ella: los cuatro factores de la teoría cuadrifactorial serán suficientes. Así pues, la transición desde una teoría trifactorial a una cuadrifactorial no sólo habrá vinculado entre sí una serie de generalizaciones empíricas conocidas y habrá predicho otras hasta el mo-

---

[11] No todas estas nuevas generalizaciones empíricas son lógicamente independientes de las que ya se conocían: cada una de las tres fórmulas $(\beta\delta) \longleftrightarrow (\gamma\epsilon)$, $(\alpha\kappa) \longleftrightarrow (\beta\delta)$ y $(\gamma\epsilon) \longleftrightarrow (\alpha\kappa)$ puede extraerse de las otras dos.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

mento ignoradas, sino que nos habrá llevado a descubrir una propiedad —y sus relaciones— cuya existencia se nos había escapado. La búsqueda de átomos químicos con una constitución nuclear y electrónica específica y de moléculas químicas con una constitución atómica específica, búsqueda que ha tenido tantos éxitos, se ha visto estimulada por la construcción previa de teorías explicativas de la constitución de los átomos y las moléculas ya conocidos: en ellas se encontraban «lagunas» —por decirlo así— que pedían ser completadas por el descubrimiento de átomos o moléculas hasta la fecha desconocidos.

Conviene percatarse de que, si bien se considera con razón que el descubrimiento de propiedades observables que rellenen tales lagunas de una teoría otorga a ésta una confirmación de mucho peso (pues será preciso, para que cada una de tales propiedades llene un hueco, que resulten ser verdaderas diversas generalizaciones empíricas referentes a ella, con lo que todas éstas apoyarán la teoría del caso), el que no se logren descubrir semejantes propiedades no ha de considerarse factor adverso a dicha teoría —excepto, tal vez, en casos muy especiales—: es muy fácil que haya excelentes razones, que así nos lo parecerían si las supiéramos, tanto para que no puedan encontrarse juntos dos factores teoréticos como para que, en caso de hacerlo, no produzcan efecto observable alguno. Por tanto, hasta que no se descubra una propiedad que pueda decirse representada por κ, este símbolo debe tomarse como representante de un concepto puramente teorético, al mismo nivel que los representados por λ, μ, ν o ρ: puede ser conveniente manejar un cálculo en que se lo haya introducido mediante la fórmula inicial $\kappa \longleftrightarrow (\nu\rho)$, que servirá para definirlo a base de los significados de ν y de ρ, pero este cálculo no representará mejor (ni peor) los hechos observados que el que carezca de semejante fórmula. Y la teoría cuadrifactorial que se exprese por uno u otro de estos cálculos proporcionará una explicación satisfactoria de las generalizaciones a que obedecen las cinco propiedades observables considerándolas resultado, cada una de ellas, de la combinación de dos de los cuatro factores, independientemente del hecho de que no se conozca ninguna propiedad observable a la que quepa considerar como combinación del sexto par de estos factores.

Ahora bien, la utilización de una teoría explicativa de un conjunto de generalizaciones para explicar otro conjunto suplementario de ellas, mediante una ligera modificación —es decir, por tránsito de una teoría trifactorial a una cuadrifactorial—, habría sufrido fuertes restricciones si los símbolos representativos de los tres factores se hubiesen definido a base de las propiedades observables cuyas relaciones

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

pretendía explicar la teoría trifactorial. Pues, como hemos visto, el único modo plausible de definir λ, μ y ν hubiera sido el de adjuntar a las fórmulas iniciales del cálculo estas otras, nuevas,

$$\lambda \longleftrightarrow (\gamma \cup \alpha), \quad \mu \longleftrightarrow (\alpha \cup \beta), \quad \nu \longleftrightarrow (\beta \cup \gamma);$$

y al hacer tal cosa podemos decir que no hubiese quedado espacio lógico apropiado para que los tres factores *L*, *M* y *N* se combinasen con un cuarto factor, *R*, dando lugar a nuevas propiedades observables.

Podemos hacer visible de maneras diversas la restricción que estas definiciones impondrían. Acaso el mejor método sea el de advertir que si se modifica el cálculo que representa la teoría cuadrifactorial añadiendo como fórmulas iniciales suplementarias las fórmulas que podrían emplearse para definir λ, μ y ν, se hace posible extraer fórmulas que vinculen entre sí, α, β, γ, δ, ϵ y κ, y no se puedan extraer en el cálculo no modificado; entre éstas escribiremos las tres siguientes [12]:

$$\delta \longleftrightarrow ((\alpha\varepsilon) \cup (\gamma\varkappa)), \quad \varepsilon \longleftrightarrow ((\alpha\delta) \cup (\beta\varkappa)), \quad \varkappa \longleftrightarrow ((\beta\varepsilon) \cup (\gamma\delta)).$$

La primera de ellas expresa la generalización empírica de que la clase de las *D* es la misma que la clase formada por reunión de la intersección de la clase de las *A* con la clase de las *E* y la intersección de la clase de las *C* con la clase de las *K*; es decir, expresa que cuanto sea *D* es también o *A* y *E* o *C* y *K* (o ambas cosas), y viceversa. En cuanto a las otras dos fórmulas, expresan las generalizaciones empíricas correspondientes que sirven para identificar la clase de las *E* y la de las *K*.

Sin duda, puede ocurrir que estas generalizaciones empíricas resulten ser verdaderas, pero, desde luego, trascienden las consecuencias lógicas de la teoría cuadrifactorial: todo cuanto puede deducirse de las hipótesis de ésta es que todo lo que sea *A* y *E* o *C* y *K* (o ambas cosas) es también *D* [13], mas es imposible deducir la proposición in-

[12] Podemos deducir la primera del modo siguiente (mencionamos explícitamente sólo las fórmulas que se encuentran en la parte no algebraica del cálculo):

$\delta \longleftrightarrow (\lambda(\lambda\rho))$	a partir de	$\delta \longleftrightarrow (\lambda\rho)$,
$\delta \longleftrightarrow ((\gamma\cup\alpha)\delta)$	a partir de	$\lambda \longleftrightarrow (\gamma\cup\alpha)$,
$\delta \longleftrightarrow ((\alpha\delta)\cup(\delta\gamma))$		
$\delta \longleftrightarrow ((\varepsilon(\alpha\delta))\cup(\varkappa(\delta\gamma)))$	a partir de	$(\alpha\delta) \longleftrightarrow (\varepsilon(\alpha\delta))$ y de $(\delta\gamma) \longleftrightarrow (\varkappa(\delta\gamma))$,
$\delta \longleftrightarrow ((\alpha\varepsilon)\cup(\gamma\varkappa))$	a partir de	$(\varepsilon\alpha) \longleftrightarrow (\delta(\varepsilon\alpha))$ y de $(\gamma\varkappa) \longleftrightarrow (\delta(\gamma\varkappa))$.

El único paso que hace uso de la fórmula inicial suplementaria es el que conduce a $\delta \longleftrightarrow ((\gamma\cup\alpha)\delta)$.

[13] Esta proposición se expresa por la fórmula

$$((\alpha\varepsilon)\cup(\gamma\varkappa)) \longleftrightarrow (\delta((\alpha\varepsilon)\cup(\gamma\varkappa))),$$

que se puede extraer, en un cálculo que incluya al de Huntington, a partir de las fórmulas $(\epsilon\alpha) \longleftrightarrow (\delta(\epsilon\alpha))$ y $(\gamma\kappa) \longleftrightarrow (\delta(\gamma\kappa))$.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

versa de que todo lo que sea D es también o A y E o C y K (o ambas cosas), como sería necesario para asentar la identidad de clases de que tratamos. Así pues, las fórmulas que habíamos propuesto se añadieran al cálculo para lograr definiciones de λ, μ y ν, a saber,

$$\lambda \longleftrightarrow (\gamma \cup \alpha), \quad \mu \longleftrightarrow (\alpha \cup \beta), \quad \nu \longleftrightarrow (\beta \cup \gamma),$$

aun cuando son ociosas e innocuas cuando se las agrega a un cálculo que represente la teoría trifactorial, no son ninguna de las dos cosas al adjuntarlas a uno que represente la cuadrifactorial. Pues este último cálculo cesará entonces de representar como queríamos la teoría cuadrifactorial, pasando a hacerlo con una teoría dotada de un conjunto más restrictivo de hipótesis, cuyas consecuencias lógicas no sólo aseverarán que las intersecciones de ciertas parejas de clases tomadas de entre seis clases dadas empíricamente están incluidas en determinadas clases, sino que, tomando tres de estas últimas, cada una de ellas es verdaderamente idéntica a una combinación lógica de cuatro de las clases restantes.

Una de las consecuencias de la definición propuesta para λ, μ y ν es que se impondrá a las clases designadas por δ, ϵ y κ la restricción de que han de caer, respectivamente, dentro de las clases representadas por $(\gamma \cup \alpha)$, $(\alpha \cup \beta)$ y $(\beta \cup \gamma)$, y, por tanto, la de que han de caer dentro de la clase representada por $(\alpha \cup (\beta \cup \gamma))$; así, pues, el campo de aplicación de las propiedades D, E y K ha de encontrarse enteramente en el interior del correspondiente colectivamente a A, B y C, o sea, la clase de las cosas dotadas de una o varias de las propiedades D, E y K tiene que estar incluida en la de las cosas que posean una o varias de las propiedades A, B y C. De modo que las nuevas propiedades D, E y K, para explicar las cuales habíamos propuesto la teoría cuadrifactorial, sólo serán susceptibles de tal explicación si pertenecen exclusivamente a cosas que posean las propiedades A, B y C, para las que basta la teoría trifactorial. De ahí que la cuadrifactorial dé razón de propiedades nuevas de casos o ejemplos de las propiedades antiguas, y no se aplique a ninguna clase de cosas de la que la trifactorial no haya dicho nada.

Cabe hacer visible este punto mediante un diagrama que empleemos de manera parecida al de la página 80. Como antes, α, β y γ designarán las clases de los puntos situados, respectivamente, sobre los rombos *afde*, *bdef* y *cefd*, o en su interior (fig. 3). Entonces, puesto que vamos a definir λ, μ y ν de modo que representen las reuniones por parejas de estas clases de puntos, estas letras griegas designarán las clases de los puntos situados, respectivamente, sobre los trapecios

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

afdc, ***bdea*** y ***cefb*** o en su interior; además, la clase de puntos designada por ρ tiene que ser la de los que se encuentren sobre el triángulo *lpq* o en su interior —triángulo que hemos dibujado de suerte que se solape a cada uno de los cuatro triángulos *afe*, *bdf*, *ced* y *efd*, pero sin cubrir ninguno de ellos, y que tenga una parte exterior a todos—; luego si δ, ϵ y κ han de designar, respectivamente, las clases de puntos representadas por $(\lambda\rho)$, $(\mu\rho)$ y $(\nu\rho)$,

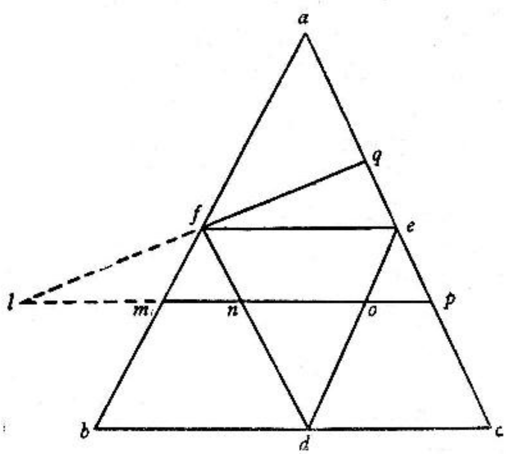


Fig. 3.

δ designará la clase de los puntos situados en el trapecio *fnpq* o en su interior;

ϵ designará la clase de los puntos situados en el pentágono *fmoeq* o en su interior, y

κ designará la clase de los puntos situados en el cuadrilátero *fmpe* o en su interior.

Puede comprobarse fácilmente en el diagrama que no sólo se cumplen las relaciones entre las figuras representadas por las fórmulas correspondientes a las generalizaciones empíricas que la teoría cuadrifactorial pretendía explicar, esto es, por

$$(\alpha\delta)\longleftrightarrow(\varepsilon(\alpha\delta)),\quad (\beta\delta)\longleftrightarrow(\gamma\varepsilon),$$

sino que se cumplen asimismo las representadas por las fórmulas que no habíamos ido buscando,

$$\delta\longleftrightarrow((\alpha\varepsilon)\cup(\gamma\varkappa)),\quad \varepsilon\longleftrightarrow((\alpha\delta)\cup(\beta\varkappa)),\quad \varkappa\longleftrightarrow((\beta\varepsilon)\cup(\gamma\delta)),$$

las cuales se deben a la restricción de que las clases designadas por

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

λ, μ y ν sean clases de puntos situados en el triángulo *abc* o en su interior.

Se observará también que el único modo de que la clase expresada por $(\delta \cup (\epsilon \cup \kappa))$ sea tan extensa como la expresada por $(\alpha \cup (\beta \cup \gamma))$ es que la primera sea idéntica a esta última: en este caso aquélla se encontraría incluida íntegramente en la clase designada por ρ, y las que δ, ϵ y κ designan se convertirían en idénticas a las expresadas por $(\gamma \cup \alpha)$, $(\alpha \cup \beta)$ y $(\beta \cup \gamma)$ [14]. Por tanto, el campo de aplicación de las propiedades *D*, *E* y *K* tomadas colectivamente habría de ser siempre menor que el correspondiente colectivamente a *A*, *B* y *C*, a menos que fuesen válidas otras identificaciones restrictivas ulteriores de las clases dadas empíricamente.

Si definimos λ, μ y ν a base de propiedades observables al construir la teoría trifactorial, hemos de definir ρ de manera análoga en el momento en que la introduzcamos para representar el cuarto factor de la teoría cuadrifactorial; y la manera análoga que concede la extensión mínima a la clase designada por ρ es la de añadir al cálculo que estábamos utilizando la nueva fórmula inicial [15].

$$\rho \longleftrightarrow (\delta \cup (\varepsilon \cup \varkappa)).$$

En nuestro diagrama ello corresponde a eliminar la parte punteada del triángulo *lpq* —que se encuentra fuera del *abc*—, es decir, a admitir que ρ designe únicamente la clase de los puntos situados en el cuadrilátero *mpqf* o en su interior. Esta limitación que imponemos a la extensión de ρ no afectará en nada a las relaciones existentes entre las diversas zonas del triángulo *abc*: la nueva fórmula inicial será una fórmula ociosa en lo que respecta al cálculo representante de la teoría cuadrifactorial con λ, μ y ν ya definidas; pero si queremos ampliar esta última en una teoría pentafactorial, en la que aparezca un nuevo factor designado por σ, dicha fórmula no será ya ociosa en el nuevo cálculo que necesitemos, y pasará a ser consecuencia de que todas las clases correspondientes a combinaciones de estos cinco factores tomados de dos en dos habrán de encontrarse incluidas en la clase expresada por $(\alpha \cup (\beta \cup \gamma))$; con lo que la teoría pentafactorial sólo será capaz de dar razón de propiedades ulteriores de algunas de las clases de cosas dotadas de propiedades ya estudiadas por la teoría cua-

[14] A partir de $(\delta \cup (\varepsilon \cup \varkappa)) \longleftrightarrow \alpha \cup (\beta \cup \gamma))$ podemos extraer $((\lambda \cup (\mu \cup \nu))\rho) \longleftrightarrow (\lambda \cup (\mu \cup \nu))$, ya que $((\lambda \cup (\mu \cup \nu))\rho) \longleftrightarrow (\delta \cup (\varepsilon \cup \varkappa))$ y $(\lambda \cup (\mu \cup \nu)) \longleftrightarrow (\alpha \cup (\beta \cup \gamma))$; y de allí $(\lambda\rho) \longleftrightarrow \lambda$.

[15] Como $\delta \longleftrightarrow ((\alpha\varepsilon) \cup (\gamma\varkappa))$ se puede extraer en este cálculo, podríamos emplear $\rho \longleftrightarrow (\varepsilon \cup \varkappa)$ como nueva fórmula inicial; y parecidamente podríamos utilizar $\rho \longleftrightarrow (\delta \cup \varkappa)$ o $\rho \longleftrightarrow (\delta \cup \varepsilon)$.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

drifactorial. En general, dada una teoría *n*-factorial en la que cada uno de los *n* factores se haya «construido lógicamente» a partir de propiedades observables (en el sentido de que el símbolo que designe cada factor se haya definido lógicamente a base de propiedades observables), sólo se la puede ampliar a una teoría $(n + 1)$-factorial a costa de que tenga aplicación exclusivamente a propiedades poseídas nada más que por cosas que tengan propiedades de que se haya ocupado ya la teoría *n*-factorial —en nuestro diagrama solamente nos dará ulteriores relaciones entre zonas situadas en el triángulo fundamental *abc*—: si los factores de esta última han de considerarse como construcciones lógicas, por mucho que se la amplíe no aumentará su campo de aplicación, sino que estará siempre limitada a la clase de cosas por mor de las cuales se había propuesto la teoría trifactorial —con objeto de explicar las relaciones existentes entre tres de sus propiedades.

Hemos llevado a cabo esta larga exposición con objeto de dejar perfectamente en claro el precio que ha de pagarse para poder considerar los términos teoréticos de una teoría científica como construcciones lógicas a partir de entidades observables. El ejemplo que hemos puesto de teoría factorial es de tal índole que el aparato matemático que se utiliza para deducir las generalizaciones empíricas a partir de las hipótesis tiene la máxima sencillez, y, por consiguiente, parece *prima facie* que se tendrá la máxima facilidad para hacer marchar en sentido inverso dicho aparato; pero hemos visto que incluso en este caso solamente cabe definir los términos teoréticos valiéndose de entidades observables a condición de que la teoría no sea susceptible propiamente de adaptación para aplicarla a situaciones nuevas; y la situación será peor aún cuando se utilice un aparato matemático más complicado. En realidad, es frecuente que la posibilidad de emplear unos recursos matemáticos dependa de que los términos teoréticos posean un alcance mayor que el de todas las propiedades observables tomadas en conjunto [16].

Sólo es posible definir explícitamente y sin efectos nocivos tales términos cuando se trata de teorías que no pretenden tener otra función que la de sistematizar generalizaciones empíricas conocidas. Toda teoría que espere ampliarse en el futuro de modo que llegue a explicar más generalizaciones que las que inicialmente pretendía tiene

[16] En la mecánica cuántica las funciones de onda de Schrödinger son funciones complejas cuyos factores de fase se anulan cuando se pasa deductivamente a generalizaciones empíricas a partir de hipótesis que contengan aquéllas.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

que otorgar a sus términos teoréticos una libertad mayor que la que se los concedería si fuesen construcciones teóricas a partir de entidades observables: una teoría científica que —como todas las buenas teorías de esta índole— sea capaz de crecer tiene que ser algo más que otra forma posible de describir las generalizaciones sobre las que se basa, que es todo lo que sería si se limitasen sus términos teoréticos definiéndolos explícitamente.

La definición implícita de los términos teoréticos

Sin embargo, podemos ampliar el sentido de definición si así lo queremos. En la definición explícita, que es la que hemos tenido en cuenta hasta ahora, las posibilidades de interpretar un símbolo determinado que aparezca en un cálculo se reducen a una sola, por virtud de la condición de que dicho símbolo sea sinónimo (dentro del cálculo) de otro símbolo o grupo de símbolos al que se haya prestado ya interpretación. Pero cabe reducir aquellas posibilidades sin necesidad de que la interpretación ya dada a otros símbolos que aparezcan en las fórmulas del cálculo las reduzca a una sola; y si queremos subrayar el parecido entre la reducción de las posibilidades de interpretación de un símbolo a sólo una y la reducción a más de una, en lugar de subrayar su diferencia (como hemos hecho hasta ahora), emplearemos el nombre de definición como apelativo de esta segunda reducción, lo mismo que lo hemos empleado con la primera, pero calificándolo con expresiones tales como «implícita» o «por un postulado». Al ampliar de esta forma el significado de la definición podemos expresar la tesis de este capítulo diciendo que, si bien los términos teoréticos de una teoría científica quedan *definidos implícitamente* gracias a su aparición en las fórmulas iniciales de un cálculo en que se extraen otras fórmulas que se interpretan como generalizaciones empíricas, no pueden estar *definidos explícitamente* por medio de las interpretaciones dadas a los términos de estas fórmulas extraídas sin que la teoría se convierta, por ello mismo, en incapaz de crecimiento.

En el caso de nuestras teorías trifactorial y cuadrifactorial podemos dar por separado definiciones implícitas de los términos teoréticos. En ellas pueden extraerse, respectivamente, las fórmulas[17]

$$\lambda \longleftrightarrow ((\gamma \smile \alpha) \smile \lambda), \quad \lambda \longleftrightarrow (((\gamma \smile \alpha) \smile \delta) \smile \lambda),$$

[17] A partir de $(\gamma\alpha) \longleftrightarrow ((\nu\lambda)(\lambda\mu))$ podemos sacar $(\gamma\alpha) \longleftrightarrow ((\gamma\alpha)\lambda)$, de donde se puede extraer $\lambda \longleftrightarrow ((\gamma \smile \alpha) \smile \lambda)$, ya que $\xi \longleftrightarrow (\eta \smile \xi)$ puede extraerse de $\eta \longleftrightarrow (\eta\xi)$.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

y otras análogas para μ, ν y (en la teoría cuadrifactorial) ρ. En la trifactorial, al interpretar γ y α como designaciones respectivas de la clase de las *C* y de la de las *A*, la fórmula $\lambda \leftrightarrow ((\gamma \cup \alpha) \cup \lambda)$ produce el efecto de restringir la interpretación de λ a la de una clase que incluya la clase de las cosas que sean *C* o *A* (o ambas cosas), es decir, que incluya la unión de la clase de las *C* con la de las *A*; y puesto que decir que una clase incluye la unión de dos clases equivale a decir que incluye ambas, esta restricción sobre la interpretación de λ consiste en la doble restricción de que la clase designada por esta letra griega ha de incluir tanto la clase de las *C* como la clase de las *A*. Parecidamente, en la teoría cuadrifactorial, al designar, respectivamente, γ, α y δ la clase de las *C*, la de las *A* y la de las *D*, la restricción que la fórmula $\lambda \leftrightarrow (((\gamma \cup \alpha) \cup \delta) \cup \lambda)$ impone sobre la interpretación de λ consiste en la triple restricción de que la clase designada por este símbolo ha de incluir la clase de las *C*, la de las *A* y la de las *D*. Es evidente que la doble restricción con que la teoría trifactorial limita la interpretación de λ no es en modo alguno incompatible con la tercera —la de tener que incluir la clase de las *D*—, a la que se verá sujeta en caso de que se la amplíe hasta convertirla en una cuadrifactorial; así pues, la definición implícita de los términos teoréticos es perfectamente compatible con el crecimiento de la teoría en que aparezcan.

En el caso de nuestras teorías de factores (por ejemplo, en la trifactorial) ha sido posible expresar las restricciones que se imponen a λ, μ y ν separadamente, mediante fórmulas en que aparecía una de estas letras y no las otras dos, y en las que cada una se encontraba sola en el miembro izquierdo. Sin embargo, en la mayoría de los cálculos es imposible expresar estas restricciones con tal sencillez; y, por otra parte, las fórmulas

$$\lambda \leftrightarrow ((\gamma \cup \alpha) \cup \lambda), \quad \mu \leftrightarrow ((\alpha \cup \beta) \cup \mu), \quad \nu \leftrightarrow ((\beta \cup \gamma) \cup \nu$$

no expresan todas las restricciones que las fórmulas iniciales de la teoría trifactorial,

$$\alpha \leftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \leftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \leftrightarrow (\nu\lambda),$$

imponen sobre λ, μ y ν, ya que a aquéllas se añaden estas otras restricciones:

$$(\alpha'(\beta'(\gamma'(\lambda\mu)))) \leftrightarrow o, \quad (\alpha'(\beta'(\gamma'(\mu\nu)))) \leftrightarrow o, \quad (\alpha'(\beta'(\gamma'(\nu\lambda)))) \leftrightarrow o.$$

Por consiguiente, ordinariamente lo más fácil es expresar las definiciones implícitas de los términos teoréticos repitiendo las fórmulas iniciales del cálculo propio de la teoría —omitidas, naturalmente, las

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

que correspondan a cualquier cálculo algebraico que forme parte de él—: por ejemplo, para definir implícitamente las λ, μ y ν de la teoría trifactorial habría que enumerar de nuevo las fórmulas iniciales $\alpha \leftrightarrow (\lambda\mu)$, $\beta \leftrightarrow (\mu\nu)$ y $\gamma \leftrightarrow (\nu\lambda)$. Luego si se dan todas las fórmulas iniciales que contengan los términos teoréticos, sabemos que tenemos ante nosotros todas las restricciones impuestas por el hecho de que las fórmulas que se extraigan de las iniciales tengan que interpretarse como representantes de generalizaciones empíricas acerca de propiedades observables: la definición implícita empírica de los términos teoréticos de un sistema deductivo científico consiste en adaptar el cálculo al sistema de abajo arriba. Lo cual se consigue ajustando primero las fórmulas extraídas en el cálculo a las generalizaciones empíricas que constituyan las hipótesis de nivel ínfimo del sistema deductivo y moviéndose luego hacia atrás hasta que las fórmulas que contengan los términos teoréticos queden interpretadas como representantes de las hipótesis de nivel superior de las que se sigan lógicamente en el sistema las de nivel ínfimo.

La «realidad» de los conceptos teoréticos

Al llegar a este punto ya no puede posponerse más la pregunta metafísica que habrán tenido en las mientes muchos lectores: si los términos teoréticos de una ciencia no son definibles explícitamente, sino sólo de modo implícito por la forma en que funcionen en un cálculo que represente un sistema deductivo científico, ¿en qué consiste la «realidad» de las entidades que denotan estos términos? Si empleamos las palabras «concepto teorético» (expresión que hemos evitado utilizar cuanto nos ha sido posible) para denotar aquello que sea representado por un término teorético, ¿cuál es la condición que tienen estos conceptos teoréticos?

Una forma de responder a esta pregunta —que es, en lo esencial, la respuesta de Ramsey— consiste en decir que la condición de que goza un concepto teorético, por ejemplo el de electrón, está dada por la siguiente proposición, que especifica cuál es la condición que tiene un electrón en el sistema deductivo de la física contemporánea: existe una propiedad E (llamada «ser un electrón») tal que ciertas proposiciones de alto nivel acerca de E son verdaderas, y de ellas se siguen ciertas proposiciones de nivel ínfimo que son contrastables empíricamente. Así pues, no se dice nada acerca de la «naturaleza» de

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

la propiedad E: sólo se asevera que existe, esto es, que existen ejemplos de E, a saber, los electrones [18].

En el caso de nuestra teoría trifactorial ello equivale a decir que la condición de los conceptos teoréticos L, M y N es tal que especifican clases —la clase de las L, la de las M y la de las N, respectivamente— de suerte que la clase de las A sea idéntica a la intersección de la de las L con la de las M, la de las B idéntica a la intersección de la de las M con la de las N y la de las C sea idéntica a la intersección de la de las N con la de las L (estando especificadas las clases de las A, de las B y de las C por las propiedades observables A, B y C, respectivamente). No se dice nada acerca de qué sea lo que determine la clase que es la de las L, la clase que es la de las M ni la que es la de las N: el hecho de que estas tres clases hayan de satisfacer las condiciones impuestas por las hipótesis de nivel superior que constituyen las premisas del sistema deductivo las sujeta a ciertas restricciones, pero, por lo demás, pueden ser cualesquiera. El decir que existen es decir que cada una de ellas posee uno o varios miembros (esto es, que no es la clase nula), lo cual es una consecuencia lógica de las premisas combinadas con la existencia de al menos dos de las clases de las A, de las B y de las C.

Según este punto de vista, decir que existan los conceptos teoréticos es afirmar la verdad de la teoría en que aparezcan: «'Existe la cualidad de la masa' no tienen sentido —escribe Ramsey— a menos de que signifique únicamente afirmar las consecuencias de una teoría mecánica» [19]. Pero existe otra manera de responder a esta cuestión que es viable para aquellos de nosotros que, enterados de los trabajos realizados por los lógicos simbólicos desde 1930, año de la muerte de Ramsey, sean capaces de señalar una distinción más tajante que la que hacía este autor entre un sistema deductivo y un cálculo que lo represente. Esta otra forma de contestar a la pregunta «¿Existen realmente los electrones? ¿Existen realmente las clases de las L, de las M y de las N de la teoría trifactorial?» consiste en sortearla y en no hacer observación alguna acerca de un concepto teorético como algo opuesto a un término teorético: en lugar de contestar directamente, se da una respuesta que no se refiere al concepto de los electrones o a la clase de las L, sino a la palabra «electrón» o al símbolo λ, así como a la utilización de estos símbolos en las fórmulas iniciales del

---

[18] F. P. Ramsey, *The Foundations of Mathematics and other logical essays*, pág. 231.

[19] *Op. cit.*, pág. 261.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

cálculo, que se interpreta, del modo señalado, de abajo arriba. Si quien preguntaba se queja de que su pregunta se refería al concepto y no al símbolo y de que no se le ha respondido, será necesario retroceder y dar la contestación de Ramsey [20]; pero es posible que se contente con una explicación del modo de emplear el símbolo que sea, unida al reconocimiento del hecho de que los símbolos pueden tener significado en el contexto de un cálculo y carecer de él fuera de tal contexto.

Supuesto que se entienda cuál es la función de los términos teoréticos en un cálculo que represente un sistema deductivo científico, tiene escasa importancia el que se prefiera responder a la pregunta de si los electrones existen realmente diciendo, «sí, porque la teoría electrónica es verdadera», o (sin contestar «no») explicando la función de las palabras y los demás símbolos que, en el cálculo que se interprete como el sistema deductivo de la física atómica contemporánea, se utilicen para los electrones. En cuanto a la lógica formal, la segunda respuesta —que evita el decir tanto que un concepto teorético exista como que no exista— ofrece ciertas ventajas sobre la primera; pues ésta convierte el conjunto de las premisas del sistema deductivo en una proposición existencial única —existen propiedades *X*, *Y*, *Z*, etc., tales que...— y, en consecuencia, haría preciso modificar la noción de hipótesis científica como generalización universal. Mas, por otra parte, la primera acaso acentúe mejor que la segunda el hecho de que es necesario tomar conjuntamente, como un todo, las premisas del sistema deductivo (que están representadas por las fórmulas iniciales del cálculo), así como el de que al crecer la teoría por adjunción de una nueva premisa todas las demás quedan afectadas: hecho éste que puede exponerse en la terminología del cálculo diciendo que al añadirse una nueva fórmula inicial las posibilidades de interpretación de las antiguas quedan alteradas de igual manera que queda instaurada la posibilidad de interpretar la nueva.

Es muy instructivo advertir que uno de los términos teoréticos más importantes que se emplean en la física contemporánea —la función de onda de Schrödinger— recibe frecuentemente el nombre de «función ψ», de suerte que nos referimos a él meramente por medio del símbolo ψ, que se usa habitualmente en los cálculos de la mecá-

[20] También puede contestarse con la primera respuesta a quienquiera que proponga emplear los conceptos de tal modo que todo símbolo separado designe *ipso facto* un concepto.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

nica ondulatoria. Sospecho que a ningún físico le gustaría responder directamente a preguntas como ¿cuál es el concepto denotado por el símbolo ψ?, ¿existe realmente la función ψ de Schrödinger?[21]: casi con seguridad, preferirá dar una respuesta indirecta, explicando cómo utiliza en sus cálculos dicho símbolo[22]. Pues el físico no empieza por un sistema deductivo científico que contuviera proposiciones «acerca de» conceptos que él designase con el símbolo ψ, ni representa después tales proposiciones del sistema deductivo por medio de fórmulas de un cálculo, sino que empieza por un cálculo del cual quepa extraer fórmulas que puedan interpretarse como las generalizaciones empíricas que le compete explicar. Para un físico, pensar acerca de funciones ψ es emplear en sus cálculos el símbolo ψ de una manera apropiada y una vez que ha explicado ésta no hay nada más que decir sobre aquello acerca de lo cual hablan las proposiciones expresadas por las fórmulas que contienen la ψ: tras haber expuesto cuál es la condición dentro del cálculo de un término teorético no resta cuestión ninguna en cuanto a la condición ontológica del concepto teorético correspondiente.

Significado indirecto de los enunciados generales

El modo de empleo de los términos teoréticos de una ciencia adelantada como la física constituye el ejemplo más llamativo de la forma en que se puede conferir significado de un modo indirecto, y no directo; sin embargo, un examen más detenido hace ver que reaparece la misma situación en muchos lugares en que a primera vista no sospecharíamos encontrarla. Tomemos, por ejemplo, el caso de los enunciados generales. Hasta el momento hemos supuesto que, aunque podríamos perfectamente encontrar dificultades para comprender cómo puedan interpretarse empíricamente las fórmulas de un cálculo que contengan términos teoréticos, no aparecería semejante problema respecto de las fórmulas extraídas en él que es menester interpertar como generalizaciones empíricas: en realidad, era preciso entender los términos toréticos que se encontrasen en la parte alta de la jerarquía de la ciencia a base de una interpretación de aquellas fórmulas extraí-

[21] No hay nadie que admita que ψ denote una onda, en ningún sentido normal de esta palabra.

[22] O, naturalmente, cualquier otro símbolo que en tal cálculo sea sinónimo de la ψ de Schrödinger.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

das. Pero, de hecho, surgen problemas parecidos con respecto a la palabra «todo» que con respecto a la de «electrón».

Pues, ¿cómo se confiere significado a una cláusula que exprese una generalización universal, por ejemplo, «todo gato come pescado»? Ello no ocurre del mismo modo directo en que acontece con la cláusula «Moro come pescado», que se utiliza para expresar una proposición acerca de un gato determinado llamado «Moro», ya que la proposición de que todo gato coma pescado no es observable en el sentido en que lo es la de que Moro coma pescado: la expresión «todo gato» no se emplea para designar ningún gato determinado, sino que posee significado de una forma más complicada. Decir que Moro come pescado es atribuir a la cosa determinada llamada «Moro» la propiedad de ser ictiófaga, mientras que decir que todo gato come pescado no es atribuir esta propiedad a ninguna cosa determinada que se llamase «todo gato», ni es atribuir la ictiofagia colectivamente a la clase de todos los gastos, porque las clases no pueden comer pescado; lo que hace este enunciado es aseverar una proposición de la cual —unida conyuntivamente a una proposición que afirme que cierta cosa determinada es un gato— se sigue lógicamente que la cosa determinada en cuestión come pescado: se confiere significado a dicho enunciado no de la forma directa en que se hace con «Moro come pescado», sino en virtud de su puesto en un cálculo.

Estaría aquí fuera de lugar un desarrollo de un cálculo adecuado para representar las relaciones lógicas existentes entre las generalizaciones lógicamente contingentes y sus casos o ejemplos tan por lo largo como lo hemos hecho en cuanto a los cálculos del último capítulo [23]. Mas podemos construir un cálculo muy sencillo idóneo para este fin del modo que sigue. Tómense como fórmulas tanto las sucesiones de marcas que lo son en el cálculo de Huntington, esto es, sucesiones consistentes en dos elementos del cálculo entre las que se halle un signo de flecha doble, $\leftrightarrow$, como nuevas sucesiones que consten de las cuatro partes siguientes, ordenadas de izquierda a derecha: un corchete izquierdo, un elemento del cálculo de Huntington que no sea una variable ni contenga variable alguna como parte suya, una letra de nuestro alfabeto en negrita y un corchete derecho (tendríamos ejemplos de estas nuevas fórmulas con $[\alpha\mathbf{c}]$, $[(\beta\alpha)\mathbf{b}]$, $[(\alpha'\beta)'\mathbf{c}]$,

[23] Las variables del Segundo cálculo (págs. 53 y sigs.) y las del cálculo de Huntington (pág. 77) nos permiten utilizar una técnica de deducción de casos o ejemplos de generalizaciones lógicamente necesarias, partiendo de estas generalizaciones.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

pero no con [ξ**c**] ni con [$\alpha\eta$)**b**], ya que ξ y η son variables). Las fórmulas iniciales y las reglas de juego serán las mismas que las del cálculo de Huntington, más una nueva regla referente al nuevo tipo de fórmula: esta regla permitirá escribir una fórmula del tipo [β**c**] siempre que estén ya escritas dos fórmulas de formas respectivas $\alpha \longleftrightarrow (\beta\alpha)$ y [α**c**] [24].

Cabe interpretar este cálculo como representante de un sistema deductivo admitiendo que los elementos representen clases, que la parte algebraica del cálculo (que no hace uso de las nuevas fórmulas ni de la nueva regla de juego y que, en realidad, es exactamente el cálculo de Huntington) represente la lógica de clases y que [α**c**] exprese la proposición según la cual la cosa *c* designada por **c** es miembro de la clase designada por α, o sea, *c* tiene la propiedad *A*. Puesto que, con esta interpretación, $\alpha \longleftrightarrow (\beta\alpha)$ expresa la proposición de que toda *A* es *B*, la nueva regla de juego expresará la verdad lógica según la cual la proposición de que *c* es *B* es consecuencia lógica de la pareja de proposiciones «toda *A* es *B*» y «*c* es *A*» —si *c* es Moro y *A* y *B* son respectivamente las propiedades de ser un felino y ser ictiófago, la nueva regla expresa la verdad lógica de que «Moro come pescado» se siga lógicamente de «todo gato come pescado» y «Moro es un gato»—. Suponiendo que pueda otorgarse un significado directo a las cláusulas «Moro es un gato» y «Moro come pescado», que admitimos representan proposiciones observables, puede otorgárselo indirecto al enunciado «todo gato come pescado» teniendo en cuenta el modo en que funciona en un cálculo dotado de la regla de juego según la cual puede extraerse la fórmula [β**c**] a partir de la pareja de fórmulas $\alpha \longleftrightarrow (\beta\alpha)$ y [α**c**] e interpretado del modo que hemos descrito. Exactamente del mismo modo que en el nuevo cálculo simbólico la interpretación que demos a [α**c**] y a [β**c**] determina la que hemos de dar a $\alpha \longleftrightarrow (\beta\alpha)$, en el cálculo verbal formalmente equivalente a él, la interpretación que se otorgue a «Moro es un gato» y a «Moro come pescado» es determinante de la de «todo gato come pescado», en cuanto que representa la proposición lógicamente más débil tal que a partir de la pareja de proposiciones de las que ella es una y «Moro es un gato»

---

[24] Si el cálculo antiguo hubiera contenido —cosa que no ocurre en el de Huntington— una regla de separación (pág. 63) podría habérselo modificado de suerte que representase casos o ejemplificaciones de generalizaciones contingentes sin añadir ninguna nueva regla: bastaría haber añadido una nueva fórmula inicial y distinguir una subclase, la de las «variables en negrita» (por ej., **x**, **y**, **z**), de la clase de las letras en negrita, subclase a la que se aplicaría la regla de sustitución de variables, en la inteligencia de que las variables en letras griegas sólo podría sustituirse por elementos y las variables en negrita sólo por letras en negrita.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

es la otra se siga lógicamente la proposición según la cual Moro come pescado. De suerte que el significado de los enunciados que contienen la palabra «todo» o sus sinónimos —es decir, el significado de los que expresan generalizaciones— está dado indirectamente por el modo característico de funcionar que tengan en un cálculo en que los enunciados de nivel ínfimo se interpreten como formas de expresar hechos observables acerca de cosas observables determinadas.

Los lógicos antiguos reconocían que las palabras del tipo de «todo» carecen de significación por sí mismas, mientras que sólo lo tienen unidas a otras palabras; y lo expresaban llamándolas *sincategoremáticas;* pero sólo hace relativamente poco tiempo que se ha caído en la cuenta de que no solamente no tiene significado «todo» con independencia de los enunciados en que aparezca, sino que estos mismos tampoco lo tienen independientemente de sus relaciones con otros enunciados de un cálculo interpretado como sistema deductivo. Lo que es verdad con respecto a «todo» lo es también con respecto a todas las palabras lógicas. Y, en realidad, la misma noción de proposición no es independiente de su empleo en los sistemas deductivos: pues forma parte de la naturaleza de una proposición el estar sujeta a los primeros principios de la lógica proposicional, los cuales se refieren, principalmente, a la deductibilidad de unas proposiciones a partir de otras; no se puede entender una proposición como si fuese meramente el significado de un enunciado indicativo en castellano o en algún otro idioma (aun cuando ésta es la forma más sencilla de introducir la noción de proposición), sino que, además, tiene que obedecer a las leyes de la lógica proposicional. Así pues, no cabe interpretar una cláusula o fórmula como si representase una proposición con independencia de la interpretación según la cual otras cláusulas o fórmulas representen otras proposiciones en relación lógica con aquélla.

Por tanto, este rasgo de los términos teoréticos de la ciencia que ha causado tanto asombro recientemente —el hecho de que parezcan no tener significado aparte de su contexto en la representación del sistema científico— tiene su paralelo en el comportamiento de los términos lógicos que entran en la expresión de la generalización empírica más *terre-à-terre:* no es posible entender una fórmula que contenga la ψ de Schrödinger si se la toma aislada, independientemente de las demás fórmulas, pero tampoco se puede entender así ningún enunciado general. Todo el pensamiento científico es un pensamiento general, que se ocupa de vincular entre sí fragmentos de conocimiento empírico; los conceptos teoréticos constituyen sólo un modo especialmente perfilado de llevar a cabo estas conexiones, y los términos teo-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

réticos nada más que un caso particularmente llamativo de significado contextual.

¿Son proposiciones las hipótesis científicas?

Incluso cuando la ciencia de que se trate se encuentra en un estadio elemental y no contiene conceptos teoréticos, todas sus hipótesis, aunque estén expresadas en el lenguaje cotidiano (por ejemplo, «todo cisne europeo es blanco»), son generalizaciones. Como hemos hecho ver, el significado de una cláusula que exprese una generalización es indirecto en comparación con el de otra que exprese una observación posible, de modo que los significados de las cláusulas que expresan hipótesis científicas son siempre indirectos. Y algunos filósofos contemporáneos han querido subrayar este hecho limitando el término de proposición de suerte que cobije solamente el significado directo de las cláusulas, por lo cual rehusan llamar proposición a ninguna hipótesis general. Esta limitación no es conveniente, ya que las hipótesis —en todo ello iguales a las proposiciones en sentido limitado— obedecen a las leyes de la lógica proposicional, son capaces de verdad y falsedad, son objetos de creencia y de otras actitudes cognoscitivas y están expresadas por cláusulas indicativas, de manera que satisfacen todos los criterios ordinarios de ser una proposición; y es, además, una limitación arbitraria, ya que no parece haber buenas razones para excluir de la categoría de las cláusulas expresadoras de proposiciones algunas como «todo cisne europeo es blanco», cuyo significado tiene un carácter indirecto explicable con toda precisión por referencia a los significados de «esto es un cisne europeo» y «esto es blanco», sin excluir también estas dos últimas cláusulas, cuyo significado acaso sea asimismo indirecto —de un modo mucho más oscuro—. Si aquellos puritanos filosóficos consienten sólo en aplicar el nombre «proposición» a significados absolutamente directos y no contextuales podría perfectamente ocurrir que no hubiera nada a lo que pudiera aplicarse tal término (posiblemente todos los significados son contextuales), y desperdiciaríamos una palabra bastante útil.

Los filósofos que rehuyen clasificar las hipótesis generales entre las proposiciones acaso prefieran considerarlas como «reglas». «Las leyes de la naturaleza —escribe Schlick— ... son normas, reglas de proceder que permiten al investigador orientarse por la realidad, descubrir verdaderas proposiciones y esperar con confianza nuevos acon-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

tecimientos particulares»[25]; Ramsey dice, de un modo parecido, que «todo *A* es *B*» no es un juicio, sino una regla para juzgar que si encuentro un *A* he de considerarlo como *B*[26]. Esta otra manera posible de clasificarlas hace que el papel de las generalizaciones en los sistemas deductivos no sea el de premisas de las que podrían deducirse consecuencias observables, sino el de principios de inferencia con arreglo a los cuales se seguirían éstas. Desde luego, cabe mirar de este modo toda hipótesis general: podemos considerar que la inferencia que extrae «Moro come pescado» a partir de «Moro es un gato» por medio de «todo gato come pescado» saca la conclusión a partir de una premisa única en virtud de un principio de inferencia especial, contingente, que se expresa al decir que todo gato come pescado; pero mientras que puede uno habérselas, con toda propiedad, con el fragmento de lógica involucrado en la inferencia de la proposición «*c* es *B*» a partir de la pareja de proposiciones «todo *A* es *B*» y «*c* es *A*» como si fuese un principio de inferencia (aun cuando es posible también encarárselo como una nueva proposición lógicamente necesaria del sistema[27]), sería sumamente engañoso tratar una proposición lógicamente contingente —así, «todo gato come pescado»— como si fuese un principio de inferencia: tal cosa sería hacer una mescolanza enormemente confusiva de la experiencia y de los métodos lógicos mediante los cuales pensamos acerca de ella.

Ramsey y Schlick han prestado un buen servicio a la filosofía al destacar los rasgos peculiares de las generalizaciones que proceden del hecho de que sólo sea posible comprender las cláusulas que las expresan cuando se las pone en conexión con la forma en que se las utiliza en la inferencia deductiva; mas parece preferible presentar lo que les interesa dejar en claro admitiendo que las generalizaciones son proposiciones y señalando que el papel que éstas desempeñan en los sistemas deductivos es diferente del que corresponde a las proposiciones contrastables directamente por la experiencia, de modo que, como consecuencia de ello, las cláusulas que las expresen tienen significado de un modo diferente a las relativas a éstas.

Con la excepción de las pertenecientes a su parte puramente matemática (si es que existe), todas las cláusulas y fórmulas que aparezcan en un tratado teorético cualquiera de una rama de la ciencia tie-

---

[25] Moritz Schlick en *Die Naturwissenschaften*, vol. 19 (1931), pág. 156, reproducido en *Gesammelte Aufsätze* (Viena, 1938), pág. 68 (traducido por mí).

[26] *The Foundations of Mathematics and other logical essays*, pág. 241.

[27] Véase más arriba, pág. 100, nota.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

nen —por expresar hipótesis generales— significado indirecto (en el sentido que hemos dado arriba a esta frase), ya que serán sus contextos los que les otorguen un significado en dependencia unas de otras y de las cláusulas —expresivas de proposiciones directamente contrastables— que el experimentador pueda extraer de ellas. Ahora vemos por qué no cabe evitar, cuando se estudia la lógica de la ciencia, que pensemos acerca de las cláusulas y otros signos utilizados para expresar las hipótesis científicas lo mismo que acerca de estas mismas: un científico metido en la práctica de su ciencia que se interese sólo por la organización deductiva del sistema o por las conclusiones empíricas deductibles dentro de él puede hacer «uso» de sus símbolos sin «mencionarlos»; pero en cuanto se percate de lo que está haciendo y trate de vincular los términos que aparezcan en su sistema deductivo con los observables de sus conclusiones tiene que reflexionar acerca de lo que quiere decir con las palabras «electrón», «función de onda» o «energía psíquica» y habrá de mencionar tales símbolos con objeto de explicar la forma en que proponga interpretarlos.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Los modelos en las teorías científicas, su uso y abuso

Hemos explicado el significado de los términos teoréticos de un cálculo representativo de una teoría científica haciendo ver que la interpretación de aquél se va ajustando a los hechos observables de abajo arriba. En la imagen geométrica que dimos (pág. 80) de la teoría trifactorial interpretamos primeramente los términos que aparecen en las fórmulas extraídas del cálculo,

$$(\alpha\beta) \leftrightarrow (\gamma(\alpha\beta)), \quad (\beta\gamma) \leftrightarrow (\alpha(\beta\gamma)), \quad (\gamma\alpha) \leftrightarrow (\beta(\gamma\alpha))$$

como representantes de clases de puntos dadas, y las fórmulas en que aparecían dichos términos como representantes de proposiciones acerca de las clases de puntos comunes a dos o tres de aquellas clases. Luego interpretamos los términos teoréticos, λ, μ y ν, que aparecían en las fórmulas iniciales del cálculo,

$$\alpha \leftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \leftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \leftrightarrow (\nu\lambda)$$

entendiendo que se encontraban en lugar de clases de puntos sujetas a ciertas restricciones en virtud de tener que satisfacer las condiciones expresadas por estas fórmulas, pero que por lo demás estaban indeterminados. De esta forma presentamos esta imagen geométrica como interpretación del cálculo de la teoría de igual modo que habíamos presentado la interpretación inicial del cálculo con objeto de explicar las asociaciones de tres propiedades observables, *A*, *B* y *C*, introduciendo los tres factores inobservables *L*, *M* y *N*.

La diferencia entre estas dos interpretaciones reside en que, frente a lo que ocurre en la «factorial», en la interpretación geométrica los términos teoréticos, λ, μ y ν, representan cosas que son observables en el mismo sentido en que lo son las representadas por α, β y γ, de suerte que la peculiaridad de los términos teoréticos estriba en su indeterminación. Pero estos dos sistemas deductivos que interpretan el cálculo se asemejan en que en uno y otro caso aquello a lo que pri-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

mero se otorga significado —para llevar a cabo tal interpretación— son las fórmulas extraídas, y no las iniciales, que son las que contienen los términos teoréticos: en ambos sistemas, las hipótesis de alto nivel, aun siendo *lógicamente anteriores* a las de nivel inferior —en el sentido de que las primeras sirven de premisas para deducir estas últimas— son *epistemológicamente posteriores* a ellas, en el sentido de que la interpretación de las fórmulas iniciales del cálculo, que representan dichas hipótesis de alto nivel, sigue a la de las fórmulas extraídas, que representan las de nivel inferior, y depende de ésta.

No obstante lo cual, es frecuentemente posible dar una interpretación de un cálculo determinado de forma tal que las hipótesis de alto nivel sean anteriores a las de nivel inferior tanto lógica como epistemológicamente. En la página 75 hemos dado un ejemplo de semejante tipo de interpretación del cálculo de la teoría trifactorial, al hacer que λ, μ y ν representasen, respectivamente, la clase de los cuadriláteros planos, la clase de las figuras planas equiláteras y la de las figuras planas equiángulas: en este caso las fórmulas iniciales, $\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu)$, $\beta \longleftrightarrow (\mu\nu)$ y $\gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda)$, valían para definir α como la clase de los cuadriláteros planos equiláteros, y β y γ de modo parecido. Si sustituíamos el símbolo α por «la clase de los rombos», la primera fórmula servía para definir el «rombo»; y si esta palabra no se encontraba en mi vocabulario, dicha fórmula permitía introducirla en él afirmando que era intercambiable con la expresión «cuadrilátero plano equilátero», a la que había otorgado ya un significado.

Si lo primero que se interpreta son los términos teoréticos, λ, μ y ν, y se emplean las fórmulas iniciales para definir α, β y γ a base de los significados de aquellos símbolos, las fórmulas iniciales quedarán interpretadas como expresión de proposiciones lógicamente necesarias: si «rombo» quiere decir simplemente cuadrilátero plano equilátero no es cuestión de hechos empíricos el que la clase de los rombos sea idéntica a la de los cuadriláteros planos equiláteros, ya que esto depende del modo en que se utilice el lenguaje, y en éste se ha definido la clase de los rombos de tal suerte que se satisfaga aquella identidad de clases.

Cuando tenemos ante nosotros dos sistemas deductivos interpretaciones del mismo cálculo, en el primero de los cuales la interpretación de las fórmulas iniciales —que contienen los términos teoréticos— sea epistemológicamente anterior a la de las fórmulas extraídas que no contienen tales términos, mientras que en el segundo ocurra lo contrario —que las fórmulas extraídas sean anteriores desde un punto de vista epistemológico—, puede decirse que el primer sistema

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

deductivo guarda con respecto al segundo la relación existente entre un *modelo* y su *teoría:* llamaremos al primero un modelo de la teoría que consista en el segundo, y a éste una teoría de la cual el primer sistema constituya un modelo. Cualquier teoría y cualquier modelo de ella —o cualquier modelo y cualquier teoría de la cual sea modelo— poseen la misma estructura formal, ya que modelo y teoría están representados por el mismo cálculo. Hay una correlación biunívoca entre las proposiciones de la teoría y las del modelo: las proposiciones consecuencias lógicas de las proposiciones de la teoría encuentran su correlato en otras del modelo que son consecuencias lógicas de los correlatos en el modelo de estas proposiciones de la teoría, y viceversa. Pero la teoría y el modelo tienen estructuras epistemológicas diferentes: en éste las premisas, lógicamente anteriores, determinan el significado de los términos que aparezcan en la representación de las conclusiones en el cálculo, mientras que en la teoría las consecuencias, lógicamente posteriores, fijan el significado de los términos teoréticos que se encuentren en la representación de las premisas en el cálculo. Por emplear de nuevo la metáfora del cierre de cremallera, el cálculo se une a la teoría por la parte de abajo y el cierre se mueve hacia arriba, en tanto que se une al modelo por la parte de arriba y el cierre se desplaza hacia abajo.

Utilizo la palabra «modelo» porque mi descripción de las relaciones existentes entre los dos sistemas deductivos representados por el mismo cálculo —entre el *modelo* y la *teoría*— es un intento de hacer más precisa la noción de modelo de una teoría científica, que es muy corriente en las discusiones acerca de la filosofía de la ciencia. Autores distintos emplean de modos distintos —aunque relacionados entre sí— este término de «modelo»; y la discriminación entre dos sistemas deductivos representados por el mismo cálculo —pero diferentes epistemológicamente— que expreso al utilizar las palabras correlativas «modelo» y «teoría», es análoga a la realizada por Heinrich Hertz, el más profundo filosóficamente de todos los grandes físicos del siglo XIX que escribieron sobre la filosofía científica.

Hertz dice que cuando tratamos de hacer inferencias sobre el futuro basándonos en nuestros conocimientos del pasado procedemos del modo siguiente: «Nos hacemos imágenes interiores o símbolos de los objetos externos, y de tal índole que las consecuencias necesarias de aquellas imágenes en el pensamiento sean siempre imágenes de las consecuencias necesarias de los objetos de los que son imágenes en la naturaleza... Cuando, a base de nuestras experiencias anteriores acumuladas, hemos logrado construir imágenes con las propiedades de-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

seadas, podemos rápidamente extraer por su mediación, como por medio de modelos, las consecuencias que en el mundo exterior sólo ocurrirán a lo largo de un gran período de tiempo o como resultado de nuestra propia intervención»[1]. Hertz se esfuerza por subrayar que, aunque «las imágenes son nuestra concepción de las cosas» y han de concordar con éstas en cuanto a satisfacer la condición de que sus consecuencias necesarias en el pensamiento sean las consecuencias necesarias de las cosas en la naturaleza, sin embargo, no es necesario para sus fines —los de disponer las proposiciones de una ciencia como la mecánica en un sistema deductivo unificado— que hayan de concordar con las cosas en ningún otro respecto; y asevera que, ya acontezca o no que haya algún otro punto de vista desde el cual estén de acuerdo nuestras concepciones con las cosas, se trata de un asunto del cual ni sabemos nada ni tenemos medios de descubrir nada por la experiencia. No está claro si las «imágenes»[2] de Hertz corresponden a lo que en el lenguaje de este libro son las fórmulas iniciales de un cálculo o a las interpretaciones de ellas; suponiendo que sea lo primero, sus «consecuencias necesarias en el pensamiento» serán las fórmulas extraídas en el cálculo que representen los hechos acerca del «mundo exterior» que sean consecuencias en la teoría, y el cálculo representará también el modo de funcionar de un modelo; y si suponemos lo segundo, las «consecuencias necesarias en el pensamiento» de las «imágenes» de Hertz serán proposiciones que correspondan —del modo en que corresponden las proposiciones acerca de un modelo— a proposiciones acerca del «mundo exterior». Pero, en cualquier caso, Hertz mantiene, contra quienes pidan que la realidad se parezca a sus imágenes, que el único parecido que se necesita es el de la estructura formal.

Si instauramos la noción de modelo, frente a la de teoría, del modo en que lo hemos propuesto, advertiremos que pensar en una teoría científica pensando acerca de un modelo de ella es otra manera de hacerlo en lugar de pensar explícitamente sobre el cálculo que la represente: pues reflexionar acerca del modelo es hacerlo acerca de una interpretación del cálculo que, tanto en lo que se refiere al orden en que se efectúe la interpretación como en cuanto al correspondiente a la deducción, se mueve en la misma dirección que el

---

[1] Del primer párrafo de la introducción de HERTZ a sus *Die Prinzipien der Mechanik* (Leipzig, 1894), publicados póstumamente. En mi cita he variado levemente el texto de la versión inglesa, *The Principles of Mechanics* (Londres, 1899), pág. 1.

[2] *Bilder*, en ocasiones *Vorstellungen*. En la primera frase citada, *innere Scheinbilder oder Symbole*.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

orden de las fórmulas que se extraigan dentro del cálculo. Así pues, utilizar el modelo es utilizar una interpretación del cálculo llana y directa, cuya comparación con la alambicada interpretación inversa en que consiste la teoría científica servirá para la mayoría de los fines de comparación entre el cálculo mismo y ésta.

En consecuencia, valerse de un modelo para reflexionar sobre la estructura de la teoría es, con frecuencia, el modo más conveniente de hacerlo, ya que evita el grado de conciencia de sí necesario para tener en las mientes a la vez el conjunto de proposiciones —dispuestas formando un sistema deductivo— que constituya la teoría y el conjunto de cláusulas o fórmulas dispuestas en orden de que conste el cálculo representante de aquélla: si al comparar expresamente una teoría y su cálculo exponemos aquélla utilizando los símbolos de su cálculo, es menester que al mismo tiempo «usemos» dichos símbolos (en la expresión de la teoría) y los «mencionemos» (al expresar el cálculo), función doble que fácilmente puede causar confusiones; y, además, las relaciones de extraibilidad entre las fórmulas del cálculo, aunque corresponderán a las de consecuencia lógica entre las proposiciones de la teoría, no serán idénticas a ellas. Por otro lado, si las comparaciones se llevan siempre a cabo entre la teoría y el modelo en vez de entre aquélla y el cálculo, las cláusulas que expresen una y otro podrán «usarse» sin tener que «mencionarse», y la relación que exista entre las proposiciones del modelo será la misma que se cumpla entre las de la teoría, a saber, relaciones de consecuencia lógica. Así pues, el pensar acerca de una teoría científica por mediación de un modelo de ella evita las complicaciones y dificultades ligadas a tener que pensar explícitamente sobre el lenguaje —o cualquier otra forma de simbolismo— en que se represente la teoría: la utilización de modelos permite un enfoque filosóficamente sencillo de la comprensión de la estructura de un sistema deductivo científico [8].

Desventajas de los modelos

Sin embargo, el empleo de modelos presenta serios peligros: lo suficientemente serios para que haya prescindido de alusiones a la posibilidad de estudiar las teorías científicas a través de la consideración de modelos para ellas hasta acabar con mi exposición del úl-

---

[8] En caso de que se dude de la compatibilidad de las hipótesis de nivel supremo de una teoría científica puede interpretarse el cálculo que represente ésta por medio

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

timo capítulo, que estaba montada sobre las relaciones entre un sistema deductivo científico y un cálculo que lo represente.

El primer peligro consiste en que se identifique la teoría con un modelo suyo, de suerte que se suponga que los objetos de que se ocupe éste —la interpretación en el modelo de los términos teoréticos del cálculo de la teoría— son en realidad iguales a los conceptos teoréticos de la teoría: se atribuirán de este modo a éstos unas propiedades pertenecientes a los objetos de un modelo, pero enteramente ajenos a la semejanza de estructura formal que es cuanto se precisa para las relaciones entre modelo y teoría. En otro tiempo, los modelos de las teorías químicas en que las moléculas aparecían como sistemas entrelazados de átomos y los modelos de teorías físicas con átomos como «sistemas solares» formados por partículas elementales separadas (electrones, protones, etc.) han llevado a mucha gente a suponer que los átomos —o los electrones— poseían otras características del modelo que precisamente las que hacían que éste fuese adecuado. Este peligro es menor ahora, cuando «han desaparecido las últimas huellas del antiguo átomo duro y másico», pero continúa, latente, siempre que se emplea un modelo: pensar en las teorías científicas por medio de modelos es indefectiblemente un pensar *como si*. Pero los átomos de hidrógeno no son sistemas solares, y sólo tiene utilidad pensar en ellos como si lo fuesen si no se deja de recordar constantemente que no lo son —el precio del empleo de modelos es una vigilancia perenne.

Mas existe un segundo peligro inherente al uso de modelos, peligro más sutil que el de proyectar sobre los conceptos de la teoría algunos de los rasgos empíricos de los objetos del modelo; reside en transferir la necesidad lógica de algunas características del modelo elegido a la teoría y, por tanto, en suponer, erróneamente, que la teoría —o parte de ella— tenga una necesidad lógica que en realidad sea ficticia. En su forma más crasa, podemos presentar ejemplos de esta tentación apoyándonos en modelos de nuestra teoría trifactorial.

Si construimos un modelo de ésta interpretando sus términos teoréticos, λ, μ y ν, como representantes de tres clases especificadas por tres

de un modelo para comprobar su compatibilidad. P. A. M. DIRAC, después de decir que «el objeto principal de la ciencia física no es el de proporcionarnos imágenes» y que «el que haya o no una imagen es cuestión de importancia sólo secundaria», continúa diciendo: «Sin embargo, podría ampliarse el significado de la palabra 'imagen' [*picture*] para que incluya cualquier *modo de mirar las leyes fundamentales que haga evidente su compatibilidad*» (*The Principles of Quantum Mechanics*, 3ª. ed. [Oxford, 1947], pág. 10; la cursiva es suya).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

propiedades observables, cabe interpretar las fórmulas iniciales del cálculo como definiciones de α, β y γ a partir de aquellos otros símbolos —a lo que se habrá concedido ya un significado—. Entonces las proposiciones del modelo representadas por estas fórmulas iniciales del cálculo serán proposiciones lógicamente necesarias, y, puesto que hemos interpretado las demás fórmulas iniciales como expresión de verdades lógicas acerca de las relaciones entre clases, todas las fórmulas iniciales del cálculo representarán proposiciones lógicamente necesarias. Pero las consecuencias lógicas de premisas de esta índole lógica son también proposiciones lógicamente necesarias, de suerte que todas las proposiciones del modelo tendrán esta necesidad lógica: las que no aparezcan en el sistema de clases puramente deductivo que consiste en la interpretación de la parte algebraica del cálculo (o cálculo de Huntington) no serán lógicamente necesarias en virtud de poseer el carácter de verdades lógicas ni de casos o ejemplificaciones de ellas, sino por ser consecuencias lógicas de proposiciones «verdaderas por definición». Ninguna parte del modelo será contingente, pues si bien en sus proposiciones entran cosas empíricas, la verdad de aquéllas no dependerá de cuáles sean tales cosas. No habrá diferencia empírica ni lógica alguna entre el modelo de la teoría trifactorial propuesto en la página 75, en el que λ, μ y ν representaban, respectivamente, la clase de los cuadriláteros planos, la de las figuras planas equiláteras y la de las figuras planas equiángulas, y un modelo en que dichas letras griegas representen tres clases especificadas por cualesquiera tres propiedades empíricas, *L*, *M* y *N* (de la misma categoría lógica, naturalmente) [4].

Hemos presentado esta tentación de una forma tan crasa que sería precisa mucha simpleza para caer en ella, y para argüir que, puesto que la proposición del modelo expresada por $(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma(\alpha\beta))$ es lógicamente necesaria, también lo es la proposición de la teoría que esta misma fórmula expresa. La tosquedad de la tentación reside en este caso en que todas las fórmulas iniciales carentes de variables sean definitorias —de α, β o γ—, lo cual se debe a que se las ha empleado precisamente para proporcionarnos definiciones de estos símbolos a base de las propiedades empíricas *L*, *M* y *N*: es claro, pues, que la razón de que las proposiciones iniciales del modelo sean lógicamente necesarias es que son verdaderas por definición; y la necesidad lógica

[4] Si dos de las clases, por ejemplo, las designadas por λ y μ, son mutuamente excluyentes, la clase designada por α será la clase nula; pero ello no podrá concluirse dentro del sistema deductivo: sólo sería una conclusión en éste si la proposición representada por $(\lambda\mu) \longleftrightarrow o$ fuese una premisa del sistema; pero entonces éste estaría representado por otro cálculo diferente, de modo que no sería modelo de la teoría.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

por virtud de una definición es tan palmariamente un asunto del modo de utilizar los símbolos que no se corre gran riego de traspasarla a la teoría, en la que es claro que tales símbolos se emplean en forma diferente.

La mayoría de los cálculos que se utilizan en la ciencia son más complicados que los que representan nuestras teorías trifactorial y cuadrifactorial, en las que todas las fórmulas en que aparecen los términos teoréticos son definitorias: pueden encontrarse en el cálculo fórmulas iniciales en que dichos términos aparezcan de forma distinta; en particular, puede contener fórmulas iniciales en las que los únicos términos que aparezcan —aparte de los símbolos que se interpreten como constantes o relaciones lógicas y de los que se utilicen como variables— sean términos teoréticos. Cuando en un cálculo aparecen semejantes fórmulas (a las que llamaremos, para abreviar, *fórmulas* λ), el problema de separar entre sí las hipótesis lógicamente necesarias y las lógicamente contingentes de entre todas las correspondientes a un sistema científico deductivo representado por dicho cálculo se complica mucho: pues una fórmula que se encuentre entre las fórmulas iniciales impone una restricción (sobre la interpretación del término o términos teoréticos que aparezcan en ella) análoga a la que impone una definición, y una proposición representada por una fórmula λ puede pretender, por tanto, que se la considere verdadera por definición; además, en un modelo en que las premisas incluyan proposiciones que refieran unas propiedades observables a otras, el que estas proposiciones sean o no lógicamente necesarias depende de qué propiedades sean aquéllas de que se ocupen las proposiciones del modelo. Así pues, puede haber modelos con la misma estructura formal que difieran entre sí en que en algunos las premisas sean lógicamente necesarias, mientras que en otros sean lógicamente contingentes; y cuando se piensa una teoría apoyándose en un modelo la cosa variará mucho según sea una u otra de estas dos categorías aquélla en que se encuentre éste.

Muchos filósofos reacios a admitir que la necesidad de una ley científica consista simplemente en ser una generalización verdadera que asocia la aparición de una propiedad empírica con la de otra han buscado para las leyes científicas una necesidad lógica o muy cercana a ella; y algunos han apoyado su postura en las características de dicho tipo de necesidad involucradas en la representación de las hipótesis de una teoría científica por medio de fórmulas o de otros medios de expresión que parecen representar naturalmente un sistema deductivo que contenga proposiciones lógicamente necesarias. Para

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

rechazar —según pretendo— la tesis de que exista algo objetivo en la necesidad causal por encima de una conjunción constante es esencial que desenmarañemos los elementos genuinos de necesidad lógica ínsitos en los sistemas deductivos científicos y en los modelos que se utilizan naturalmente para reflexionar sobre ellos. Lo que se necesita es, con palabras de Hertz, «distinguir netamente en nuestras imágenes entre lo que surja de una necesidad del pensamiento, lo que surja de la experiencia y lo que lo haga de nuestra arbitraria elección» [5]; para ello es conveniente abordar el asunto examinando primero un hecho sumamente pertinente acerca del pensamiento científico: a saber, que frecuentemente es posible construir teorías diversas para explicar un mismo conjunto de generalizaciones empíricas.

Teorías distintas pero equivalentes

La teoría trifactorial desarrollada en el último capítulo explicaba las tres generalizaciones empíricas representadas por las tres fórmulas

$$(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma(\alpha\beta)), \quad (\beta\gamma) \longleftrightarrow (\alpha(\beta\gamma)), \quad (\gamma\alpha) \longleftrightarrow (\beta(\gamma\alpha))$$

mediante las tres hipótesis representadas por estas otras:

$$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \longleftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda).$$

La explicación se efectuaba presentando un cálculo en el que estas tres últimas fórmulas se agregaban a las fórmulas iniciales de un cálculo algebraico, y en el que las tres primeras aparecían como fórmulas extraídas en él.

Hay muchas maneras diferentes de adjuntar fórmulas nuevas en que aparezcan los términos teoréticos λ, μ y ν, en calidad de nuevas fórmulas iniciales, a un cálculo algebraico, de modo que permita extraer las fórmulas en que no aparezcan tales términos. Por ejemplo, si añadimos al cálculo de Huntington (que es un cálculo algebraico), en lugar de

$$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \longleftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda),$$

estas otras nuevas fórmulas iniciales,

$$\alpha \longleftrightarrow ((\lambda\mu) \smile (\nu(\lambda'\mu'))), \quad \beta \longleftrightarrow ((\mu\nu) \smile (\lambda(\mu'\nu'))), \quad \gamma \longleftrightarrow ((\nu\lambda) \smile (\mu(\nu'\lambda'))),$$

pueden extraerse exactamente las mismas fórmulas vinculadoras de α, β y γ que era posible hacer en el cálculo original de la teoría tri-

[5] *Die Prinzipien der Mechanik*, pág. 10 (véase la versión inglesa, pág. 8).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

factorial[6]: puede decirse que estos dos cálculos son ***equivalentes en*** (α, β, γ); y, en caso de que admitamos que α, β y γ representen clases dadas por propiedades empíricas, podremos decir que son ***empíricamente equivalentes.*** El nuevo cálculo representa una teoría en la que la clase de las A está identificada con la clase de las cosas que sean L y M, o N y ni L ni M (o ambas cosas); teoría mucho más complicada que la teoría trifactorial sencilla, de modo que tiene que haber alguna razón positiva para que la prefiramos.

A esto se suma que sólo se la podría ampliar a una teoría cuadrifactorial modificando las fórmulas primitivas aisladas. Y en caso de que la primera fórmula se sustituyese por

$$\alpha \longleftrightarrow ((\lambda\mu) \cup ((\nu\rho)(\lambda'\mu'))) \text{ o por } \alpha \longleftrightarrow ((\lambda\mu) \cup ((\nu \cup \rho)(\lambda'\mu'))),$$

(con los cambios correspondientes en las otras dos), aun cuando sería posible extraer en estos cálculos las fórmulas que queremos, también podrían extraerse otras que no podrían sacarse en el cálculo original de la teoría cuadrifactorial. Por tanto, una de las razones que existen para elegir una teoría determinada para explicar un conjunto de generalizaciones empíricas es la posibilidad que ofrezca de recibir adjunciones oportunas con las que se expliquen nuevas generalizaciones —como ocurre con la teoría trifactorial original, pero no con la representada por el nuevo cálculo.

Hipótesis con conceptos teoréticos únicamente

Consideremos el cálculo (al que llamaremos C_1) obtenido añadiendo al cálculo de Huntington, en lugar de las seis fórmulas iniciales carentes de variables de la teoría cuadrifactorial,

$$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \longleftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda),$$
$$\delta \longleftrightarrow (\lambda\rho), \quad \varepsilon \longleftrightarrow (\mu\rho), \quad \varkappa \longleftrightarrow (\nu\rho),$$

estas otras seis, también libres de variables:

$$\alpha \longleftrightarrow ((\lambda\mu)(\nu' \cup \rho')), \quad \beta \longleftrightarrow ((\mu\nu)(\lambda' \cup \rho')), \quad \gamma \longleftrightarrow ((\nu\lambda)(\mu' \cup \rho')),$$
$$\delta \longleftrightarrow ((\lambda\rho)(\mu' \cup \nu')), \quad \varepsilon \longleftrightarrow ((\mu\rho)(\nu' \cup \lambda')), \quad \varkappa \longleftrightarrow ((\nu\rho)(\lambda' \cup \mu')).$$

En este cálculo, C_1, pueden extraerse todas las fórmulas que no contengan los términos teoréticos, λ, μ, ν y ρ, que podían extraerse en el cálculo de la teoría cuadrifactorial original (llamémosle C_0), junta-

[6] La resultante de eliminar λ, μ y ν de estas fórmulas es igual a la de eliminar estos mismos símbolos de este último cálculo.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

mente con la fórmula $(\alpha\kappa) \leftrightarrow o$ y todas las que quepa sacar de la adición de esta fórmula a C_0, entre ellas $(\beta\delta) \leftrightarrow o$ y $(\gamma\epsilon) \leftrightarrow o$.

Sin embargo, podemos construir otro cálculo, C_2, que difiera de C_0, en lo que respecta a sus fórmulas extraíbles que no contengan términos teoréticos, exactamente del mismo modo en que C_1 difiere de C_0, pero por adición de nuevas fórmulas iniciales a las de C_0, en lugar de hacerlo por modificación de éstas. Si adjuntamos a las seis fórmulas iniciales de C_0 carentes de variables esta otra, nueva,

$$(\lambda(\mu(\nu\rho))) \leftrightarrow o,$$

llegamos a un cálculo, C_2, en el que aparecen $(\alpha\kappa) \leftrightarrow o$ y todas las demás fórmulas de C_1 que no contenían términos teoréticos. En realidad, C_2 es más fuerte que C_1, en el sentido de que en él se encuentran todas las fórmulas de éste y otras además de ellas [7]; pero estas fórmulas suplementarias de C_2 no incluidas en C_1 contienen algunos de los términos teoréticos —o todos ellos—; en lo que respecta a las que no contienen ninguno, todas las extraíbles en C_1 lo son en C_2, y viceversa [8]: los cálculos C_1 y C_2 son equivalentes en $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \kappa)$.

Hay una diferencia entre estos dos cálculos que en muchas ocasiones tiene gran importancia. Cada una de las fórmulas iniciales carentes de variables de C_1 contiene, de igual modo que las de los cálculos de la teoría trifactorial y de la cuadrifactorial y las del cálculo de la página 115, tanto símbolos interpretables como representantes de entidades observables —los símbolos α, β, etc.— como términos teorético —λ, μ, etc.—, que no son susceptibles de tal interpretación empírica directa; en cada una de ellas encontramos uno de los símbolos α, β, etc., formando por sí solo el elemento izquierdo de la misma, mientras que en el derecho correspondiente únicamente aparecen términos teoréticos, λ, μ, etc. Mas entre las fórmulas primitivas del cálculo C_2 se halla, junto a las seis fórmulas respectivamente definitorias de α, β, γ, δ, ϵ y κ, una fórmula $(\lambda(\mu(\nu\rho))) \leftrightarrow o$, que pertenece a un tipo que no habíamos encontrado antes: pues en ella, además de aparecer el elemento o, que se encuentra en la parte algebraica del cálculo (cálculo de Huntington), entran como elementos primitivos solamente términos teoréticos.

Por virtud de la entrada en escena de este tipo nuevo de fórmula

---

[7] Mediante las reglas del cálculo de Huntington podemos extraer, a partir de $\lambda(\mu(\nu\rho))) \leftrightarrow o$, $(\lambda\mu) \leftrightarrow ((\lambda\mu)((\lambda' \cup \mu') \cup (\nu' \cup \rho')))$, de donde cabe extraer $(\lambda\mu) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow ((\lambda\mu)(\nu' \cup \rho'))$.

[8] La resultante de eliminar λ, μ, ν y ρ de las seis fórmulas iniciales de C_1 carentes de variables es la misma que la de eliminarlas de las siete correspondientes a C_2.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

en el cálculo C_2, podemos considerar que éste se ha construido a un nivel superior de alambicamiento que los cálculos en los que los términos teoréticos aparecían exclusivamente en fórmulas definitorias de elementos que representaban entidades observables. En los cálculos que contienen uno y otro tipo de fórmulas éstas representan, respectivamente, dos tipos de proposiciones de los sistemas deductivos correspondientes, proposiciones emparentadas con las que N. R. Campbell —y, en su seguimiento, F. P. Ramsey— ha distinguido con los nombres de «hipótesis» y «diccionario» de una teoría científica. Las «hipótesis» de Campbell consisten en «enunciados sobre ciertos conjuntos de ideas característicos de la teoría del caso»; y este autor las contrapone al «diccionario», consistente en «enunciados acerca de las relaciones entre estas ideas y otras de naturaleza distinta», siendo estas últimas tales que «sea posible determinar, independientemente de todo conocimiento de la teoría, si determinadas proposiciones en las que entren son verdaderas o falsas»[9]. Las «hipótesis» de Campbell se representarían mediante fórmulas en las que únicamente habría términos teoréticos (las fórmulas λ), mientras que su «diccionario» quedaría representado por fórmulas definitorias de elementos que estarían en lugar de entidades observables o por cualesquiera otras fórmulas que pudieran emplearse para extraer fórmulas representantes de proposiciones acerca de observables a partir de fórmulas que contengan términos teoréticos.

La distinción entre las «hipótesis» y el «diccionario» de Campbell (expresados, respectivamente, por fórmulas λ y, en nuestros ejemplos, por fórmulas definitorias de elementos representativos de observables) no es tan absoluta como pudiera parecer teniendo en cuenta lo que él mismo y Ramsey dicen de ella. Según hemos visto, exactamente el mismo conjunto de generalizaciones empíricas puede explicarse, bien por medio de un conjunto de proposiciones de diccionario, pero sin ninguna hipótesis separada acerca de los términos teoréticos, bien valiéndose de un conjunto de proposiciones de aquel tipo más una de estas hipótesis. Y, en realidad, cuando la parte algebraica común a ambos cálculos tiene un carácter apropiado —se trata, por ejemplo, del cálculo de Huntington o de cualquier otro que contenga las mismas fórmulas (es decir, cualquier álgebra booleana)— puede siempre cons-

[9] *Psysics, The Elements* (Cambridge, 1920), pág. 122. F. P. RAMSEY, en *The Foundations of Mathematics and other logical essays*, pág. 215, sigue a CAMPBELL con su dicotomía entre «axiomas y teoremas» y «diccionario»; pero, frente a lo que ocurre en el diccionario campbelliano, el de Ramsey estaría representado exclusivamente por fórmulas definitorias.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

truirse un cálculo dotado sólo de diccionario que sea equivalente en (α, β, etc.) a un cálculo dado cualquiera que contenga fórmulas λ además de diccionario [10].

No obstante lo cual, las hipótesis que se refieren sólo a los conceptos teoréticos (a las que llamaremos por comodidad *hipótesis campbellianas)*, y que están expresadas por fórmulas λ en el cálculo que represente el sistema deductivo aplicado, desempeñan un papel sumamente importante en la mayoría de las teorías científicas que utilizan conceptos teoréticos, independientemente de que podamos o no, con suficiente ingenio matemático, prescindir de ellas.

¿Son lógicamente necesarias las hipótesis campbellianas?

Como hemos podido darnos cuenta, cabe considerar que los términos teoréticos de un sistema científico representado por un cálculo estén definidos implícitamente por el conjunto de fórmulas iniciales que los contenga: definición implícita que se efectuará a base de las propiedades —o de otras cosas— observables que entren en las hipótesis de nivel ínfimo del sistema. Pero si algunas de las fórmulas iniciales son fórmulas λ (que han de interpretarse como representación de hipótesis campbellianas), parece paradójico decir que valgan para dar una definición implícita de λ, μ, etc. a base de observables, ya que los símbolos α, β, etc. que representan estos últimos no aparecen en dichas fórmulas. Surge entonces la inclinación a separar éstas de las demás fórmulas iniciales dotadas de términos teoréticos, y a decir que, mientras las que acabamos de citar sirven para definir implícitamente los términos teoréticos a base de los observables, las fórmulas λ expresan relaciones de los términos teoréticos entre sí; y es tentador continuar diciendo que, puesto que estas últimas no contienen símbolos que representen observables, las hipótesis campbellianas, que afirman las relaciones mutuas existentes entre los conceptos teoréticos, no están sujetas a contrastación empírica, y, por tanto, son proposiciones lógicamente necesarias.

La plausibilidad de este argumento aumenta por el hecho de que frecuentemente quepa interpretar un cálculo que contenga fórmulas λ

---

[10] Véase A. N. WHITEHEAD, *Universal Algebra*, pág. 60. En el lenguaje de Whitehead las fórmulas iniciales del cálculo C_1 son *ilimitantes* con respecto a λ, μ, ν y ρ tomadas simultáneamente, mientras que las del cálculo C_2 no lo son, ya que éstas imponen una restricción sobre los conjuntos de valores simultáneos de λ, μ, ν y ρ que puedan satisfacer las fórmulas.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

entre las iniciales como un sistema deductivo puro en el que aquellas fórmulas representen proposiciones que, sin discusión, sean lógicamente necesarias: es decir, que una teoría científica que contenga

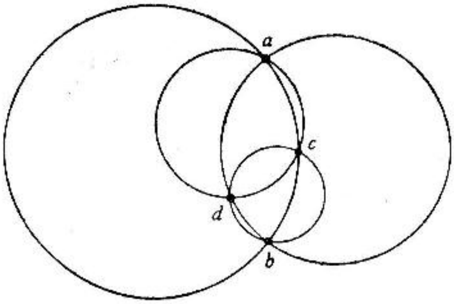


Fig. 4.

hipótesis campbellianas puede tener un modelo *puro*. Considérese, por ejemplo, el cálculo de tipo C_2 cuyas fórmulas iniciales incluyan la fórmula λ,

$$(\lambda(\mu(\nu\rho))) \longleftrightarrow o.$$

Interpretemos este cálculo del modo siguiente. Sean *a*, *b*, *c* y *d* cuatro puntos de un plano tales que ninguna terna de ellos se encuentre sobre una recta y que los cuatro no estén sobre una misma circunferencia [11]. Entonces, estos cuatro puntos determinarán cuatro círculos diferentes, correspondientes a la circunferencia $\{abc\}$, que pasa por los puntos *a*, *b* y *c*, a la $\{abd\}$, que pasa por los *a*, *b* y *d*, a la $\{acd\}$, que pasa por *a*, *c* y *d* y a la $\{bcd\}$, que pasa por *b*, *c* y *d* (véase la figura 4).

Admitamos que λ represente una clase determinada de objetos situados en puntos de la circunferencia $\{abc\}$, y que, de manera análoga, μ, ν y ρ representen clases determinadas de objetos situados respectivamente, en puntos de las circunferencias $\{abd\}$, $\{acd\}$ y $\{bcd\}$. Puesto que dos circunferencias distintas tienen como máximo dos puntos en común, la clase de objetos representada por $(\lambda\mu)$ estará constituida por objetos situados o en *a* o en *b*, la representada por $(\mu\nu)$ lo estará por objetos situados o en *a* o en *d*, etc.

[11] Hay que considerar que el que estos puntos no sean colineares ni cocíclicos se debe a proposiciones lógicamente necesarias acerca de *a*, *b*, *c*, y *d*: esto es, no se tomarán éstos como determinados por criterios empíricos, sino, por ejemplo, por ser (0, 0), (0, 1), (1, 2) y (1, 0), respectivamente, sus coordenadas cartesianas.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Las seis fórmulas iniciales carentes de variables de este cálculo —aparte de la fórmula λ—, es decir,

$$\alpha \longleftrightarrow (\lambda\mu), \quad \beta \longleftrightarrow (\mu\nu), \quad \gamma \longleftrightarrow (\nu\lambda),$$
$$\delta \longleftrightarrow (\lambda\rho), \quad \varepsilon \longleftrightarrow (\mu\rho), \quad \varkappa \longleftrightarrow (\nu\rho),$$

valdrán para definir cada uno de los símbolos α, β, γ, δ, ϵ y κ a base de los objetos que se encuentren en dos de los cuatro puntos (a, b, c y d) en que se intersecan las cuatro circunferencias, y las fórmulas derivadas representarán proposiciones lógicamente necesarias que impongan restricciones sobre la posición de los objetos de que se ocupe el modelo: así, la fórmula $(\alpha\beta) \longleftrightarrow (\gamma(\alpha\beta))$ representará la proposición según la cual la clase de los objetos situados tanto o en a o en b como o en a o en d es idéntica a la de los objetos situados tanto o en a o en c como a la vez o en a o en b y o en a o en d, y la fórmula $(\alpha\kappa) \longleftrightarrow o$ representará la proposición de que no existen objetos situados por una parte o en a o en b y por otra o en c o en d. Todas estas proposiciones son lógicamente necesarias si se admite una relación de estar situado tal que sea lógicamente imposible que un objeto esté situado en más de un punto y si —como habíamos supuesto— los cuatro puntos a, b, c y d eran todos distintos.

La necesidad lógica de las proposiciones referidas brota del hecho de que la fórmula λ inicial del cálculo C_2 —a saber, $(\lambda(\mu(\nu\rho))) \longleftrightarrow o$— representa, en la interpretación que acabamos de dar, una proposición que es consecuencia lógica de un teorema de la geometría pura: representa, en efecto, la proposición de acuerdo con la cual no existe objeto alguno que esté situado en la circunferencia $\{abc\}$ y en la $\{abd\}$ y en la $\{acd\}$ y en la $\{bcd\}$, lo cual equivale a decir que no hay objeto situado en la intersección común a estas cuatro circunferencias; pero si es imposible que éstas se intersequen en un punto, *a fortiori* no hay objeto que pueda encontrarse situado en semejante punto de intersección. Y la proposición de que cuatro circunferencias distintas, cada una de las cuales pase por una terna de puntos tomados de un conjunto fijo de cuatro puntos, no tienen punto común de intersección es un teorema de la geometría pura que se deducirá, en la mayoría de los sistemas deductivos geométricos, del teorema fundamental según el cual una circunferencia está determinada por tres puntos de ella: o sea, que dos circunferencias distintas no pueden tener tres puntos comunes [12].

---

[12] Pues supongamos que las cuatro circunferencias tengan un punto común de intersección, e; si éste fuese distinto de a y de b, las dos circunferencias $\{abc\}$ y $\{abd\}$ tendrían comunes los tres puntos a, b y e y serían idénticas; y si fuese a o b, la cir-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Si añadiésemos al cálculo C_2 las suficientes fórmulas iniciales suplementarias y reglas de juego para incluir un cálculo capaz de representar un sistema deductivo de la geometría pura, sería posible eliminar la fórmula λ citada —esto es, $(\lambda(\mu(\nu\rho))) \leftrightarrow o$— como fórmula inicial, ya que se la podría extraer de una de las fórmulas de la parte del cálculo interpretable como una geometría pura. Estas últimas expresarían proposiciones generales acerca de todos los puntos del plano, de todas las circunferencias, etc., que satisficiesen ciertas condiciones, y cabría escribirlas de modo tal que todos sus símbolos no interpretables como constantes lógicas fuesen variables[13], de suerte que la parte correspondiente del cálculo fuera un cálculo algebraico —entendiendo esta expresión en un sentido que constituiría una extensión natural del propuesto en la página 55—[14]. Escribiendo las fórmulas de este modo, las fórmulas iniciales del nuevo cálculo, C_3, no incluidas en su parte algebraica serán únicamente las seis fórmulas definitorias de α, β, γ, δ, ϵ y κ a base de λ, μ, ν y ρ, que serán las mismas que las fórmulas iniciales del cálculo C_0 no incluidas en su parte algebraica; por consiguiente, estos dos cálculos, aun coincidiendo en sus fórmulas iniciales carentes de variables, contendrán fórmulas derivadas carentes de variables diferentes: las fórmulas $(\lambda(\mu(\nu\rho))) \leftrightarrow o$ y $(\alpha\kappa) \leftrightarrow o$, por ejemplo, serán extraíbles en el C_3, pero no en el C_0.

Sin embargo, ello no debe sorprendernos. El cálculo-juego C_3 está dotado de un método de jugar más elástico que el de C_0, de forma que en el primero pueden realizarse jugadas que no están permitidas en el segundo: las fórmulas λ de C_3 proceden de la mayor fuerza formal de este cálculo, y su interpretación como proposiciones lógicamente necesarias no sale de la nada, sino del hecho de que se conceda una interpretación tal a los términos teoréticos del cálculo que pueda aplicarse la parte teorética de éste. En esta interpretación la necesidad lógica de la hipótesis campbelliana expresada por $(\lambda(\mu(\nu\rho))) \leftrightarrow o$ no procede de las clases determinadas de cosas que λ, μ, ν y ρ designen, sino del hecho de que admitamos que estas clases pertenecen

---

cunferencia $\{bcd\}$ pasaría por a o la $\{acd\}$ pasaría por b, y en uno y otro caso las cuatro circunferencias serían idénticas.

[13] Se necesitarán géneros diversos de variables, dotados de reglas de sustitución de variables correspondientemente diversas.

[14] Puede parecer extraño que llamemos cálculo *algebraico* a la representación de un sistema deductivo geométrico puro; pero es posible demostrar los teoremas de la geometría plana pura sin necesidad de utilizar ninguna proposición inicial específicamente geométrica —basta considerarlos como teoremas acerca de pares de números, con lo que se incorpora la geometría dentro del álgebra ordinaria.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

a cierta categoría lógica. El modelo es un modelo puro, pero su pureza se debe al material a partir del cual se ha construido, y no es característica alguna de la teoría de la que constituye un modelo.

Podemos ver que así es dando una interpretación parecida pero diferente al cálculo C_3, interpretación en la que las proposiciones representadas por las fórmulas λ sean lógicamente contingentes. Intrepretemos el cálculo empezando, como antes (pág. 120), por suponer que a, b, c y d sean cuatro puntos de un plano tales que ninguna terna de ellos sea colinear; pero en lugar de admitir que determinen cuatro círculos, pensemos que determinan cuatro conjuntos de tres líneas cada uno (llamados *ternas lineales*): una terna lineal $\langle abc \rangle$, formada por las tres rectas que pasan, respectivamente, por a y b, por b y c y por c y a; otra, $\langle abd \rangle$, que conste de las rectas ab, bd y da; otra, $\langle acd \rangle$, formada por las rectas ac, cd y da, y la última terna lineal, $\langle bcd \rangle$, constituida por las rectas bc, cd y db (véase la figura 5). (Las ternas citadas serán triángulos con los lados prolongados indefinidamente.) Sean ahora e, f y g, respectivamente, las intersecciones de las líneas ab y cd, de ad y bc, y de ac y bd (los «puntos diagonales» del cuadrilátero $adbc$); como en la interpretación anterior, supongamos que λ represente cualquier clase determinada de objetos situados en los puntos de la terna lineal $\langle abc \rangle$ y, de modo análogo, que μ, ν y ρ representen cualesquiera clases determinadas de objetos situados, respectivamente, en puntos de la terna lineal $\langle abd \rangle$, de la $\langle acd \rangle$ y de la $\langle bcd \rangle$. Entonces, la clase de objetos representada por $(\lambda\mu)$ consistirá en los objetos que estén situados o en la línea ab —común a las dos ternas lineales— o en el punto f o en el punto g, la representada por $(\mu\nu)$ consistirá en los situados o en la línea ad o en e o en g, la representada por $(\nu\lambda)$ estará formada por los que haya o en ac o en e o en f, y así sucesivamente. Las seis fórmulas iniciales carentes de variables de este cálculo —aparte de la fórmula λ— valdrán para definir cada uno de los símbolos α, β, γ, δ, ϵ y κ a base de los objetos que se encuentren o bien sobre una de las seis líneas o en uno de los puntos e, f o g, y las fórmulas derivadas para cuya extracción no se utilice

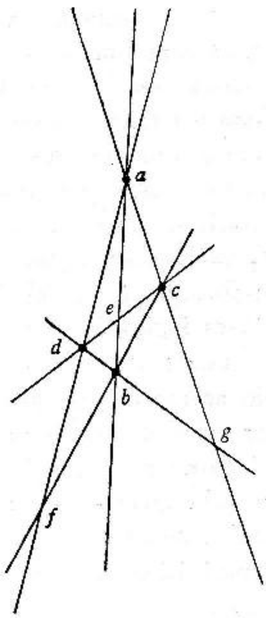


Fig. 5.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

la fórmula λ representarán proposiciones lógicamente necesarias que impondrán restricciones sobre la situación de los objetos: así, la fórmula $(\alpha\beta) \leftrightarrow (\gamma(\alpha\beta))$ representará la proposición según la cual la clase de los objetos situados, tanto o bien sobre la línea *ab* o en *f* o en *g*, como o bien sobre la línea *ad* o en *e* o en *g*, es idéntica a la clase de los situados a la vez, o bien sobre la línea *ac* o en *e* o en *f*, y tanto o bien sobre *ab* o en *f* o en *g* como o bien sobre *ad* o en *e* o en *g*. Pero la proposición representada por la fórmula λ inicial $(\lambda(\mu(\nu\rho))) \leftrightarrow o$ no es lógicamente necesaria, ya que existen puntos comunes a las tres ternas lineales —a saber, los puntos *e*, *f* y *g*—, de manera que dicha proposición es o no verdadera según existan o no objetos de la clase prescrita situados en uno o en varios de estos últimos puntos; lo cual es una cuestión empírica si (como venimos suponiendo) se trata de una cuestión empírica el que haya o no un objeto del género especificado en cada uno de los lugares que le estén permitidos ocupar. Y, análogamente, las fórmulas derivadas cuya extracción se apoye en la fórmula λ inicial $(\alpha\kappa) \leftrightarrow o$, por ejemplo, representarán proposiciones lógicamente contingentes.

Por tanto, a toda teoría científica cuyas generalizaciones empíricas acerca de seis propiedades observables se expliquen presentándolas como consecuencias lógicas de hipótesis que vinculen dichas propiedades a cuatro factores teoréticos juntamente con una hipótesis campbelliana —que afirme una interconexión entre estos factores— se le puede hacer corresponder, ya un modelo en que la hipótesis campbelliana sea una verdad lógicamente necesaria, ya un modelo en que sea una proposición lógicamente contingente. Las intersecciones de las cuatro circunferencias constituyen un ejemplo del primer tipo de modelos, y las de las cuatro ternas lineales coplanares un ejemplo del segundo [15]. En este caso, la diferencia entre los dos modelos —por lo demás parecidísimos— se debe a la diferencia geométrica entre un sistema de cuatro círculos y uno de cuatro ternas lineales tales que cada circunferencia y cada terna lineal pase por tres puntos de un conjunto de cuatro situados en un plano: el sistema de circunferencias que satisfaga esta condición no puede tener ningún punto común de intersección, mientras que cualquier sistema de ternas lineales que la

[15] Si los cuatro puntos que determinan las cuatro ternas lineales no fuesen coplanares (es decir, si en la figura de la página 123 imaginásemos que el punto *a* estuviera elevado por encima del plano del papel, en el que se encuentran *b*, *c* y *d*) las líneas *ab* y *cd*, las *ad* y *bc* y las *ac* y *bd* no se cortarían, respectivamente, en *e*, *f* y *g*, y este modelo se parecería al de las circunferencias secantes entre sí en tener una hipótesis campbelliana lógicamente necesaria.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

cumpla tiene tres puntos comunes —los puntos diagonales del cuadrilátero—; y esta diferencia geométrica es consecuencia del hecho de que, frente a lo que ocurre con un par de ternas lineales, un par de circunferencias con dos puntos comunes no puede tener un tercer punto común conservando a la vez la no identidad entre ambas.

Si utilizamos el modelo de las circunferencias secantes para reflexionar acerca de nuestra teoría habremos de pensar en la hipótesis campbelliana de ésta como en una consecuencia lógicamente necesaria de una proposición geométrica, mientras que si nos valemos del modelo de las ternas lineales secantes corresponderá pensar en una proposición contingente; y según prefiramos una u otra de estas alternativas tendremos que escoger uno u otro de los modelos (es decir, si es que queremos reflexionar sobre la teoría mediante modelos). En caso de que esperemos ampliar nuestra teoría adjuntándole nuevas proposiciones iniciales de la misma forma que sus proposiciones de este mismo género, pero referentes a un número mayor de conceptos teoréticos, habrá razones para elegir la primera alternativa; pues entonces sería posible que las nuevas hipótesis campbellianas del modelo fuesen consecuencias del teorema geométrico del que era ya consecuencia la antigua, y de ocurrir tal cosa no sería necesario añadir tales hipótesis nuevas de esta índole en calidad de nuevas proposiciones iniciales: la geometría del modelo las aportaría por sí misma, de igual forma que lo había hecho con la antigua hipótesis campbelliana [16]. Pero si contamos con ampliar nuestra teoría añadiéndole, como proposiciones iniciales, hipótesis campbellianas de una forma lógica nueva, probablemente convendrá más elegir la segunda alternativa y utilizar, por ello, un modelo en que tanto las hipótesis antiguas de esta naturaleza como las nuevas aparezcan como proposiciones contingentes; pues de otro modo habría unas hipótesis campbellianas del modelo que serían lógicamente necesarias y otras que serían contin-

[16] El modelo de círculos secantes, que tenía por finalidad ser comprensible mediante un diagrama, no hace ver claramente esta característica. Podemos construir un modelo apropiado en este sentido suponiendo que λ, μ, ν y ρ representen subclases determinadas cualesquiera de las clases de circunferencias que pasan, respectivamente, por *a*, por *b*, por *c* y por *d;* podemos ahora ampliarlo de suerte que incluya un nuevo factor sin más que admitir que σ represente cualquier subclase determinada de la clase de circunferencias que pase por un quinto punto, *e*, que no sea cocíclico con ninguna tríada tomada de los cuatro puntos *a, b, c* y *d;* entonces, las nuevas fórmulas λ,

$$(\lambda(\mu(\nu\sigma)))\longleftrightarrow o,\ (\lambda(\mu(\rho\sigma)))\longleftrightarrow o,\ (\lambda(\nu(\rho\sigma)))\longleftrightarrow o,\ (\mu(\nu(\rho\sigma)))\longleftrightarrow o,$$

representarán, como la fórmula λ antigua $(\lambda(\mu(\nu\rho)))\longleftrightarrow o$, hipótesis campbellianas lógicamente necesarias, que serán consecuencias de identidades aritméticas acerca de las coordenadas de los puntos *a, b, c* y *d*.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

gentes (a menos de que diese la casualidad de que las nuevas, aun teniendo una forma lógica distinta de la de las antiguas, fuesen también deductibles de la lógica del modelo); lo cual tendería a producir una gran confusión, ya que nos sentiríamos tentados a pensar que algunas de las hipótesis campbellianas de la teoría eran de condición distinta a la de las demás [17].

Estas consideraciones ponen de manifiesto que el hecho de que algunas o todas las hipótesis campbellianas de una teoría correspondan en un modelo a proposiciones lógicamente necesarias no las separa en modo alguno de las demás hipótesis de esa clase que se encuentren en dicha teoría: el hecho de que puedan existir modelos convenientes a mano en que las hipótesis campbellianas sean rasgos lógicamente necesarios de los mismos no convierte las correspondientes de la teoría en lógicamente necesarias, del mismo modo que el hecho de que las fórmulas iniciales definitorias del cálculo común a la teoría y al modelo representen en éste proposiciones verdaderas por definición no hace que las interpretaciones de tales fórmulas en la teoría sean lógicamente necesarias. Incluso puede ocurrir que no sea lógicamente necesario aquello que se represente por una fórmula del tipo $\theta \longleftrightarrow \varphi$, ya que cabe emplear ésta no para dar otro nombre a uno y el mismo concepto teorético, sino para expresar el hecho de que un concepto de esta índole utilizado en un sistema deductivo científico (por ejemplo, la óptica) sea el mismo que otro utilizado en otro sistema deductivo científico (por ejemplo, el electromagnetismo) cuyas hipótesis de nivel ínfimo tengan un objeto distinto que las del primer sistema. La identificación maxwelliana de las ondas luminosas con ondas electromagnéticas de cierta gama de longitudes de onda ha tenido el efecto de incluir el sistema deductivo de la óptica en el del electromagnetismo, como subsistema de él; unificación que no deja de ser una hipótesis empírica porque, una vez llevada a cabo, resulte redundante el término teorético «onda luminosa» [18].

---

[17] Esta tentación subyace, latente, al modelo geométrico tetradimensional de Minkovski para la teoría de la relatividad, en el que la velocidad de la luz aparece como la razón entre las unidades de medida según tres de los ejes y según el cuarto eje (multiplicada por $\sqrt{-1}$), con lo que se convierte en un rasgo lógicamente necesario de este modelo.

[18] Sir ARTHUR EDDINGTON ha dicho que «no podemos incluir la identidad entre la luz y las ondas electromagnéticas entre las hipótesis inferiores a la física, ya que se encuentra totalmente fuera de sus dominios el estudio de cómo despierte en la conciencia la sensación llamada luz por efecto de la estimulación del nervio óptico por las ondas electromagnéticas» *(The Philosophy of Physical Science* [Cambridge, 1939], pág. 44 [versión castellana, *La filosofía de la ciencia física*, Buenos Aires,

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Si es posible construir un modelo puramente matemático de una teoría científica su construcción ofrece muchas ventajas: pues será más fácil deducir nuevas proposiciones de nivel ínfimo en el modelo —a las que corresponderán en la teoría nuevas generalizaciones empíricas, que tendremos, pues, a nuestra disposición para someterlas a contraste mediante observaciones— si las de nivel superior son teoremas matemáticos que podamos conglobar con otros ya conocidos, formando un sistema deductivo puro de gran alcance y fuerza; y cabe la posibilidad de deducir tales proposiciones de alto nivel a partir de teoremas acerca de otros conceptos matemáticos más fundamentales, lo cual sugerirá la extensión hacia arriba de la teoría por admisión de hipótesis referentes a conceptos teoréticos que correspondan a estos últimos conceptos matemáticos, hipótesis que se convertirán en las proposiciones iniciales de la teoría [19].

Es frecuente que presente varias ventajas la construcción de un modelo en el que algunas de las proposiciones iniciales —si no todas— sean lógicamente necesarias. Así ocurrirá cuando queramos examinar al mismo tiempo varias teorías científicas que tengan en común algunas hipótesis de nivel supremo, pero difieran en cuanto a las demás: entonces puede ser conveniente reflexionar sobre ellas por medio de un modelo en el que las proposiciones iniciales correspondientes a las hipótesis de nivel sumo comunes sean lógicamente necesarias, mientras que sean contingentes las correspondientes a hipótesis que sean diferentes de una teoría a otra. Consideración que se refuerza cuando alguna de las hipótesis de nivel máximo común a varias teorías pertenece al tipo denominado «postulado de impotencia» por sir Edmund Whittaker [20]. Son éstos proposiciones que aseveran la imposibilidad, física o lógica, de hacer algo: por ejemplo, de construir

Edit. Sudamericana, 1944, págs. 69 y sig.]); pero las ondas luminosas que la teoría de Maxwell identifica con ondas electromagnéticas son conceptos teoréticos introducidos en la óptica para explicar generalizaciones empíricas que se refieren (entre otras cosas) a «la sensación llamada luz»; y forma parte del dominio de la física la explicación de semejantes generalizaciones empíricas: la teoría de Maxwell, al subsumir las leyes ópticas bajo las del electromagnetismo, amplió la referencia empírica de la teoría electromagnética hasta abarcar los hechos observables que habían constituido antes el dominio especial de la óptica.

[19] En la ciencia de la mecánica se ha introducido de este modo el concepto teorético de la *acción*.

[20] *From Euclid to Eddington* (Cambridge, 1949), págs. 58 y sigs. Si bien Whittaker distingue los postulados de impotencia de las proposiciones lógicamente necesarias («fácilmente podemos imaginar un universo en el que fuesen falsos todos los postulados físicos de impotencia»), habla de ellos como de «principios *a priori*»; expresión con la que parece referirse tan sólo a hipótesis de un grado de generalidad sumamente elevado, muy distantes de «los hechos experimentales».

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

una máquina de movimiento perpetuo o de medir simultáneamente la posición y el momento exactos de una partícula física. Estas proposiciones desempeñan actualmente un papel muy grande en las teorías fundamentales de la física, de suerte que se llega a muchas teorías físicas subsidiarias combinando algunas de ellas con otras hipótesis menos generales; además, estas hipótesis de impotencia tienen una forma muy conveniente para su representación matemática, de modo que al enunciado en la teoría de una imposibilidad física corresponderá el de una imposibilidad lógica en el modelo, siendo a menudo fácil construir un modelo dotado de esta correspondencia [21].

Sin embargo, por conveniente y matemáticamente elegante que pueda ser la utilización de un modelo con proposiciones lógicamente necesarias, no valdrá de modelo para la teoría a menos que esté en correspondencia con sus consecuencias empíricamente contrastables. Sir Arthur Eddington, manteniendo en una forma extrema la tesis de que las leyes fundamentales de la física son «epistemológicas», «enteramente subjetivas» y susceptibles de ser conocidas *a priori,* ha dicho que «todo lo que pedimos a las observaciones son pruebas de identificación: que las entidades denotadas por ciertos símbolos de la matemática sean las que el físico experimental reconoce bajo los nombres de 'protón' y 'electrón'» [22]; pero esta petición es mucho más constringente de lo que Eddington sospechaba, pues exige que lo que decida qué hipótesis se ha de adoptar —y, por consiguiente, cuál es el modelo matemático apropiado— sea el criterio del experimentador para la aplicación de los términos teoréticos (o sea, la contrastación experimental de las generalizaciones empíricas deducidas de las hipótesis que contengan los términos teoréticos).

El resultado final de esta discusión algo complicada es que ningún reconocimiento de la condición de las proposiciones de nivel sumo del modelo de una teoría —en cuanto a que sean lógicamente necesarias o contingentes— constituye razón alguna para suponer que las hipótesis de máximo nivel de la teoría misma sean lógicamente necesarias.

---

[21] Por ejemplo, el modelo de circunferencias secantes para representar la imposibilidad fáctica de reunir las cuatro propiedades L, M, N, y R (pág. 120), y el modelo minkovskiano de cono tetradimensional para la teoría de la relatividad, en el que la imposibilidad lógica corresponde a la imposibilidad física de enviar un mensaje con velocidad mayor que la de la luz.

[22] *Relativity Theory of Protons and Electrons* (Cambridge, 1936), pág. 3 —véase también *The Philosophy of Physical Science*, pág. 134 [versión castellana citada, págs. 148 y sigs.]—. Estaría fuera de lugar aquí discutir en detalle el «subjetivismo selectivo» en que consistía la filosofía eddingtoniana de la física; en *Mind*, n. s., vol. 38 (1929), págs. 409 y sigs., y vol. 49 (1940), págs. 455 y sigs., pueden verse mis comentarios a algunos de sus argumentos.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Las hipótesis campbellianas de una teoría científica, aun cuando no se refieren directamente a entidades observables, valen para relacionarlas entre sí, ya que imponen restricciones a los conceptos teoréticos y permiten de este modo que se deduzcan generalizaciones empíricas sobre observables —que no podrían deducirse solamente a partir de las hipótesis que refieren los observables a los conceptos teoréticos—. Como hemos visto, con frecuencia es posible construir una teoría que no contenga hipótesis iniciales campbellianas y que sea empíricamente equivalente a otra que las contenga (equivalente en el sentido de que en cada una de ellas puedan deducirse exactamente las mismas generalizaciones empíricas acerca de propiedades observables que en la otra); tomadas en conjunto, las proposiciones iniciales de la teoría dotada de hipótesis campbellianas serán lógicamente más fuertes que las de la teoría empíricamente equivalente que no contenga hipótesis de esta índole [23], pero esta su fuerza suplementaria no procede de que haya parte ninguna de las proposiciones iniciales de la primera que sea lógicamente necesaria, sino de haber «preferido arbitrariamente» el empleo de una teoría más fuerte en lugar de otra más débil equivalente empíricamente a ella.

Al construir una teoría dedicada a explicar ciertas generalizaciones empíricas aceptadas tenemos que proponer un conjunto de hipótesis —algunas de las cuales podrán ser campbellianas— con suficiente fuerza lógica para que las generalizaciones empíricas conocidas sean consecuencias lógicas de dicho conjunto. Está en nuestra mano preferir un conjunto más fuerte de lo que necesitaría ser, ya porque permita deducir más generalizaciones empíricas, ya porque con él se puedan deducir más proposiciones que vinculen los conceptos teoréticos con los observables; y podemos hacer tal cosa, bien porque el sistema matemático que se necesite en la teoría más fuerte sea más sencillo, porque ésta tenga un modelo más satisfactorio intuitivamente o porque la prefiramos pensando en su posible ampliación en el futuro; pero ello no entraña que haya de proceder de una «necesidad del pensamiento»: la tercera alternativa de Hertz [24] es la verdadera —procede de una preferencia que, aun no siendo arbitraria en el sentido de que no puedan darse buenas razones a su favor, es una «elección arbitraria» en el sentido de que podría haberse hecho otra elección igualmente coherente con lo que piden la lógica pura y la experiencia.

[23] En el cálculo C_1 (pág. 116) puede extraerse la fórmula

$$((\lambda(\mu(\nu\rho)))\,(\alpha\smile(\beta\smile(\gamma\smile(\delta\smile(\varepsilon\smile\varkappa))))))\longleftrightarrow o,$$

que es más débil que la $(\lambda(\mu(\nu\rho)))\longleftrightarrow o$ del cálculo C_2.

[24] Véase más arriba, en la página 115.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Hipótesis fundamentales y fórmulas estériles

Hemos visto que no hay ninguna razón para tomar algunas de las hipótesis que constituyan las proposiciones iniciales de una teoría científica y asumir que sean lógicamente necesarias: es evidente que su conjunto es contingente, ya que la teoría que contiene tales hipótesis habrá de ser abandonada si la observación nos enseña que una cualquiera de las generalizaciones empíricas consecuencias de su conjunto es falsa; y es muy fácil que la nueva teoría que hubiera de construirse en tal caso en lugar de la rechazada pudiera obtenerse a partir de ésta reemplazando una de las proposiciones iniciales antiguas por una nueva hipótesis y dejando las demás inalteradas. En el caso de una ciencia adelantada, como la física, casi todas las teorías contienen gran número de hipótesis, varias de las cuales son comunes a diferentes ramas de esta ciencia; y si se hace preciso rechazar una de tales teorías por virtud de resultados experimentales, mientras que las demás se mantienen, probablemente convendrá no rechazar las hipótesis comunes a dichas diversas teorías. Algunas hipótesis (por ejemplo, la ley de la conservación de la energía) pueden aparecer en tal número de teorías, y desempeñar un papel al parecer tan irremplazable en la mayoría de ellas que nos decidamos a ejecutar casi cualesquiera otros cambios en una teoría que las contenga antes que abandonarlas; entonces cada una de estas hipótesis presentará —dentro del contexto de las teorías en que aparezca— el modo característico de funcionar de una proposición lógicamente necesaria: el de no estar sujeta a ninguna contrastación empírica [25]. Mas, pese a comportarse dentro de tal contexto como si fuese lógicamente necesaria, no será auténticamente tal cosa: bajo circunstancias suficientemente distintas la rechazaremos, por muy «fundamental» que la hayamos considerado, por no ser útil para explicar los hechos observados (como ha ocurrido recientemente, en verdad, con la «ley» de la conservación de la energía). De modo que el hecho de que estemos justificados en ofrecer gran resistencia a expulsar una hipótesis fundamental determinada de lo que consideremos ser nuestros conocimientos científicos no quiere decir que hayamos de adherirnos a ella pase lo que pase; y actualmente es menos probable que se olvide la correctibilidad de todas las hipótesis científicas de lo que lo era hace cincuenta años, antes de

---

[25] Por esta razón Arthur Pap llama a estas hipótesis «funcionalmente» o «contextualmente» *a priori* *(The A Priori in Physical Theory* [Nueva York, 1946]).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Hipótesis fundamentales y fórmulas estériles

Hemos visto que no hay ninguna razón para tomar algunas de las hipótesis que constituyan las proposiciones iniciales de una teoría científica y asumir que sean lógicamente necesarias: es evidente que su conjunto es contingente, ya que la teoría que contiene tales hipótesis habrá de ser abandonada si la observación nos enseña que una cualquiera de las generalizaciones empíricas consecuencias de su conjunto es falsa; y es muy fácil que la nueva teoría que hubiera de construirse en tal caso en lugar de la rechazada pudiera obtenerse a partir de ésta reemplazando una de las proposiciones iniciales antiguas por una nueva hipótesis y dejando las demás inalteradas. En el caso de una ciencia adelantada, como la física, casi todas las teorías contienen gran número de hipótesis, varias de las cuales son comunes a diferentes ramas de esta ciencia; y si se hace preciso rechazar una de tales teorías por virtud de resultados experimentales, mientras que las demás se mantienen, probablemente convendrá no rechazar las hipótesis comunes a dichas diversas teorías. Algunas hipótesis (por ejemplo, la ley de la conservación de la energía) pueden aparecer en tal número de teorías, y desempeñar un papel al parecer tan irremplazable en la mayoría de ellas que nos decidamos a ejecutar casi cualesquiera otros cambios en una teoría que las contenga antes que abandonarlas; entonces cada una de estas hipótesis presentará —dentro del contexto de las teorías en que aparezca— el modo característico de funcionar de una proposición lógicamente necesaria: el de no estar sujeta a ninguna contrastación empírica [25]. Mas, pese a comportarse dentro de tal contexto como si fuese lógicamente necesaria, no será auténticamente tal cosa: bajo circunstancias suficientemente distintas la rechazaremos, por muy «fundamental» que la hayamos considerado, por no ser útil para explicar los hechos observados (como ha ocurrido recientemente, en verdad, con la «ley» de la conservación de la energía). De modo que el hecho de que estemos justificados en ofrecer gran resistencia a expulsar una hipótesis fundamental determinada de lo que consideremos ser nuestros conocimientos científicos no quiere decir que hayamos de adherirnos a ella pase lo que pase; y actualmente es menos probable que se olvide la correctibilidad de todas las hipótesis científicas de lo que lo era hace cincuenta años, antes de

---

[25] Por esta razón Arthur Pap llama a estas hipótesis «funcionalmente» o «contextualmente» *a priori* (*The A Priori in Physical Theory* [Nueva York, 1946]).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

que acaecieran todas las revoluciones sucesivas que las llegadas de la teoría de la relatividad y de la mecánica cuántica han producido en la física.

La cuestión se ha complicado, debido al hecho de que la aceptación de una hipótesis científica como parte de nuestros conocimientos científicos lleva consigo frecuentemente el efecto de que volvamos a definir los términos que aparezcan en la expresión de tal hipótesis de tal modo que ésta se vuelva una proposición verdadera por definición. Por ejemplo, puesto que he aprendido el empleo de la expresión «átomo de hidrógeno» como término teorético utilizado en un sistema deductivo de química fundado sobre la teoría atómica de Dalton, en el que los distintos átomos químicos son las unidades de que se componen las moléculas, empleo la cláusula «todo átomo de hidrógeno consta de un protón y un electrón» para expresar una proposición contingente; por consiguiente, «átomo de hidrógeno» no significa para mí nada acerca de su constitución interna: su significado se encuentra determinado por el lugar que ocupa tal expresión como término teorético en una teoría que explica generalizaciones empíricas acerca de muestras de un gas obtenido sumergiendo trozos de cinc en ácido clorhídrico, gas que arde con llama casi invisible y que da lugar a agua como producto de su combustión. Mas una persona que haya aprendido mucha física antes de haber saludado la química puede muy bien haber aprendido primero el empleo de «protón» y «electrón» como términos teoréticos de la física atómica, y haberse enterado después del empleo de la expresión «átomo de hidrógeno» significando el sistema atómico consistente en un protón y un electrón; y para esta persona la cláusula «todo átomo de hidrógeno consta de un protón y un electrón» expresará una proposición lógicamente necesaria, ya que será verdadera por definición.

¿Qué ocurrirá si esta persona aprende química? Existen dos posibilidades. O bien aprenderá esta ciencia independientemente de su conocimiento de la física atómica, y en este caso considerará que la expresión «átomo de hidrógeno» tiene un significado diferente en un contexto químico que cuando se la emplea en un contexto de esta otra ciencia: la aprenderá como término teorético de la química en cuanto una ciencia distinta y separada, y aceptará luego la proposición contingente según la cual el átomo de hidrógeno químico es idéntico al de la física atómica de una forma parecida a como Maxwell aceptaba la proposición contingente de que las ondas luminosas son ondas electromagnéticas. O bien tal persona sólo aprenderá la química que sea deductible de las teorías aceptadas de la física atómica; en este otro

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

caso los términos teoréticos de la rama de esta ciencia que él llame química serán los de la misma física atómica —«protón», «electrón», etcétera—: no habrá términos teoréticos específicamente químicos, ni conceptos químicos contrapuestos a los físicos, y continuará utilizando la expresión «átomo de hidrógeno» como sinónimo de «sistema consistente en un protón y un electrón» —como abreviatura de una expresión que expresa un concepto físico compuesto (una construcción lógica a partir de conceptos físicos) y en absoluto como término teorético por sí mismo.

No es que quiera negar que en la representación de un sistema deductivo científico pueden aparecer pertinentemente algunas cláusulas o fórmulas cuya función sea la de introducir símbolos que permitan escribir otras cláusulas o fórmulas con mayor brevedad de la que sería posible sin ellas; pero se trata de cláusulas o fórmulas *estériles*, y los símbolos que introducen son formalmente pleonásticos: es posible construir un cálculo que represente igualmente el sistema deductivo científico y que no contenga aquéllas ni éstos; y en este tipo de cálculo ninguna de las fórmulas que expresen hipótesis del sistema expresará proposiciones que sean lógicamente necesarias.

La confusión procede de que a menudo es posible interpretar exactamente el mismo cálculo como representación de un sistema deductivo científico de modo que un conjunto de símbolos sea formalmente pleonástico o como representación de otro sistema de modo que otro conjunto de símbolos caiga dentro de esta última caracterización; y, como es natural, el mero examen del cálculo no indica qué interpretación es la que se le da. A medida que la ciencia se desarrolla y que cada cálculo apropiado para representar el sistema científico en un estado determinado de los conocimientos se incorpora dentro de otro cálculo más amplio, propio para la representación de un sistema más desarrollado, es casi seguro que algunos de sus símbolos pasarán a ser pleonásticos, y algunas de sus fórmulas a estériles: por ejemplo, «átomo de hidrógeno» puede dejar de funcionar como término teorético de un sistema deductivo químico, y hacerlo pleonásticamente, o sea, no como término teorético, sino como abreviatura de una construcción lógica formada a partir de otros términos teoréticos de un sistema deductivo físico-químico, dotado, entre sus hipótesis, de una proposición lógicamente necesaria por ser verdadera por definición. Lo normal es que, cuando ocurra semejante transformación y un símbolo utilizado hasta el momento como término teorético se convierta en pleonástico, se produzca asimismo un cambio en sentido opuesto, y un símbolo que había tenido este carácter empiece a utili-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

zarse como genuino término teorético. Los «convencionalistas», que han destacado el hecho de que una cláusula que en un instante dado exprese una hipótesis científica contingente puede llegar a expresar una proposición lógicamente necesaria en virtud de un «convenio» o de una «definición disfrazada», no han otorgado siempre suficiente importancia al hecho de que también acontecen los cambios inversos: si es posible que cualquier cláusula se emplee para expresar una proposición verdadera por virtud de un convenio, exactamente lo mismo puede no emplearse así. Pero ya existan o no tales transformaciones compensatorias, es imposible modificar la interpretación del cálculo que represente un sistema científico de tal modo que todos los símbolos pasen a ser pleonásticos; y en cualquier momento se puede traducir un cálculo interpretado de suerte que contenga una fórmula estéril por otro en el que todas las fórmulas —que no se encuentren en la parte pura del cálculo (si la hay)— cumplan su función propia de expresar una proposición lógicamente contingente.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Hipótesis estadísticas, enunciados probabilitarios y aritmética de razones de clase

Nos hemos ocupado hasta ahora de los sistemas deductivos científicos en los que todas las hipótesis, sea cualquiera el nivel de la jerarquía en que aparezcan, son generalizaciones, bien de la forma «todo lo que sea *A* es también *B*» o de la forma «nada que sea *A* es a la vez *B*» [1]; en las hipótesis de nivel ínfimo de estas formas las propiedades *A* y *B* son observables, y las hipótesis quedan refutadas al observar alguna cosa que, respectivamente, sea *A* sin ser *B* o sea a la vez *A* y *B*.

Muchas de las generalizaciones que se encuentran en la ciencia no tienen la sencilla forma de una *hipótesis universal* que asevere que el 100 por 100 —o el 0 por 100— de las cosas que sean *A* es asimismo *B*, sino la de una ***hipótesis estadística***, que asevere que hay cierta proporción de las cosas que sean *A* —proporción situada entre 100 y 0 por 100— que es también *B*; muchas generalizaciones de las ciencias sociales tienen esta forma, así como muchas de las que se encuentran en las ciencias biológicas (por ejemplo, que el 51 por 100 de los recién nacidos son niños). En la física la teoría cinética de los gases explicaba las generalizaciones de nivel ínfimo acerca de las propiedades de los gases considerándolas como hipótesis estadísticas acerca de una proporción muy cercana al 100 por 100 de todos ellos, y construyendo un sistema deductivo en el que tales hipótesis se explicaban deduciéndolas de hipótesis estadísticas de nivel más elevado sobre impactos de las moléculas de que se componga el gas. La interpretación estadística de Max Born de la mecánica cuántica (1926) interpretaba las fórmulas iniciales que contenían funciones de onda de Schrödinger como términos teoréticos que expresaban hipótesis de

[1] Esta forma puede reducirse a la primera teniendo en cuenta la propiedad, negativa, no-*B*; entonces «nada que sea *A* es también *B*» es sinónima de «todo lo que sea *A* es también no-*B*».

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

las que se seguían sólo hipótesis estadísticas acerca de observables. Ahora bien, al dar una explicación estadística del comportamiento de un gas, la teoría cinética de los gases es compatible con una teoría que dé una explicación no estadística de aquél, pero la teoría de la mecánica cuántica es incompatible con cualquier teoría que ofrezca una interpretación no estadística del campo abarcado por la mecánica cuántica —que es la totalidad de la física atómica—. Esta incompatibilidad no implica, desde luego, que sea lógicamente imposible que haya leyes de la física atómica que no sean estadísticas (esto es, del tipo que frecuentemente se llama «determinista»), pues puede ocurrir que el conjunto de la teoría cuántica resulte ser inadecuado, y que quede superado por otra teoría que permita la existencia de leyes deterministas; mas mientras resista la teoría cuántica no se la puede subsumir en ninguna teoría determinista, ni a su vez se le puede adherir teoría alguna de este tipo. Como parece más plausible que la ruta de desarrollo de la física se vaya a buscar en la mecánica cuántica y comparta con ésta su carácter esencialmente estadístico, en lugar de que la física vaya a comenzar de raíz por algún otro sitio, es de creer que las explicaciones estadísticas irreductibles a las no estadísticas se mantendrán en la física, y que serán, por tanto, las hipótesis fundamentales para las demás ciencias físicas.

Mientras las generalizaciones estadísticas eran corrientes sólo en las ciencias sociales y biológicas y en ciertas teorías físicas, como la cinética de los gases —en que no se excluían explicaciones no estadísticas—, era razonable que un filósofo de la ciencia considerase las hipótesis de aquella naturaleza como aceptables *faute de mieux,* y únicamente hasta que las pudiesen desalojar hipótesis no estadísticas que podrían muy bien descubrirse cuando las ciencias sociales y biológicas hubiesen llegado a conocer con más detalle las moléculas y los átomos individuales. Pero ahora que la ciencia más adelantada postula, en sus teorías más quintaesenciadas y de mayor alcance, una forma irreductiblemente estadística de explicación, es irrazonable que el filósofo científico ignore los problemas especiales que presentan las hipótesis estadísticas; por el contrario, será más seguro para él admitir que estas hipótesis constituyen la normalidad, y considerar las hipótesis universales (o sea, no estadísticas) como casos extremos de las hipótesis estadísticas en las que las proporciones sean el 100 o el 0 por 100. Así pues, tenemos que considerar ahora qué modificaciones serán menester en nuestro enfoque de los sistemas científicos como jerarquías deductivas en las que son deductibles generalizaciones em-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

píricas a partir de hipótesis de alto nivel, con objeto de permitir que dichas generalizaciones tengan carácter estadístico.

Debe observarse en este momento que el filósofo de la ciencia no tiene necesidad de contestar a la pregunta acerca de si en el futuro las teorías que nos dan solamente generalizaciones estadísticas serán rechazadas por no ajustarse a los hechos observables o si quedarán subsumidas en otras teorías que nos ofrezcan generalizaciones universales. Será más discreto para él presentar un enfoque que tome las hipótesis estadísticas completamente en serio, ya que la opinión actual del físico es que las teorías estadísticas de la mecánica cuántica no van a ser superadas por otras no estadísticas. E incluso si, de hecho, todas aquéllas fuesen a quedar anticuadas más tarde o más temprano en beneficio de otras determinísticas, mientras tal cosa no ocurra representarán el pensamiento científico más estimable de su tiempo, y no cabe pasarlas por alto. Independientemente de estas consideraciones tenemos la cuestión filosófica general de que si una cláusula tiene significado lo tiene igualmente si lo que expresa es verdad como si no lo es, de modo que la pregunta acerca de cómo tenga significado una cláusula no depende de que exprese o no, de hecho, una proposición verdadera. Así pues, la forma en que tengan sentido cláusulas tales como «el 51 por 100 de los recién nacidos son niños» o «el 50 por 100 de los átomos que componen un trozo de radio se desintegrarán en el plazo de mil setecientos años» precisa una investigación; la cual, si bien dependerá, naturalmente, de cuáles sean las condiciones empíricas bajo las cuales las proposiciones expresadas por tales cláusulas sean verdaderas o sean falsas, no depende de si, de hecho, dichas proposiciones son verdaderas o falsas.

En este capítulo y el siguiente ampliaremos la doctrina acerca del modo de funcionar los sistemas deductivos científicos en nuestro pensamiento hasta llegar a otra más general que abarque sistemas en los que las hipótesis de nivel ínfimo sean generalizaciones estadísticas; doctrina más general que incluirá como casos extremos sistemas en que las generalizaciones estadísticas sean generalizaciones universales. En nuestra presentación del asunto no echaremos mano de ninguna noción lógica de carácter esencialmente nuevo: es cierto que habremos de ampliar la noción epistemológica de *rechazo* de una hipótesis para contar con la posibilidad de revocar un rechazo y readmitir una hipótesis que hubiésemos rechazado provisionalmente, pero no existirán relaciones lógicas tan peculiares como la de ser consecuencia lógica parcial (tal como ocurre en la teoría probabilitaria de Harold Jeffreys o en la de J. M. Keynes), ni tampoco hipótesis aparentemen-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

te empíricas que realmente no sean empíricamente contrastables (como en la tesis de la frecuencia límite de Richard von Mises). Para justificar la noción ampliada de rechazo de hipótesis será menester que consideremos lo que parecen ser hipótesis de nivel ínfimo (por ejemplo, el que el 51 por 100 de los recién nacidos sean niños) como hipótesis de nivel supremo de una jerarquía deductiva indefinidamente descendente, en la que se utilizarán unos principios deductivos que pertenecen a una rama especial de las matemáticas (que llamaremos *aritmética de las razones de clase)*. La excusa que tengo por la extensión de los tres capítulos de este libro que están dedicados a las hipótesis estadísticas reside en las dificultades que tiene el desenmarañar los distintos aspectos pertinentes, unos matemáticos y otros epistemológicos, así como la importancia que hoy han adquirido en la ciencia las hipótesis estadísticas.

La probabilidad y sus diferentes sentidos

Una de las maneras naturales de expresar una hipótesis estadística reside en valerse de la palabra «probabilidad» y de otras de su familia lingüística: así, en lugar de decir que la proporción de nacimientos de varones entre todos los nacimientos es del 51 por 100 podemos decir que la probabilidad de que un nacimiento sea de un varón es de $\frac{51}{100}$. La ventaja que ofrece la utilización del lenguaje especial de la probabilidad en lugar del de las proporciones reside en que normalmente no se puede tomar este último literalmente. El empleo literal del término «proporción» es aquél en el cual decir que, entre los miembros de una clase β[2], la proporción de los que son también miembros de la clase α es cierto número h es afirmar la proposición según la cual el número de miembros de la intersección de α y β (esto es, el número de cosas miembros a la vez de α y de β) dividido por el número de miembros de β es h; o bien —para expresarlo del modo aritmético ordinario de escribir las fracciones—, si $N'\theta$ denota el número de miembros de la clase θ,

$$\frac{N'(\alpha\beta)}{N'\beta} = h.$$

[2] De ahora en adelante emplearemos letras griegas minúsculas para denotar clases, y su yuxtaposición para representar la intersección de clases: interpretaremos siempre de este modo los cálculos en que aparezcan, y no, como en los capítulos anteriores, como marcas de un cálculo sin interpretar, ni tampoco con otra interpretación.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Pero cuando decimos que la proporción (en un sentido no literal) de nacimientos de varones entre todos los nacimientos es del 51 por 100 no decimos con ello de ninguna clase determinada de nacimientos que el 51 por 100 de ellos sean de varones, pues la proporción real de los mismos puede ser muy distinta del 51 por 100 en una clase determinada de nacimientos, o en cierto número de tales clases, sin que sintamos la menor inclinación a rechazar la proposición de que dicha proporción (en su sentido no literal) es del 51 por 100. Como la presentación que vamos a hacer de la naturaleza de las hipótesis estadísticas hará mucho uso de las proporciones en su sencillo sentido literal, aritmético —y, en realidad, estará basada en él—, presentaría muchos inconvenientes utilizar la misma palabra también en un sentido no literal.

Es cierto que pueden presentarse objeciones contra el uso de la palabra «probabilidad» para exponer el carácter de las hipótesis estadísticas, pues tanto esta palabra como las emparentadas con ella se emplean con sentidos diferentes en diferentes clases de contextos, y, lo que es peor, se utilizan en dos sentidos distintos en relación con las hipótesis científicas: ya que, además de hablar de la hipótesis de que la probabilidad de que se desintegre un átomo de radio en mil setecientos años es 1/2, hablamos también de que la teoría de la gravitación de Einstein es probable, o de que es más probable que la de Newton; y aquí lo que se afirma como probable —o como más probable que otra— es toda una teoría científica, y no un acontecimiento al que la teoría misma asigne una probabilidad. (Muchos lógicos recientes han subrayado la importancia de esta distinción entre la probabilidad de tipos de acontecimientos y la probabilidad de hipótesis [3].) Al traducir las leyes estadísticas utilizamos el primer sentido de la palabra «probabilidad», que es el que se emplea dentro del sistema de una ciencia: la probabilidad que entra en las hipótesis mismas. El que la probabilidad de que un átomo de radio se desintegre dentro de un plazo de mil setecientos años sea 1/2 es una hipótesis dentro

---

[3] KARL R. POPPER, *Logik der Forschung* [versión castellana de la edición revisada inglesa, *La lógica del descubrimiento científico*, Madrid, Tecnos, 1962], § § 80 y sigs.; RUDOLF CARNAP, en *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. 5 (1945), págs. 513 y sigs., y *Logical Foundations of Probability*, capítulo II; J. O. URMSON, en *Analysis*, vol. 8 (1947), págs. 9 y sigs.; BERTRAND RUSSELL, *Human Knowledge, its scope and limits* (Londres, 1948 [versión castellana, *El conocimiento humano, su alcance y sus limitaciones*, Madrid, Revista de Occidente, 1950]), parte V, y WILLIAM KNEALE, *Probability and Induction* (Oxford, 1949), pág. 22; F. P. RAMSEY *(The Foundations of Mathematics and other logical essays*, pág. 157) había atisbado algo de esta distinción.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

de la física, y como es razonable creer en esta hipótesis actualmente podemos decir que la hipótesis misma es probable en el segundo sentido de probabilidad. A veces se producen confusiones debido a que ambos sentidos de la probabilidad confluyen en una cláusula en la que se entrañan ambos utilizando una sola vez esta palabra: por ejemplo, en la cláusula «es sumamente probable que un átomo de radio no se desintegre antes de un año» confluyen ambos sentidos, ya que equivale a decir que la hipótesis de que exista una probabilidad (en el primer sentido) muy elevada de que un átomo de radio no se desintegre en el plazo de un año es, a su vez, probable (en el segundo sentido). Pero una vez que se han desenredado ambos sentidos está claro que nos encontramos frente a sentidos diversos: la probabilidad que aparece dentro de una hipótesis científica tiene un valor mensurable por un número definido, mientras que no es seguro, en modo alguno, que la probabilidad como carácter razonable de una hipótesis tenga características que permitan atribuirle un número [4]. La probabilidad en el interior de una ciencia es un concepto objetivo, independiente de la posición de la hipótesis que la afirme dentro del *corpus* del conocimiento científico: la hipótesis acerca de la probabilidad de la desintegración de un átomo de radio no encierra referencias a creencia alguna mía ni de nadie, mientras que la probabilidad (en el segundo sentido) de esta hipótesis misma se refiere a su posición en relación con un *corpus* de creencias razonables —decir que esta hipótesis es probable implica que si se encuentra dentro de semejante *corpus* debe permanecer en él, y que si no lo está habría que incorporarla a él—. Por tanto, el segundo sentido de probabilidad es más epistemológico que puramente lógico.

Muchos de los filósofos que han subrayado recientemente la distinción entre los dos conceptos de probabilidad (filósofos que han sostenido tesis enteramente diferentes en cuanto al análisis de esta pareja de conceptos) han propuesto emplear nombres distintos para uno y otro. La probabilidad en el primer sentido —probabilidad dentro de una ciencia— ha sido rebautizada por Rudolf Carnap llamándola *frecuencia relativa,* por Bertrand Russell como *probabilidad matemática* y por William Kneale con el nombre de *albur* [*chance*]*;* asimismo se la ha denominado *probabilidad estadística* y *probabilidad empírica.* A mi parecer pueden hacérseles objeciones a todos estos

---

[4] Véase más adelante, en las págs. 385 y sigs.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

nombres posibles [5], de modo que emplearé el de ***probabilidad***, sin calificativos, para la probabilidad dentro de una hipótesis científica. Al otro tipo de probabilidad, al que Carnap llama *confirmación*, Russell *credibilidad* y Kneale *aceptabilidad*, lo llamaré simplemente *carácter razonable*, sin designarlo con el nombre de probabilidad ni suponer que sea una cantidad mensurable por un número.

La palabra «probabilidad» y las emparentadas con ella pueden tener otros sentidos en contextos que no afecten a las hipótesis científicas, pero muchos de ellos están relacionados con el de mi ***probabilidad*** o el de lo que llamo *carácter razonable:* la proposición según la cual es 1/6 la probabilidad de que al tirar este dado concreto salga cinco, si no se la entiende como una afirmación acerca de la tirada próxima, o de una tirada concreta cualquiera, sino como una proposición general acerca de toda tirada de este dado, constituye una hipótesis estadística, cuya única diferencia con el caso científico reside en que no es suficientemente general para que se la cuente entre las hipótesis científicas [6]. Verdaderamente, puesto que aquí la probabilidad es lógicamente parecida a la probabilidad dentro de una hipótesis científica, es a menudo conveniente tomar como ejemplos de hipótesis estadísticas proposiciones acerca de tiradas de un dado concreto, de extracciones de un saquito concreto de bolas o de cortes en un mazo concreto de naipes, ya que entonces pueden adoptarse plausiblemente valores determinados de las probabilidades.

El enunciado de que sea 1/6 la probabilidad de que al tirar un dado concreto la próxima vez salga cinco puede tener diversos sentidos. Puede entenderse como aserción de la proposición general acerca de cualquier tirada del dado con referencia al caso particular de la próxima tirada, o como la de que sea razonable aplicar dicha propo-

---

[5] La probabilidad dentro de una ciencia no es idéntica con la frecuencia relativa, si bien es explicable a base de ella; llamarla por excelencia matemática es prejuzgar la cuestión acerca de si el segundo tipo de probabilidad es o no asimismo matemática, y a veces se utiliza el nombre de probabilidad matemática queriendo decir una noción matemática pura que satisfaga los teoremas de la matemática pura de la probabilidad. *Albur* [*chance*] es la mejor alternativa, pero tiene otros usos valiosos, por ejemplo, en «un acontecimiento al albur o azaroso» [en inglés, *a chance event;* la palabra castellana, que cercena muchos sentidos de la inglesa —que significa *azar, albur, probabilidad, posibilidad*—, carece, justamente por ello, de este inconveniente.—N. del T.].

[6] Si sustituimos «este dado concreto» por «un dado» podemos admitir que este enunciado exprese una proposición acerca de un dado ideal, y no de ningún dado real; en este caso se tratará de una proposición lógicamente necesaria en el sistema deductivo puro de la probabilidad, en uno de cuyos modelos se emplea el dado ideal. (En el próximo capítulo haremos observaciones más circunstanciadas acerca de las probabilidades, al hablar de los juegos de azar.)

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

sición general a este caso particular; o también como refiriéndose a ambas proposiciones a la vez. Mas también cabe emplearla para expresar la tasa de veces que quien la enuncie —o bien cierta persona idealmente razonable— esté dispuesto a apostar a que el dado saldrá cinco la próxima vez que se tire (sentido que tiene relación con los otros, pero que acaso no sea idéntico a ninguno de ellos). Y, análogamente, el enunciado de que probablemente helará esta noche puede tomarse en diversos sentidos.

No sería oportuno para mis propósitos de estudiar la filosofía de la ciencia un examen detallado de los usos de los conceptos de probabilidad en contextos no científicos: lo que le concierne a un filósofo de la ciencia es, primero, la probabilidad tal como aparece dentro de las hipótesis de una ciencia, esto es, el concepto de probabilidad como característica de las hipótesis estadísticas; y, segundo, lo probable en el sentido de razonable cuando se aplica a las hipótesis científicas mismas o a la creencia en ellas. En todo lo que resta del presente libro utilizaremos esta palabra únicamente para el concepto empírico, numéricamente mensurable, característico de las generalizaciones estadísticas; y no volveremos a hablar del carácter razonable de la creencia en las generalizaciones empíricas en términos que empleen la palabra «probabilidad» (de aquél nos ocuparemos en el capítulo octavo).

Las probabilidades apoyadas en las razones de clase

Así pues, expresaremos probabilitariamente la hipótesis estadística de que el $100p$ por 100 de los miembros de la clase β sean también miembros de la clase α diciendo, «la probabilidad de que un miembro de la clase β sea miembro de la clase α es p», o bien, «la probabilidad de que un ejemplar de β sea un ejemplar de α es p». Y trataremos el problema del significado de una cláusula que exprese una hipótesis estadística como el del significado de un enunciado probabilitario de estas formas.

En el supuesto de que la clase β no sea ni la clase nula ni una clase infinita (es decir, que el número de miembros de β sea un número finito distinto de cero), la probabilidad de que un ejemplar β sea un ejemplar de α puede identificarse con la proporción, entre todos los miembros de β, de los que sean miembros de α, esto es, con

$$\frac{N`(\alpha\beta)}{N`\beta} = h.$$

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Llamaremos a esta fracción una *razón de clase*, pues se trata de la razón entre el número de miembros de una subclase y el de miembros de la clase que la incluye como subclase: o sea, la proporción de miembros de la clase que sean miembros de la subclase.

Cuando cabe identificar las probabilidades con razones de clase cuyos denominadores sean números finitos distintos de cero no surge ningún problema ulterior: todas las probabilidades son entonces números racionales comprendidos entre 0 y 1 (inclusive), y todas las leyes lógicamente necesarias que vinculan las probabilidades relacionadas entre sí aparecen como proposiciones aritméticas que vinculan fracciones relacionadas entre sí. Por ejemplo, la característica ley del sistema deductivo puro de las probabilidades según la cual la probabilidad de que un ejemplar de β sea a la vez ejemplar de α y ejemplar de γ es igual a la probabilidad de que un ejemplar de β sea ejemplar de α multiplicada por la probabilidad de que una cosa que sea tanto ejemplar de α como ejemplar de β sea ejemplar de γ, adopta la forma de la proposición

$$\frac{N`((\alpha\gamma)\beta)}{N`\beta} = \frac{N`(\alpha\beta)}{N`\beta} \, \frac{N`(\gamma(\alpha\beta))}{N`(\alpha\beta)},$$

que constituye una perogrullada aritmética, ya que la clase $((\alpha\gamma)\beta)$ es idéntica a la clase $(\gamma(\alpha\beta))$ —la probabilidad de que un crío nacido en Cambridge en 1950 a la vez sea niño y tenga los ojos azules es igual a la probabilidad de que un crío nacido en esta ciudad en 1950 sea niño multiplicada por la probabilidad de que un niño nacido en la misma durante 1950 tenga ojos azules.

Pero esta identificación de una probabilidad con una razón real de clase puede hacerse únicamente si suponemos que el denominador de la expresión fraccionaria de la razón de clase es una clase finita no vacía, supuesto que es necesario para que la fracción que exprese dicha razón tenga significado —si este supuesto es falso la fracción carecerá de sentido— [7]. Sin embargo, en el caso de enunciados probabilitarios que sean hipótesis científicas no puede suponerse jamás tal cosa: pues si supusiéramos que la clase de referencia tenía sólo un número finito de miembros, la generalización quedaría con ello restringida a aplicarse únicamente a un número finito de casos, de suerte que carecería de la generalidad que pedimos a una generalización para contarla entre las hipótesis científicas. Puede ocurrir que haya habido, haya y vaya a haber solamente un número limitado de

[7] En el álgebra ordinaria a/b está definida únicamente cuando a y b sean números finitos y b no sea igual a cero.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

ejemplares de β, pero ello habrá de carecer de trascendencia para el significado de un enunciado científico probabilitario; y justamente por esta falta de trascendencia es imposible que aceptemos ningún modo de presentar semejante enunciado que haga depender su significado de que la clase de referencia sea o no finita.

Podemos exponer este punto de otra manera. Si interpretásemos el enunciado probabilitario de acuerdo con una forma de interpretar que dependiese de que la clase de referencia fuese finita, un conjunto finito de observaciones —a saber, las practicadas sobre los miembros de tal clase finita— bastaría para asentar de modo concluyente la verdad del enunciado probabilitario; ahora bien, esto es justamente lo que no puede suceder con las hipótesis científicas: cualquiera que sea el número de observaciones que hayamos hecho, una observación posterior puede valer para refutarlas. Por consiguiente, en una hipótesis científica la clase de referencia tiene que ser una clase no limitada previamente por la forma en que su expresión haya de interpretarse [8].

Así pues, no podemos considerar que los enunciados probabilitarios científicos hagan aserciones acerca de razones reales de clase. Mas, dado que en un conjunto de observaciones la razón de clase constituye una contrastación directa de una hipótesis estadística —del mismo modo que la de una observación somete directamente a contraste una hipótesis universal (si dicha razón es 0 hay que rechazar la hipótesis)—, es natural suponer que se otorga sentido a estos enunciados probabilitarios en virtud de cierto tipo de referencia a razones de clase observables: lo cual —incluyendo el *cierto tipo*— está implicado por el modo en que utilizan estos enunciados la casi totalidad de los científicos y estadísticos; la dificultad con que se enfrenta el filósofo es la de elucidar tal *cierto tipo*.

Hasta ahora se han propuesto explícitamente dos maneras de atacar el asunto.

Las probabilidades como valores límites de las razones de clase

Una de dichas maneras es hacer que el enunciado probabilitario no se refiera a ninguna razón real de clase, sino al límite de los valores de una razón de este tipo en una sucesión infinita de clases de

[8] En el capítulo noveno estudiaremos, bajo el encabezamiento de «los condicionales subjuntivos» la posibilidad de que la clase de referencia carezca de miembros.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

referencia finitas, cada una de las cuales incluya sus predecesoras dentro de tal sucesión o serie. Formulemos esta tesis con mayor precisión. Se elige una sucesión infinita de clases finitas, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j, \ldots$, tales que todas se encuentren incluidas en β y que β_j esté incluida en β_{j+1} cualquiera que sea j; entonces, si la sucesión infinita de razones de clase

$$\frac{N`(\alpha\beta_1)}{N`\beta_1}, \quad \frac{N`(\alpha\beta_2)}{N`\beta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{N`(\alpha\beta_j)}{N`\beta_j}, \quad \ldots$$

tiende hacia un valor límite, admitiremos que éste es la probabilidad de que un ejemplar de β sea un ejemplar de α.

Muchos lógicos recientes, entre ellos Richard von Mises, Karl Popper y Hans Reichenbach [9] han defendido este punto de vista acerca de la probabilidad —la tesis de la frecuencia límite—, que ha sido desarrollada en ligeras variantes. Pero, independientemente de los detalles, que varían de una a otra, todas las formas de esta teoría poseen dos defectos tan graves que, a mi entender, la vician completamente. El primero consiste en que, como la noción de límite es de carácter ordinal, esta teoría hace depender el valor de la probabilidad del orden en que se agrupen las observaciones en la sucesión infinita de clases de referencia $\beta_1, \beta_2, \ldots$: un agrupamiento diferente daría lugar a otra sucesión, que muy posiblemente tendría un valor límite distinto. Es verdad que esta teoría no exige que las observaciones estén ordenadas temporalmente, pero sí exige, en cambio, que exista algún principio con arreglo al cual se puedan asignar números sucesivos a las clases de referencia, de modo que éstas queden ordenadas en una serie. Ahora bien, ninguna noción de orden parece pertinente para la noción científica de probabilidad en general, que se ocupa de la significación de enunciados tales como «el 51 por 100 de los recién nacidos son niños», en los que no hay referencia de ningún tipo a orden alguno [10].

---

[9] RICHARD VON MISES, *Probability, Statistics and Truth* (Londres, 1939) (edición original alemana, Viena, 1928 [versión castellana, *Probabilidad, estadística y verdad*, Madrid, Espasa Calpe, 1946]); KARL POPPER, *Logik der Forschung*, capítulo VI [en la refundición inglesa, de 1959, y en la versión castellana antes citada —que la traduce—, Popper presenta en los apéndices nuevos un sistema formal de probabilidades que escapa enteramente a las críticas que va a formular el autor.—*N. del T.*]; HANS REICHENBACH, *Theory of Probability* (Berkeley, 1949) (edición original alemana, Leyden, 1935). WILLIAM KNEALE critica en *Probability and Induction* la versión de esta teoría propia de VON MISES, y BERTRAND RUSSELL hace lo mismo con la de REICHENBACH en *Human Knowledge, its scope and limits* [traducción castellana citada, págs. 434 y sigs.].

[10] El caso particular de las «probabilidades en cadena», en que el orden tiene trascendencia, es, pese a su importancia en muchas partes de la física, un caso especial.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

La segunda objeción es que, como una sucesión de números puede comenzar por un conjunto finito cualquiera de términos y, pese a ello, tender al límite que sea, sin restricción alguna en cuanto a su valor, no solamente no está determinado el valor límite de la razón de clase por el que tenga la razón correspondiente a ningún conjunto finito de clases de referencia, sino que —y ello es más serio— el valor límite no determina a su vez cuál será la razón de clase de ninguna clase finita de referencia. La primera falta de vinculación implica que no pueda considerarse el valor límite como una construcción lógica a partir de las razones de clase de las clases observables; y la segunda, que tampoco pueda considerársela como un concepto teorético, ya que de ella no puede sacarse ninguna conclusión en cuanto a las razones de clase de clases finitas (que son las únicas observables).

La visión de la probabilidad como una frecuencia límite, propuesta por Venn como análisis de los enunciados probabilitarios apoyándose en sucesiones de acontecimientos reales, tiene cierta tendencia a quedar transpuesta, en manos de todos sus expositores, en una teoría en que se sustituyan las sucesiones reales de acontecimientos por otras «ideales», de modo que el enunciado probabilitario se convierta en una hipótesis campbelliana acerca de un concepto teorético: en el límite de las razones de clase de una sucesión ideal, con el cual ha de identificarse la probabilidad[11]. No hay nada que objetar a semejante transposición (y, en realidad, en mi exposición de los enunciados probabilitarios está involucrada su consideración como hipótesis de alto nivel de un sistema deductivo); pero el efecto que produce semejante cambio consiste en hacer que las probabilidades de la tesis de la frecuencia límite arraiguen menos en los hechos observables de lo que querrían mantener sus expositores.

Si se toman los enunciados probabilitarios como hipótesis de alto nivel de una teoría científica, la tesis de la frecuencia límite equivale a exponer la teoría de la probabilidad presentando un modelo puro en que las proposiciones correspondientes a los enunciados probabilitarios sean proposiciones lógicamente necesarias acerca de la existencia de límite en sucesiones dadas por una regla matemática, al modo como la sucesión de los números $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $1^1/_8$, $\frac{15}{16}$, ..., cuyo término enésimo está dado por la fórmula $1-(-\frac{1}{2})^n$, tiende a un límite (a saber, 1) al crecer n sin fin y sin límite. No ha de objetarse al empleo de este modelo que en él las proposiciones sean lógicamente necesarias al paso que las del sistema estadístico son contingentes, sino simplemente que

[11] JOHN VENN, *The Logic of Chance*, 3.ª ed. (Londres, 1888), pág. 95.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

semejante modelo no lleva a cabo lo que se le exige, es decir, no permite deducir en él proposiciones acerca de fragmentos finitos de la sucesión de números a los que correspondan en la teoría proposiciones acerca de razones de clases realmente observables [12]; por consiguiente, este modelo matemático es inadecuado, ya que no consiente realizar las deducciones apropiadas.

Las probabilidades como razones de clase en «poblaciones hipotéticas infinitas»

Hemos visto que no puede tomarse en un sentido literal la probabilidad como razón de clase de una clase infinita; pero ¿no cabe considerarla como un número asociado a una clase infinita (lo que los matemáticos llaman un *parámetro* de ésta), que se parezca a una razón de clase en que, si se toman los conjuntos de observaciones como muestras tomadas de la clase infinita, del enunciado probabilitario acerca del valor de dicho parámetro puedan extraerse conclusiones sobre las razones de clase que se vayan a encontrar en tales muestras?

Este es el punto de vista de sir R. A. Fisher sobre este asunto; y la mayoría de los lógicos contemporáneos le han seguido en él. Según Fisher, «consideramos que los datos reales constituyen una muestra aleatoria» de «una población hipotética infinita». «La *probabilidad* de que un objeto determinado cumpla cierta condición ... es un parámetro que especifica una dicotomía sencilla [entre cumplirla o no] en una población hipotética infinita, y que representa ni más ni menos que la razón frecuencial que imaginamos ostenta semejante población. Por ejemplo, cuando decimos que la probabilidad de sacar cinco con un dado es un sexto, es menester que no se crea que pretendemos decir que de cada seis tiradas que hagamos con tal dado habrá una y sólo una que dé necesariamente un cinco, ni que en cada seis millones de tiradas sacaremos exactamente un millón de cincos, sino que de una población hipotética de un número infinito de tiradas —permane-

---

[12] Los matemáticos utilizan a veces el lenguaje de las probabilidades para expresar teoremas acerca de límites de sucesiones matemáticamente determinadas. Por ejemplo, emplean la cláusula «la probabilidad de que un entero positivo esté libre de cuadrados (esto es, no tenga repetido ningún factor primo) es $6/\pi^2$», queriendo decir que la función de n definida como la proporción de enteros libres de cuadrados dentro de todos los que no excedan a n tiende al límite $6/\pi^2$ al aumentar n sin fin y sin límite, y de esta proposición no puede deducirse nada acerca de las proporciones reales de enteros libres de cuadrados en los enteros que van de 1 a 100, de 100 a 1.000, de 1.000.000 a 1.001.000, etc.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

ciendo el dado en sus condiciones de partida— habrá exactamente un sexto de ellas en que sacaremos cinco»[13]. Fisher habla aquí de una razón frecuencial (esto es, de una razón de clase) en una población infinita; y como semejante afirmación no tiene sentido cuando se la toma al pie de la letra, en ocasiones se ha supuesto erróneamente que Fisher propugnaba una tesis de frecuencias límite[14]. Pero aun cuando ni él ni sus discípulos se han expresado con la precisión que sería deseable acerca de la relación lógica existente entre la «población hipotética infinita» y sus «muestras aleatorias», lo que hacen con tales poblaciones no nos deja la menor duda de que las consideran como conceptos teoréticos, ni tampoco en cuanto a que la adscripción de un parámetro probabilitario a una población hipotética infinita es una hipótesis campbelliana (que encierra sólo conceptos teoréticos, por tanto) que funciona como hipótesis de alto nivel en un sistema deductivo en que aparecen como consecuencias lógicas proposiciones empíricamente contrastables.

Con esta interpretación, la filosofía fisheriana de la probabilidad y los estadísticos matemáticos que le han seguido se separan sólo en cuanto a intuitividad de los estadísticos de esta clase que han atacado el asunto por la dirección de las matemáticas puras[15]. En efecto, lo que estos últimos han hecho es, en mi terminología, construir un cálculo dotado de una parte algebraica que interpretan como un fragmento de la matemática pura (teoría de la medida de conjuntos de puntos), no dar interpretación directa alguna de los parámetros numéricos —que se toman como representativos de las probabilidades— que aparecen en las fórmulas iniciales no algebraicas de su cálculo, pero sí darles una interpretación indirecta al admitir que algunas de las fórmu-

[13] *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Serie A, vol. 222 (1922), páginas 311 y sig. Véanse también sus *Statistical Methods for Research Workers* (Edimburgo, 1925), pág. 7 [versión castellana, *Métodos estadísticos para investigadores*, Madrid, Aguilar, 1949, pág. 8] en donde, sin embargo, no se afirma específicamente que los parámetros probabilitarios representen razones frecuenciales.

[14] «Mi propia definición no está basada en el límite de frecuencias si con ello [se quiere aludir a] frecuencias experimentales, puesto que creo que no tenemos conocimiento alguno de la existencia de tales límites» (R. A. Fisher, en *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 98 [1935], pág. 81).

[15] A. Kolmogorov, *Foundations of Probability* (Nueva York, 1950) (edición original alemana, Berlín, 1933), capítulo I, § 2; Harald Cramér, *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton, 1946), pág. 151 [versión castellana, *Métodos matemáticos de estadística*, Madrid, Aguilar, 1953, pág. 171]; A. C. Aitken, *Statistical Mathematics* (Edimburgo, 1939) [versión castellana, *Estadística matemática*, Madrid, Dossat, s. a.], capítulo 1.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

las extraídas de aquél representen proposiciones que puedan ser sometidas al contraste de la experiencia; y la población hipotética infinita de Fisher puede considerarse como un modelo de semejante teoría de la probabilidad, modelo imaginado como si fuese una bolsa que contuviera un número infinito de bolas y de la que se hiciesen extracciones aleatorias (a la probabilidad p de la teoría corresponde una proporción p de bolas negras).

Un modelo en el que exista un número infinito de bolas en una bolsa tiene las buenas propiedades siguientes: 1) en él se puede representar cualquier proporción de bolas negras, mientras que si contiene sólo m bolas las únicas proporciones representables son los múltipos de $1/m$; 2) la extracción de una bola, ya sea blanca o negra, no altera la proporción de bolas negras de la bolsa, luego las distintas extracciones son independientes (en el sentido de que la probabilidad de sacar bola negra será siempre la misma), sin que haya que reponer las bolas tras cada sacada, y de ahí que pueda conseguirse un conjunto de n extracciones independientes sacando de un golpe un puñado de n bolas; 3) el número n de esta muestra puede ser tan grande como queramos, luego el mismo modelo valdrá para cualquier tamaño de muestra y para cualquier conjunto finito de muestras y 4) éstas serán subclases finitas de la clase infinita de bolas de la bolsa, de modo que esta clase pertenecerá al mismo tipo lógico que las de las muestras, y no existe dificultad psicológica alguna para imaginar que se hagan extracciones de una bolsa infinita.

Sin embargo, los defectos del modelo de bolsa infinita son bastante graves. Como no es posible tomar literalmente la noción de la proporción de bolas negras en la infinitud de bolas de la bolsa, no aclara mucho las cosas hablar de que la probabilidad p de la teoría corresponda a esta misma proporción en el modelo. Según creo, lo que tienen en la cabeza los que emplean este modelo es lo siguiente: cuando empiezan haciendo que la probabilidad corresponda a la proporción de bolas de la bolsa están pensando en una bolsa finita, de modo que esta proporción tiene un sentido literal; luego el tamaño de la bolsa tiene que hacerse infinito para que la proporción no varíe al retirar una bola y para que puedan sacarse de la bolsa cuantas bolas se deseen sin que ésta quede vacía. Lo que impone esta confusión mental en cuanto al tamaño de la bolsa es la pretensión de emplear extracciones *sin reposición* de una bolsa de bolas como modelo de la teoría de la probabilidad; y para lograrlo la bolsa tiene que ser a la vez finita e in-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

finita. Por consiguiente, el modelo propuesto por la tesis de la población hipotética infinita es inadecuado, debido a ser contradictorio [16].

UN MODELO «BRIAREICO» DE LA TEORÍA PROBABILITARIA

Vemos que la equivocación del modelo de la bolsa infinita reside en que se hagan extracciones sin reposición. Si se repone cada una de las bolas sacadas una vez anotado su color la constitución de la bolsa será la misma que antes de extraer la bola, y no será necesario que la bolsa sea infinita para que las extracciones sean independientes; por otra parte, si se considera que la esencia de una extracción reside en tomar nota del color de una bola en lugar de en apoderarse de esta misma, ningún número de extracciones podrá vaciar una bolsa finita. Así pues, el modelo de una bolsa finita en que se reponga toda bolsa sacada antes de sacar de nuevo elude la contradicción del modelo de bolsa infinita. Puesto que la reposición de la bola en la bolsa tiene por objeto reproducir la constitución de la bolsa originaria llegaremos a un modelo equivalente para el caso de n extracciones considerando n bolsas análogas que contengan todas el mismo número de bolas, m, y la misma proporción, p, de bolas negras y suponiendo que las n extracciones se efectúen sacando una bola de cada una de las n bolsas; entonces carecerá de trascendencia que se repongan o no las bolas tras haberlas sacado de las bolsas correspondientes, ya que una vez que se haya extraído una bola de una bolsa determinada ésta ha cumplido su misión y desaparece del modelo. Este modelo —de extracciones que se ejecutan en un conjunto de bolsas parecidas— ofrece dos ventajas con respecto al de extracciones con reposición efectuadas en una bolsa: una de ellas, secundaria, consiste en que es más fácil exponer la manera de funcionar de un modelo si cada extracción se realiza en una bolsa distinta; otra, de mayor importancia, reside en que en aquél la independencia con respecto al orden en que se lleven a cabo las extracciones puede representarse suponiendo que un Briareo de n brazos efectúe las n simultáneamente, mientras que en el modelo de extracción con reposición es preciso pasar por alto deliberadamente dicho

[16] Admitiendo que la bolsa contenga un número muy grande de bolas, pero no infinito, la proporción de negras que haya en ella tendrá perfectamente sentido; pero entonces las extracciones serán independientes sólo aproximadamente —aproximación que será cada vez mejor conforme aumente el número de bolas de la bolsa—. Así pues, el modelo de una bolsa finita, pero muy grande, aunque no es contradictorio, habrá de utilizar unas matemáticas muy complicadas.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

orden, y tendremos siempre la tentación —a la que es preciso resistir— de tomarlo en cuenta y, por tanto, de tratar el conjunto de extracciones como si fuese una serie ordenada, cayendo así en uno de los errores de la tesis de la frecuencia límite.

Por consiguiente, el modelo que propongo para la teoría de la probabilidad consiste en las siguientes correspondencias: al enunciado probabilitario de que la probabilidad de que un recién nacido sea niño es $\frac{51}{100}$ y al enunciado acerca de una razón de clase observada según el cual de 1.000 recién nacidos hay 503 niños corresponden, respectivamente, una disposición del modelo consistente en un conjunto de 1.000 bolsas cada una de las cuales contenga 100 bolas de las cuales 51 sean negras, y una extracción de cada una de las 1.000 bolsas mediante la cual se saquen 1.000 bolas de las que 503 sean negras; de modo que a la proposición acerca de la razón de clase observada no corresponde una extracción de bolas que forme una *subclase* de una clase cuya proporción de bolas negras fuese de $\frac{51}{100}$ —como ocurría en el modelo de una población hipotética e infinita—, sino una extracción que forme una *selección* a partir de una clase de clases tal que en cada una de estas últimas la proporción de bolas negras sea de $\frac{51}{100}$. El nuevo modelo permite que sea posible efectuar extracciones de mayor tamaño aumentando el número de bolsas y dejando constante el de bolas en cada bolsa.

Este modelo «briareico» vale solamente para una teoría probabilitaria en que toda probabilidad sea una fracción propia, 0 ó 1. Mas los métodos matemáticos superiores de la matemática de las probabilidades, que precisan probabilidades continuas, pueden perfectamente considerarse como técnicas idóneas para llegar —o aproximarse— a probabilidades constituidas por números racionales [17]; con lo que aquella limitación no es imperfección ninguna de nuestro modelo: por el contrario, el hecho de que éste necesite una restricción de las probabilidades a los números racionales hace éstas más parecidas a razones de clase (que están sujetas a esta restricción) de lo que ocurriría en otro caso.

Sin embargo, este modelo posee un rasgo que no corresponde a nada en la teoría: como veremos más adelante, el número de bolas de cada bolsa, m, se elimina en los cálculos del modelo que corresponden a las deducciones de la teoría; de modo que puede tomarse

[17] «Los campos probabilitarios infinitos aparecen solamente como esquemas idealizados de procesos aleatorios reales» (A. Kolmogorov, *op. cit.*, capítulo II, § 1).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

para m cualquier número tal que pm sea un entero (es decir, de suerte que sea posible tener una proporción exacta de p bolas negras en las m) —conviene tomar el número más pequeño que posea esta propiedad, como hemos hecho en el ejemplo acabado de proponer [18].

En la teoría estadística en la que sea una premisa que la probabilidad de que un recién nacido sea niño vale $\frac{51}{100}$, no son deductibles ni la proposición según la cual en un conjunto determinado de 1.000 recién nacidos se han observado 503 niños ni ninguna otra proposición que afirme que se encuentra una razón de clase real en conjunto alguno de observaciones. Y, de modo correspondiente, en el modelo no se sigue de la extracción de 1.000 bolas, una de cada una de las 1.000 bolsas —que contengan cada una 100 bolas de las que en cada caso haya 51 negras—, que proporcionen 503 bolas negras (u otro número cualquiera de ellas): la característica distintiva de una hipótesis estadística, reflejada de modo adecuado en nuestro modelo, es justamente que las proposiciones acerca de razones de clase observables sirven para contrastar la falsedad de las hipótesis estadísticas —y, por tanto, determinan el significado de enunciado probabilitario mismo— sin ser, por ello, consecuencias lógicas de éstas. Y lo que hemos de investigar ahora es esta característica esencial de las hipótesis estadísticas: pues la importancia de los enunciados probabilitarios consiste en el hecho de que aparezcan en sistemas deductivos ajustados a la experiencia de una forma más laxa que aquéllos en los que no aparecen tales enunciados.

En el próximo capítulo trataremos de este ajuste más suelto, el cual depende del hecho de que, aun cuando de los enunciados probabilitarios no pueden deducirse proposiciones acerca de razones de clase en selecciones determinadas, cabe deducir proposiciones sobre la proporción en que se encuentran —entre las posibles selecciones— las selecciones que ostenten cierta razón de clase. Tomemos un ejemplo sencillísimo del modelo de las bolsas —tres de ellas, en cada una de las cuales haya dos bolas, una negra y una blanca—: existen ocho maneras posibles de extraer una selección formada por una bola de cada bolsa, a saber,

NNN *NNB* *NBN* *NBB* *BNN* *BNB* *BBN* *BBB*

[18] Como veremos al desarrollar la teoría pura, para que el modelo corresponda a la teoría no es necesario que los números de bolas contenidos en las bolsas sean todos iguales, con tal de que la proporción de bolas blancas de cada bolsa sea la misma —estos números, m_1, m_2 ..., m_n, quedan eliminados al realizar todos los cálculos que se precisan.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

(una de las cuales —*BNN*— está indicada con líneas de puntos en la figura 6). De estas ocho maneras,

1 selección nos da una razón de bolas negras de 1,
3 selecciones nos dan una razón de bolas negras de 2/3,
3 selecciones nos dan una razón de bolas negras de 1/3,
1 selección nos da una razón de bolas negras de 0.

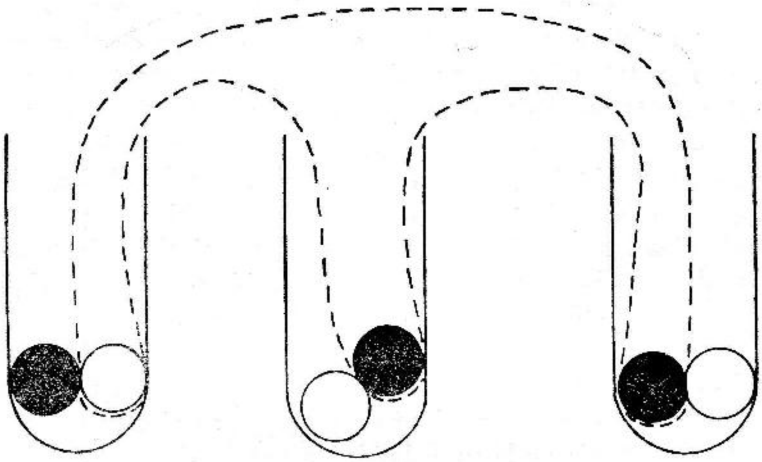


Fig. 6.

Aun cuando es imposible deducir del contenido de las bolsas que se vaya a extraer una selección que tenga una razón determinada de bolas negras (por ejemplo, 2/3), lo que sí puede deducirse es que la proporción de selecciones que tengan la razón de bolas negras de 2/3 vale 3/8; análogamente, la proporción de selecciones dotadas de una razón de bolas negras igual a 1/3 es igual a 3/8; por consiguiente, la proporción de selecciones cuya razón de bolas negras no se desvíe de 1/2 en más de 1/6 es $3/8 + 3/8 = 3/4$, y la de las que se desvíen de 1/2 en más de 1/6 es $1 - 3/4 = 1/4$. Son números pequeños —como el 1/4 que acabamos de calcular— los que nos proporcionan la base racional para interpretar los enunciados probabilitarios a partir de las razones de clase observables; y tenemos que exponer una cantidad suficiente de la matemática pura que se necesita para presentar adecuadamente aquella base (fragmento matemático al que llamaremos *aritmética de las razones de clase*).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Noción de muestra aleatoria

Antes de hacer tal cosa volvámonos sobre un punto que puede causar confusiones. Lo que en el modelo del conjunto de bolsas corresponde al conjunto observado de *n* casos de la teoría es una selección de bolas extraídas simultáneamente —cada una de una bolsa— por un Briareo de *n* brazos. Los autores que emplean como modelo extracciones realizadas en una bolsa o en un conjunto de ellas suelen exigir que las extracciones sean «aleatorias»: normalmente no se considera suficiente que Briareo coloque una mano en cada bolsa y coja de ella una bola cualquiera, sino que debe asegurarse cuidadosamente de que esté haciendo una selección «aleatoria» en cada bolsa. Ahora bien, esta noción de aleatoriedad tiene perfecto sentido una vez que se han entendido los enunciados probabilitarios: será aleatoria toda selección tal que el hacerla sea igualmente probable que hacer cualquier otra selección posible; pero puesto que estamos utilizando el modelo de extracciones realizadas en una bolsa para aclarar la noción de probabilidad, esta explicación de la aleatoriedad será circular si es menester que especifiquemos que las extracciones sean aleatorias. La verdad es que la teoría de la probabilidad a que ha de corresponder el modelo de las bolas en bolsas no exige que las selecciones que se hagan de éstas sufran limitación alguna: pues lo que corresponde a la conclusión dentro del sistema deductivo de la teoría son proposiciones (como las estampadas en el apartado anterior) acerca de la proporción de selecciones —entre todas las selecciones posibles— dotadas de ciertas propiedades; y el que al calcular tales proporciones cada una de las selecciones posibles se tenga que contar una vez y sólo una es una proposición verdadera en virtud de la definición de «proporción». Así pues, es ocioso —y, en realidad, engañoso— hablar de que las selecciones, muestras o extracciones sean «aleatorias», o de que se las haga a partir de una clase de ellas «igualmente probables», ya que la disposición del modelo logra ya por sí misma la igualdad de trato que estos epítetos piden. Como es natural, habremos de modificar dicha disposición en caso de que no nos permita deducir conclusiones que correspondan en la teoría a conclusiones que puedan salir bien de la contrastación experimental pertinente, pero semejante modificación no se realizará haciendo más aleatorias las selecciones, sino reajustando el número de bolas negras y blancas de las bolsas. Según el punto de vista de la probabilidad dentro de una ciencia que mantenemos en este libro, el adjetivo «aleatorio» tiene meramente, cuando se aplica

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

con referencia a un modelo, a una extracción o a un experimento para someter a contraste una teoría, la función gramatical de aclarar que en los enunciados en que aparece están involucradas las características peculiares de las hipótesis estadísticas.

Aritmética de las razones de clase

Tenemos que tratar ahora la parte pura de un sistema deductivo probabilitario de un modo formal y general, sin hacer referencia al modelo de las bolas en bolsas. Presentaremos la mínima porción de la aritmética de las razones de clase [19] que se necesite para interpretar los enunciados probabilitarios dentro de una ciencia; aduciremos sin demostración un resultado del álgebra elemental (el número de combinaciones de n cosas tomadas de s en s), pero probaremos todo lo demás —si bien no daremos las pruebas formalizadas tan a fondo como en el capítulo segundo.

Las nociones fundamentales serán las de lo que llamaremos *hiperclase probabilitaria* y de *selección* de esta hiperclase, nociones que definimos a continuación.

Diremos que dos clases finitas no vacías, β_1 y β_2, son *equiproporcionales en* α si la proporción de miembros de β_1 que sean miembros de la clase α (que puede ser finita, infinita o vacía) es igual a la proporción de miembros de β_2 que sean miembros de α; es decir, si

$$\frac{N'(\alpha\beta_1)}{N'\beta_1} = \frac{N'(\alpha\beta_2)}{N'\beta_2}.$$

Toda clase finita no vacía es equiproporcional en α consigo misma, cualquiera que sea la clase α.

Sea n un número entero cualquiera. Consideremos n clases finitas y no vacías, β_1 β_2, ..., β_n, que: 1) estén todas ellas incluidas en la clase β (que puede ser finita o infinita), 2) sean mutuamente excluyentes por parejas, y 3) sean equiproporcionales en α por parejas; de 3) se sigue que

$$\frac{N'(\alpha\beta_1)}{N'\beta_1} = \frac{N'(\alpha\beta_2)}{N'\beta_2} = \ldots = \frac{N'(\alpha\beta_n)}{N'\beta_n} = p, \quad \text{por ejemplo.}$$

Podemos considerar estas clases como los n elementos o miembros de una clase de segundo orden (a la que llamaremos *hiperclase* y que representaremos por una letra griega mayúscula).

[19] Llamada a veces *análisis combinatorio o combinatoria.*

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Llamaremos *hiperclase probabilitaria en* $\{\alpha, \beta\}$ a una hiperclase cuyos miembros sean clases finitas, no vacías y en número finito, si estas últimas son subclases de β mutuamente excluyentes y equiproporcionales en α. Denominaremos *parámetro en* α —o, en ocasiones, *parámetro probabilitario*— de la hiperclase probabilitaria a la proporción, p, de miembros de α en cada una de sus clases-miembros; de la definición de p se sigue que este parámetro es una fracción propia a menos que, o bien todas las clases-miembros estén incluidas en α —en cuyo caso valdrá 1—, o cada una de las clases-miembros sea excluyente de α —caso en que será 0—; y en cualquier caso p será un número racional y se cumplirá $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Debe advertirse que, mientras que α y β pueden ser clases infinitas, todo miembro de una hiperclase probabilitaria es una clase finita, por definición, y que dicha hiperclase lo es también, por lo mismo. Como la aritmética de las razones de clases se ocupa sólo de hiperclases probabilitarias y de sus miembros, únicamente se manejan números finitos, y no surge en ella ninguna cuestión acerca de sucesiones infinitas de números ni de límites de tales sucesiones.

Toda subhiperclase de una hiperclase probabilitaria en $\{\alpha, \beta\}$ será una hiperclase probabilitaria en $\{\alpha, \beta\}$, y cada una de aquéllas (excepto la subhiperclase nula, esto es, la hiperclase carente de clases-miembros) tendrá el mismo parámetro en α, a saber, p.

Consideremos ahora una clase con n miembros que comprenda un miembro y sólo uno de cada una de las clases-miembros de una hiperclase probabilitaria B: diremos que es una *selección* de esta última. Dado que se llega a una selección tomando uno cualquiera de los m_1 miembros de β_1, uno cualquiera de los m_2 miembros de β_2, ... y uno cualquiera de los m_n miembros de β_n, el número de selecciones que se obtienen a partir de la hiperclase probabilitaria es $m_1, m_2, ..., m_n$. Llamaremos *hiperclase omniselectiva* a la hiperclase de todas las selecciones de B[20]; una hiperclase omniselectiva es una clase finita de

[20] «Selección» es el término que emplea BERTRAND RUSSELL en la *Introduction to Mathematical Philosophy* (Londres, 1919), pág. 119 [versión castellana, *Introducción a la filosofía matemática*, Buenos Aires, Losada, 1945, pág. 172], en donde se llama «clase multiplicativa» a la hiperclase omniselectiva, ya que A. N. WHITEHEAD la había utilizado para definir la multiplicación *(American Journal of Mathematics*, volumen 24 [1902], págs. 383 y sigs.). En los *Principia Mathematica*, de WHITEHEAD y RUSSELL (Cambridge, 1910-13), las selecciones de hiperclases de clases se obtienen a partir de la noción, más general, de selecciones de relaciones (véase el volumen I, parte II, sección D). Sería posible llegar a la aritmética de razones de clases basándose en esta otra noción, dotada de mayor generalidad, pero las ventajas no compensarían la mayor complejidad de esta tarea (véase más adelante, en las págs. 218 y sig.).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

segundo orden, como la hiperclase probabilitaria que la determina: esta última tiene n clases-miembros, y aquélla $m_1, m_2, \ldots, m_n$ clases-miembros.

En lugar de atender a la hiperclase de todas las selecciones, fijémonos ahora en la hiperclase de las selecciones que contengan exactamente s miembros de α, siendo $0 \leqslant s \leqslant n$.

Dicotomicemos la hiperclase probabilitaria B en dos subhiperclases excluyentes, B_1 y B_2, que contengan entre ambas todos los miembros de B: supongamos que B_1 tenga los s miembros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$; entonces B_2 tendrán los $n - s$ miembros $\beta_{s+1}, \beta_{s+2}, \ldots, \beta_n$. Consideremos las selecciones de B_1 tales que todos sus miembros lo sean de α. Hay pm_1 miembros de β_1 que son miembros de α, pm_2 miembros de β_2 que los son de α, ... y pm_s miembros de β_s que son miembros de α; luego, como se llega a una selección de B_1 tal que todos sus miembros lo sean de α tomando uno cualquiera de tales pm_1 miembros de β_1, uno cualquiera de tales pm_2 miembros de β_2, ... y uno cualquiera de dichos pm_s miembros de β_s, el número de tales selecciones es (pm_1) (pm_2) ... (pm_s). Veamos ahora las selecciones de B_2 tales que ninguno de sus miembros lo sean de α. Si en lugar de $1 - p$ escribimos q[21], existen qm_{s+1} miembros de β_{s+1} que no lo son de α, qm_{s+2} miembros de β_{s+2} que no lo son de α, ... y qm_n miembros de β_n que no lo son de α; así pues, el número de selecciones de B_2 tales que ninguno de sus miembros lo sea de α es (qm_{s+1}) (qm_{s+2}) ... (qm_n). Cada una de estas últimas selecciones puede combinarse con cada una de las $p^s\, m_1\, m_2 \ldots m_s$ selecciones de B_1, dando una selección de B que contendrá s miembros de α (uno de cada una de las s clases-miembros de B_1) y $n - s$ miembros de α' —que es el complemento de α, es decir, la clase de las cosas que no son miembros de α— (uno de cada una de las $n - s$ clases-miembros de B_2); por tanto, el número de semejantes selecciones de B será

$$(pm_1)\,(pm_2)\,\ldots\,(pm_s)\,(qm_{s+1})\,(qm_{s+2})\,\ldots\,(qm_n),$$

esto es,

$$p^s q^{n-s} m_1\; m_2\; \ldots\; m_n.$$

Sin embargo —a menos que s sea 0 o n—, hay más de una manera de dicotomizar B en dos subhiperclases, una de las cuales contenga s miembros y la otra $n - s$ miembros: el número de tales dicotomías es el de combinaciones de n cosas tomadas de s en s (en realidad, la

---

[21] q es, como p, una fracción propia, 0 o 1.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

definición de la combinación es la de ser un modo de dicotomizar), ${}^nC_s$, que, según se demuestra, es $\frac{n!}{s!\,(n-s)!}$ [22]. Por consiguiente, para llegar a obtener el número de selecciones de B que contengan s miembros de α tomados de los miembros de cualquier subhiperclase —de s miembros— de B más $n-s$ miembros de α' tomados de las demás clases-miembros de B, tenemos que multiplicar $p^s\ q^{n-s}\ m_1\ m_2\ \ldots\ m_n$ por ${}^nC_s$; mas dichas selecciones son todas las de B que contengan exactamente s miembros de α, y su número será, por tanto,

$$ {}^nC_s p^s q^{n-s} m_1 m_2 \ldots m_n. $$

En consecuencia, dentro de la hiperclase de todas las selecciones —o hiperclase omniselectiva— de B, la proporción de las selecciones que contengan exactamente s miembros de α se obtiene dividiendo el número que acabamos de hallar por el de miembros de la hiperclase omniselectiva citada, que es $m_1\ m_2\ \ldots\ m_n$; proporción, pues, que será igual a

$$ \frac{{}^nC_s p^s q^{n-s} m_1 m_2 \ldots m_n}{m_1 m_2 \ldots m_n} = {}^nC_s p^s q^{n-s}. $$

Lo que tiene de notable este teorema no es tanto los números que entran en él cuanto aquéllos a que no se refiere: pues los números m_1, m_2, ..., m_n —es decir, los tamaños de las clases-miembros de la hiperclase probabilitaria— han quedado eliminados, y hemos llegado al resultado de que la proporción de selecciones de una hiperclase probabilitaria que contengan exactamente s miembros de α depende de dos —y sólo dos— números vinculados a la hiperclase: su parámetro en α, p, y el número de sus clases-miembros, n. Tal proporción no depende en modo alguno de los tamaños que tengan éstas, sino de cuántas contenga la hiperclase; y como los demás teoremas que han de demostrarse se deducen de éste y tampoco hacen referencia a m_1, m_2, ... ni m_n, al aplicar este sistema deductivo puro no tendremos necesidad de asignar valores definidos, con significación empírica, a estos números, m_1, m_2, ... m_n: pueden emplearse como símbolos sin interpretar, como las fases de la ecuación de onda de la mecánica cuántica.

Para continuar con la aritmética de razones de clase necesitamos lo que sigue. Puesto que una selección que comprenda exactamente s miembros de α no comprende exactamente t miembros de α (sien-

[22] $n! = 1.2.3\ldots\ldots n$ (que en los libros anticuados se escribe así: $\underline{|n}$); en las obras modernas es frecuente que ${}^nC_s$ se escriba $\binom{n}{s}$; $0!$ se define de modo que valga 1, de suerte que ${}^nC_n$, ${}^nC_0$ y ${}^0C_0$ son iguales a 1.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

do $s \neq t$), dentro de la hiperclase omniselectiva la proporción de las selecciones que contengan un número de miembros que sea s_1, s_2 o algún número comprendido entre s_1 y s_2 (siendo $0 \leqslant s_1 < s_2 \leqslant n$), se calcula sumando los valores de las proporciones correspondientes a cada valor de s situado en el intervalo $s_1 \leqslant s \leqslant s_2$; esta suma vale

$$^nC_{s_1}p^{s_1}q^{n-s_1} + {}^nC_{s_1+1}p^{s_1+1}q^{n-(s_1+1)} + \ldots + {}^nC_{s_2}p^{s_2}q^{n-s_2},$$

y la expresaremos abreviadamente por $\sum\limits_{s=s_1}^{s_2} {}^nC_sp^sq^{n-s}$ [22]. Dado que toda selección contiene ó 0 ó 1, ó 2, ó ... n miembros de α, dentro de la hiperclase omniselectiva la proporción de las selecciones que contengan ó 0, ó 1, ó 2, ó ... n miembros de α es 1, y $\sum\limits_{s=0}^{n} {}^nC_sp^sq^{n-s} = 1$ (lo cual constituye un caso especial del teorema del binomio del álgebra ordinaria).

El número medio de miembros de α por selección se calcula multiplicando cada número de 0 a n (inclusive) por la proporción de selecciones que comprendan exactamente dicho número de miembros de α y sumando todas estas proporciones así ponderadas; se llega al valor $\sum\limits_{s=0}^{n} s.{}^nC_sp^sq^{n-s}$, que, como demostramos en el apéndice de este capítulo (teorema II) resulta ser np. Ya que toda selección tiene n miembros, la proporción media de miembros de α por selección es $np/n = p$.

Lo que queremos calcular para nuestros propósitos lógicos es, dentro de la hiperclase omniselectiva, la proporción de selecciones cuyo número —s— de miembros de α se encuentre fuera de cierto intervalo situado en derredor del número medio np; esto es, queremos calcular

$$\sum_{s=0}^{n_1} {}^nC_sp^sq^{n-s} + \sum_{s=n_2}^{n} {}^nC_sp^sq^{n-s},$$

siendo n_1 inferior a np en una cantidad especificada y n_2 superior a np en otra cantidad especificada, y siendo el intervalo comprendido entre n_1 y n_2 aquél fuera del cual ha de hallarse el número de miembros de la selección que ahora interesa. De Moivre propuso (1733) un método general para calcular aproximadamente esta proporción (y otras parecidas), método que luego fue desarrollado por

---

[22] $\sum\limits_{s=s_1}^{s_2} f(s)$, siendo $f(s)$ una función cualquiera de s, está solamente definida cuando $s_1 < s_2$; conviene definir que es igual a $f(s_1)$ cuando $s_1 = s_2$, e igual a 0 cuando $s_1 > s_2$.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Laplace (1812) y que requiere la utilización del cálculo infinitesimal. En lugar de exponerlo, emplearemos otro método más sencillo, debido inicialmente a Bienaymé (1853), pero desarrollado independientemente por Chebichev (1867), para calcular no un valor aproximado, sino una cota superior del exacto —es decir, un valor que éste no pueda exceder—, lo cual basta para nuestros propósitos.

La forma en que es más conveniente plantear el teorema correspondiente —que demostramos en el apéndice de este capítulo (teorema IV)— es la que sigue.

Tomemos un número positivo cualquiera, k, por pequeño que sea; consideremos el intervalo[24] que se extiende desde $np - \sqrt{(npq/k)}$, que será su punto izquierdo, hasta $np + \sqrt{(npq/k)}$, que será su punto derecho —es decir, el intervalo cuyo centro es np y cuya longitud total es $2\sqrt{(npq/k)}$—: lo expresaremos escribiendo $[np - \sqrt{(npq/k)}, np + \sqrt{(npq/k)}]$; sea n_1 el mayor entero inferior al punto izquierdo de este intervalo, y sea n_2 el menor entero superior a su punto derecho; entonces, el teorema afirma que

$$\sum_{s=0}^{n_1} {}^{n}C_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=n_2}^{n} {}^{n}C_s p^s q^{n-s} < k,$$

o sea, que, entre todas las selecciones, la proporción de aquéllas cuyo número de miembros de α caiga fuera del intervalo

$$[np - \sqrt{(npq/k)}, np + \sqrt{(npq/k)}]$$

es menor que k, por pequeño que sea el número positivo k.

Podemos formular este teorema de otro modo que es aún más conveniente para la utilización que vamos a hacer de él. En lugar de fijarnos en s, que es el número de miembros de α incluidos en una selección dotada en total de n, lo haremos en $r = s/n$, que es la razón del número de miembros de α contenidos en la selección al número total de miembros de la misma (que tiene n), y llamaremos a r la *razón en* α de la selección (puesto que $0 \leqslant s \leqslant n, 0 \leqslant r \leqslant 1$). Entonces, decir que s se encuentre entre $np - \sqrt{(npq/k)}$ y $np + \sqrt{(npq/k)}$ equivale a decir que r se halle entre $p - \sqrt{(pq/nk)}$ y $p - \sqrt{(pq/nk)}$; de modo que podemos formular nuestro teorema diciendo que, *entre*

[24] Supondremos siempre que los intervalos incluyen sus puntos extremos: por consiguiente, sólo emplearemos lo que los matemáticos llaman «intervalos cerrados»; y habrá de entenderse que al hablar de «dentro» de un intervalo, de «dentro» de una elipse o de encontrarse «entre» dos puntos se incluyen los puntos o líneas frontera.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

todas las selecciones, la proporción de aquéllas cuya razón en α *se halle fuera del intervalo* $[p - \sqrt{(pq/k)},\ p + \sqrt{(pq/nk)}]$ *es menor que* k, *por pequeño que sea el número positivo* k. Si llamamos *desviación* de p de una selección la cantidad en que su razón en α difiera de p, entre todas las selecciones la proporción de aquéllas cuya razón en α se desvíe de p en más de $\sqrt{(pq/nk)}$ es inferior a k; y, entre todas las selecciones, la proporción complementaria, es decir, la de aquéllas cuya razón en α no se desvíe de p en una cantidad superior a $\sqrt{(pq/nk)}$, es mayor que $1 - k$, por pequeño que sea el número positivo k.

En el sistema deductivo puro de la aritmética de las razones de clase este teorema es la clave de bóveda que mantiene unida la propuesta que hemos de hacer en el capítulo siguiente acerca del significado de los enunciados probabilitarios; por esta razón presentamos en el apéndice de este capítulo una demostración rigurosa del mismo —demostración que sólo emplea el álgebra elemental—. Debido a su fundamental importancia es muy de desear que se calen a fondo lo que el teorema enuncia y sus consecuencias inmediatas, lo cual puede conseguirse representando dicho enunciado en un diagrama; para ello cabe valerse de una forma de representar ideada por Jerzy Neyman para otros fines ligeramente diferentes, representación muy elegante que nos será muy útil para exponer la teoría probabilitaria en el capítulo siguiente.

El sistema de las elipses de probabilidad

Adóptese un sistema de coordenadas cartesianas; márquense sobre el eje horizontal, de 0 a 1 (ambos inclusive), los valores de r —o sea, de la razón en α, s/n, de las selecciones de n miembros— y hágase lo mismo en el eje vertical con los valores de p —es decir, del parámetro en α de la hiperclase probabilitaria—; complétese un cuadrado trazando una línea horizontal desde el punto de coordenadas $r = 0$, $p = 1$ al punto $r = 1$, $p = 1$ y una línea vertical desde el punto $r = 1$, $p = 0$ al punto $r = 1$, $p = 1$ (véase la figura 7). Cualquier punto situado dentro de este cuadrado que tenga una coordenada p racional y una coordenada r que sea múltiplo de $1/n$ representará una combinación posible de un valor de p con uno de r. Dibujemos ahora el sistema de elipses dado por la ecuación

$$(r - p)^2 = \frac{1}{b}\,[p(1 - p)],$$

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

siendo b cualquier número positivo [25] (para evitar un diagrama confuso hemos dibujado solamente dos de estas elipses: la exterior es aquella en que $b = 4$, y la interior la que tiene $b = 25$); su número es ilimitado; todas ellas son tangentes entre sí y a la recta de ecuación $p = 1$ en el ángulo superior derecho del cuadrado —ángulo de coordenadas (1, 1)—, y también lo son entre sí y a la recta $p = 0$

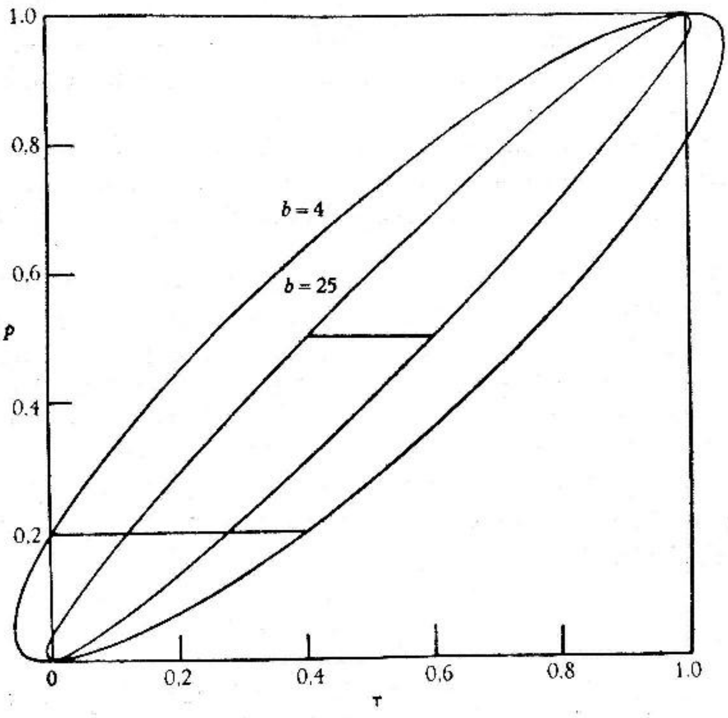


Fig. 7.

en el ángulo inferior izquierdo del mismo —ángulo (0, 0)—. Para un valor dado de b, digamos b_1, todas las elipses cuyos valores de b excedan de b_1 se encuentran dentro de la elipse de b_1; por consiguiente, las elipses forman un sistema de encajamiento sucesivo [*lit.*, de «caja china»] en el que se hacen cada vez más alargadas al aumentar b, hasta llegar a confundirse con la diagonal de ecuación $r = p$ cuando b crece sin fin y sin límite.

Para unos valores cualesquiera dados de b y p, digamos b_1 y p_1, la parte de la recta $p = p_1$ situada dentro de la elipse correspondiente

---

[25] Al final del Apéndice de este capítulo damos un resumen de las propiedades geométricas de estas elipses.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

a b_1 representará el intervalo $[p_1 - \sqrt{\{p_1(1-p_1)/b_1\}},\ p_1 + \sqrt{\{p_1(1-p_1)/b_1\}}]$ [26] (en el diagrama hemos trazado dos rectas de este tipo, que representan estos intervalos para los casos $b = 25$, $p = 1/2$ y $b = 4$, $p = 1/5$). Así pues, para un valor dado, b_1, de b, la región situada dentro de la elipse correspondiente a b_1 representará el conjunto de estos intervalos para todos los valores de p situados entre 0 y 1.

Podemos formular ahora el teorema de Bienaymé-Chebichev diciendo que, para todo número racional dado, p, situado entre 0 y 1, para todo entero positivo dado n y todo número positivo dado k, entre todas las selecciones, la proporción de éstas que estén representadas por puntos situados dentro del cuadrado pero fuera de la elipse correspondiente a b es menor que k, siendo $b = nk$.

La ley de los grandes números

Consideremos cualquier valor fijo del parámetro probabilitario, p.

Para un valor dado, k_1, de k, los intervalos fuera de los cuales se encuentran las razones en α de una proporción inferior a k_1 de todas las selecciones disminuye continuamente al aumentar n, y forman un conjunto de intervalos encajados sucesivamente en el que el intervalo de mayor valor de n se halla siempre dentro del correspondiente al valor menor de n; y, puesto que el tamaño de los intervalos varía inversamente con la raíz cuadrada de n, dicho tamaño tiende a 0 al aumentar n sin fin y sin límite.

TABLA IV. *Valores de* pq/nd^2 *para distintos valores de* n *y de* d

(Las casillas sin número corresponden a $pq/nd^2 > 1$)

Caso en que $p = 1/2$, $q = 1/2$.

$n =$	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
$d = 0,1$	0,25	0,025	0,0025	0,00025	0,000025
$d = 0,01$	—	—	0,25	0,025	0,0025
$d = 0,001$	—	—	—	—	0,25

[26] Los valores de r correspondientes a los valores dados, b_1 (de b) y p_1 (de p), se obtienen resolviendo con respecto a r la ecuación cuadrática

$$(r-p_1)^2 = p_1(1-p_1)/b_1,$$

cuyas soluciones son $p_1 \pm \sqrt{\{p_1(\ -p_1)/b_1\}}$.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Caso en que $p = {}^1/_5$, $q = {}^4/_5$.

$n =$	100	1.000	10.000	10.0000	1.000.000
$d = 0{,}1$	0,16	0,016	0,0016	0,00016	0,000016
$d = 0{,}01$	—	—	0,16	0,016	0,0016
$d = 0{,}001$	—	—	—	—	0,16

Si adoptamos ahora otro valor, k_2, de k inferior a k_1, los intervalos forman otro conjunto análogo de encajamiento sucesivo en el que el intervalo que para el caso k_1 correspondía a n corresponde ahora a $(k_1/k_2)n$: el conjunto encajado sucesivamente es el mismo, pero su numeración con respecto a n es k_1/k_2 veces mayor.

Por tanto, si en lugar de fijar k fijamos el tamaño del intervalo que ha de tener como centro p, podemos encontrar una cota superior de la proporción de las selecciones cuya razón en α caiga fuera de dicho intervalo fijo: cota superior que está dada por el teorema —demostrado en el apéndice de este capítulo (teorema VI)— según el cual, entre todas las selecciones, la proporción de las que tengan una razón en α situada fuera del intervalo $[p - d, p + d]$ (siendo d cualquier número positivo, por pequeño que sea), no excede de pq/nd^2.

En la tabla IV damos dos ejemplos numéricos de este teorema, del cual se sigue inmediatamente lo que en los libros sobre la teoría de la probabilidad se suele llamar la ley de los grandes números: pues la cota superior de la proporción pq/nd^2 tiende al límite 0 al aumentar n sin fin y sin límite, y, en consecuencia, la proporción de selecciones cuya razón en α se desvíe de p en una cantidad superior a d (proporción que no puede ser mayor que pq/nd^2) tiende también al límite 0 al crecer n sin límite; y, entre todas las selecciones, la proporción (complementaria) de las que tengan una razón en α que no se desvíe de p en una cantidad mayor que d (proporción que no puede ser inferior a $1 - pq/nd^2$) tiende al límite 1 al aumentar n sin fin y sin límite. Este enunciado expresa, a base de la noción de límite matemático, el hecho de que, por pequeño que tomemos un intervalo con centro en p, se pueda encontrar un número n tal que, entre todas las selecciones con n miembros, la proporción de aquéllas cuya razón en α caiga dentro de este intervalo se aproxima a 1 cuanto se desee; y si suponemos que «casi todas» significa todas excepto una proporción tan pequeña como queramos, k, y que «casi iguales a p» quiere decir que su desviación de p no excede de una cantidad, d, arbitrariamente pequeña, podemos expresar la ley de los grandes números di-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

ciendo que, si se toma un valor de n suficientemente grande[27], *casi todas las selecciones de* n *miembros tienen razones en* α *casi iguales a* p.

Los jugadores que aplican este resultado matemático a los juegos de azar lo simplifican a menudo de dos modos que son equivocados: 1) omiten el «casi» delante de «todas las selecciones de n miembros», de suerte que suponen que el teorema enuncia que, si tomamos un n suficientemente grande, *todas* estas selecciones tienen razones en α casi iguales a p; por lo cual es evidentemente falso excepto en los casos extremos de ser $p = 1$ y $p = 0$, en que es evidentemente verdadero (pues en estos dos casos todas las selecciones de n miembros tienen razones en α exactamente iguales a 1 o iguales a 0, cualquiera que sea el número positivo n); 2) omiten el «casi» delante de «iguales a p»; con lo cual suponen que el teorema afirma que, si n se toma suficientemente grande, casi todas las selecciones de n miembros tienen razones en α *exactamente iguales a* p; lo cual, como la primera simplificación, es trivialmente verdadero en los dos casos extremos; en los demás casos es evidentemente falso si np no es un entero; y si lo es, la proporción de semejantes selecciones es ${}^{n}C_{s}\, p^{np}\, q^{nq}$, cantidad que, según se demuestra, tiende al límite 0 al aumentar n sin fin y sin límite[28]. (De modo que, en realidad, un teorema contrario sostiene que (a menos que p valga 0 ó 1) si n es suficientemente grande, casi ninguna de las selecciones de n miembros tiene la razón en α exactamente igual a p). En la raíz de la mayoría de los «sistemas infalibles de jugar» se encuentra alguno de estos dos errores matemáticos, o ambos.

APENDICE

En todas las demostraciones que siguen, l es un entero no negativo, n un entero positivo y p y q son números racionales no negativos sometidos a la condición de que cumplan $p + q = 1$.

En el capítulo anterior hemos demostrado el teorema I para el caso de ser $l > 0$; necesitamos su generalización al caso en que sea $l = 0$ para la demostración de los teoremas II y III, que a su vez constituyen pasos de la demostración del teorema IV.

---

[27] De hecho, mayor que pq/kd^2.

[28] No damos esta demostración, que es muy sencilla, ya que este resultado no se utilizará en lo que sigue.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

TEOREMA I. [Desarrollo binomial de $(q-p)^l$ para exponente entero no negativo en caso de que p sea racional, $0 \leqslant p \leqslant 1$ y $q = 1 - p$.]

$$\sum_{s=0}^{l} {}^{l}C_s p^s q^{l-s} = 1.$$

Hemos demostrado esta igualdad (pág. 159) cuando l es un entero positivo; cuando es $l = 0$,

$$\sum_{s=0}^{l} {}^{l}C_s p^s q^{l-s} = {}^{0}C_0 p^0 q^0 = 1;$$ [29]

y el teorema queda demostrado cualquiera que sea el entero no negativo l.

TEOREMA II. [Primer momento respecto de cero —o sea, media— de una distribución binomial.]

$$\sum_{s=0}^{l} s \,.\, {}^{l}C_s p^s q^{l-s} = lp.$$

Demostración. Consideremos primeramente el caso en que l sea un entero positivo:

$$\sum_{s=0}^{l} s \,.\, {}^{l}C_s p^s q^{l-s} = 0 \,.\, q^l + 1 \,.\, lpq^{l-1} + 2 \,.\, \frac{l(l-1)}{1 \,.\, 2} p^2 q^{l-2} +$$

$$+ 3 \,.\, \frac{l(l-1)(l-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} p^3 q^{l-3} + \ldots + l \,.\, p^l =$$

$$= lp \left[q^{l-1} + (l-1) pq^{l-2} + \frac{(l-1)(l-2)}{1 \,.\, 2} p^2 q^{l-3} + \ldots + p^{l-1} \right] =$$

$$= lp \,.\, \sum_{s=0}^{l-1} {}^{l-1}C_s p^s q^{(l-1)-s} =$$

$$= lp,$$

en virtud del teorema I, ya que $l - 1$ es un entero no negativo.

Consideremos ahora el caso en que sea $l = 0$:

$$\sum_{s=0}^{l} s \,.\, {}^{l}C_s p^s q^{l-s} = 0 \,.\, {}^{0}C_0 p^0 q^0 = 0 = lp;$$

y el teorema está demostrado cualquiera que sea el entero no negativo l.

[29] $a^0 = 1$ cualquiera que sea a (incluyendo 0).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Teorema III. [Segundo momento respecto de la media —o sea, varianza, o cuadrado de la desviación típica— de una distribución binomial.]

$$\sum_{s=0}^{n} (np - s)^2 . {}^{n}C_s p^s q^{n-s} = npq.$$

Demostración.

$$\sum_{s=0}^{n} (np - s)^2 . {}^{n}C_s p^s q^{n-s} = n^2p^2 \sum_{s=0}^{n} {}^{n}C_s p^s q^{n-s} - 2np \sum_{s=0}^{n} s . {}^{n}C_s p^s q^{n-s} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{n} s^2 . {}^{n}C_s p^s q^{n-s} =$$

$$= n^2p^2 . 1 - 2np . np + \sum_{s=0}^{n} s^2 . {}^{n}C_s p^s q^{n-s},$$

por los teoremas I y II.

$$\sum_{s=0}^{n} s^2 . {}^{n}C_s p^s q^{n-s} = 0^2 . q^n + 1^2 . npq^{n-1} + 2^2 . \frac{n(n-1)}{1.2} p^2q^{n-2} +$$

$$+ 3^2 . \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} p^3q^{n-3} + \ldots + n^2 . p^n =$$

$$= np \left[q^{n-1} + 2.(n-1)pq^{n-2} + 3. \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} p^2q^{n-3} + \right.$$

$$\left. + \ldots + n . p^{n-1} \right] =$$

$$= np \left[\left\{ q^{n-1} + (n-1)\, pq^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} p^2q^{n-3} + \right. \right.$$

$$\left. + \ldots + p^{n-1} \right\} + \left\{ 0 . q^{n-1} + 1.(n-1)pq^{n-2} + \right.$$

$$\left. \left. + 2 . \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} p^2q^{n-3} + \ldots + (n-1) . p^{n-1} \right\} \right] =$$

$$= np \left[\sum_{s=0}^{n-1} {}^{n-1}C_s p^s q^{(n-1)-s} + \sum_{s=0}^{n-1} s . {}^{n-1}C_s p^s q^{(n-1)-s} \right] =$$

$$= np\,[1 + (n-1)\,p],$$

9

por los teoremas I y II, ya que $n - 1$ es un entero no negativo.

De aquí, $\sum_{s=0}^{n} (np - s)^2 . {}^{n}C_s p^s q^{n-s} = n^2p^2 - 2n^2p^2 + np + n^2p^2 - np^2 =$

$$= np\,(1 - p) =$$

$$= npq.$$

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

(El teorema III se cumple también cuando $n = 0$, ya que, en este caso,

$$\sum_{s=0}^{n} (np - s)^2 . {}^nC_s p^s q^{n-s} = 0^2 . {}^0C_0 p^0 q^0 = 0 = npq.$$

Pero en lo que sigue no se precisa tal generalización.)

Teorema IV. [Una forma de la desigualdad de Bienaymé-Chebichev en el caso de una distribución binomial.]

Si m_1 es el mayor entero menor que $np - \sqrt{(npq/k)}$ y m_2 es el menor entero mayor que $np + \sqrt{(npq/k)}$, siendo k cualquier número positivo,

$$\sum_{s=0}^{m_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} < k.$$

Demostración. Consideremos primero el caso de que sean $p > 0$ y $q > 0$; cada una de las sumas

$$\sum_{s=0}^{m_1} {}^nC_s p^s q^{n-s}, \quad \sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s}$$

es, o bien cero o bien positiva.

Si ambas son cero el teorema está demostrado.

Supongamos que una de ellas sea positiva (o lo sean las dos).

$$\sum_{s=0}^{m_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} <$$

$$< \frac{k}{npq}\left[(np - m_1)^2 . \sum_{s=0}^{m_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + (np - m_2)^2 . \sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s}\right],$$

puesto que $(np - m_1)^2 > \frac{npq}{k}$ y $(np - m_2)^2 > \frac{npq}{k}$.

De aquí
$$\sum_{s=0}^{m_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} <$$

$$< \frac{k}{npq}\left[\sum_{s=0}^{m_1} (np - s)^2 . {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=m_2}^{n} (np - s)^2 . {}^nC_s p^s q^{n-s}\right],$$

ya que $(np - s)^2 \geqslant (np - m_1)^2$ para $s = 0, 1, 2, \ldots, m_1$,

y $(np - s)^2 \geqslant (np - m_2)^2$ para $s = m_2, m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, n$.

De aquí
$$\sum_{s=0}^{m_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} <$$

$$< \frac{k}{npq}\left[\sum_{s=0}^{n} (np - s)^2 . {}^nC_s p^s q^{n-s}\right],$$

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

puesto que $$\sum_{s=m_1+1}^{m_2-1} (np - s)^2 . {}^nC_s p^s q^{n-s} > 0.$$

De aquí $\sum_{s=0}^{m_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} < \frac{k}{npq} . npq$, por el teorema III;

y $$\sum_{s=0}^{m_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} < k.$$

Consideremos ahora el caso en que $p = 0$ y $q = 1$. Puesto que ahora

$np - \sqrt{(npq/k)} = np + \sqrt{(npq/k)} = 0$, $m_1 = -1$ y $m_2 = 1$:

$$\sum_{s=0}^{m_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} = 0, \quad \text{ya que } m_1 < 0;\text{[30]}$$

y $$\sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} = 0, \quad \text{ya que } 0^s = 0 \text{ para } s = 1, 2, \ldots, n.$$

De aquí $\sum_{s=0}^{m_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} = 0 < k.$

Consideremos, finalmente, el caso de que sean $p = 1$ y $q = 0$; puesto que ahora

$np - \sqrt{(npq/k)} = np + \sqrt{(npq/k)} = n$, $m_1 = n - 1$ y $m_2 = n + 1$:

$$\sum_{s=0}^{m_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} = 0, \quad \text{ya que } 0^{n-s} = 0 \text{ para } s = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$$

y $$\sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} = 0, \quad \text{ya que } m_2 > n.$$

De aquí $\sum_{s=0}^{m_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} = 0 < k;$

y el teorema ha quedado demostrado en todos los casos.

TEOREMA V. [Corolario del teorema IV que utilizaremos en el capítulo sexto.]

Si $p \leqslant 1/2$ y m_2 es el menor entero mayor que $np + \sqrt{(npq/k)}$, siendo k un número positivo cualquiera, para todo número y tal que $0 < y \leqslant p$,

$$\sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s y^s (1-y)^{n-s} < k.$$

[30] $\sum_{s=s_1}^{s_2} f(s)$ se ha definido (pág. 159) de modo que sea igual a 0 cuando sea $s_1 > s_2$.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Demostración. Sea m_3 el mayor entero menor que $ny - \sqrt{\{ny(1-y)/k\}}$ y sea m_4 el menor entero mayor que $ny + \sqrt{\{ny(1-y)/k\}}$.

$$\begin{aligned} pq - y(1-y) = p(1-p) - y(1-y) &= \\ &= (p-y) - (p^2 - y^2) = \\ &= (p-y)[1-(p+y)] \geqslant \\ &\geqslant 0, \text{ puesto que } y \leqslant p \leqslant {}^1/_2. \end{aligned}$$

De aquí $$pq \geqslant y(1-y)$$

y $$np + \sqrt{\frac{npq}{k}} \geqslant ny + \sqrt{\frac{ny(1-y)}{k}};$$

de donde $m_2 \geqslant m_4$.

$$\begin{aligned} \sum_{s=m_2}^{n} {}^nC_s y^s (1-y)^{n-s} \leqslant \sum_{s=m_4}^{n} {}^sC_s y^s (1-y)^{n-s} &\leqslant \\ \leqslant \sum_{s=0}^{m_3} {}^nC_s y^s (1-y)^{n-s} + \sum_{s=m_4}^{n} {}^nC_s y^s (1-y)^{n-s} &< \\ < k, \text{ por el teorema IV.} \end{aligned}$$

(La restricción $p \leqslant 1/2$ es innecesaria, pero la demostración es más complicada sin ella, y depende del hecho de que $ny + \sqrt{\{ny(1-y)/k\}}$ sea función creciente de y para $0 \leqslant ny + \sqrt{\{ny(1-y)/k\}} \leqslant n.$)

Teorema VI. [Otra forma de la desigualdad de Bienaymé-Chebichev en el caso de la distribución binomial.]

Si n_1 es el mayor entero menor que $n(p-d)$ y si n_2 es el menor entero mayor que $n(p+d)$, siendo d un número positivo cualquiera, entonces

$$\sum_{s=0}^{n_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=n_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} \leqslant \frac{pq}{nd^2}.$$

Demostración. Consideremos primero el caso de que sean $p > 0$ y $q > 0$. Tómese un número positivo cualquiera, d, y hágase k igual a pq/nd^2, que es un número positivo siempre que sean $p > 0$ y $q > 0$. Entonces, d es la raíz cuadrada positiva de pq/nk, esto es, $\sqrt{(pq/nk)}$, y $n(p-d) = np - \sqrt{(npq/k)}$, $n(p+d) = np + \sqrt{(npq/k)}$.

Por consiguiente, $k = pq/nd^2$ satisface las condiciones del teorema IV; y de aquí

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{n_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=n_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} &< k \\ &< \frac{pq}{nd^2}. \end{aligned}$$

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Consideremos ahora el caso en que sean $p = 0$ y $q = 1$. Entonces, como $n_1 < -nd$, es $n_1 < 0$, y como $n_2 > nd$ es $n_2 > 0$:

$$\sum_{s=0}^{n_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} = 0, \quad \text{ya que } n_1 < 0;$$

y

$$\sum_{s=n_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} = 0, \quad \text{ya que } 0^s = 0 \text{ para } s \geqslant n_2 \geqslant 0.$$

De aquí $$\sum_{s=0}^{n_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=n_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} = 0 \leqslant \frac{pq}{nd^2}.$$

Consideremos, por fin, el caso en que sean $p = 1$ y $q = 0$. Entonces, puesto que $n_1 < n - nd$ es $n_1 < n$, y puesto que $n_2 > n + nd$ es $n_2 > n$:

$$\sum_{s=0}^{n_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} = 0, \quad \text{ya que } 0^{n-s} = \text{ para } s \leqslant n_1 < n;$$

y

$$\sum_{s=n_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} = 0, \quad \text{ya que } n_2 > n.$$

De aquí $$\sum_{s=0}^{n_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=n_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} = 0 \leqslant \frac{pq}{nd^2};$$

y el teorema ha quedado demostrado en todos los casos.

(La demostración hace ver que

$$\sum_{s=0}^{n_1} {}^nC_s p^s q^{n-s} + \sum_{s=n_2}^{n} {}^nC_s p^s q^{n-s} < \frac{pq}{nd^2}$$

a menos que, o bien sea $p = 0$, o sea $p = 1$.)

Nota. Ninguna de las demostraciones de estos teoremas se apoya en la restricción de p y q a los números racionales. Los teoremas en que no se formula esta restricción siguen en sus demostraciones el mismo camino exactamente a partir del teorema del binomio para exponente entero y positivo del álgebra ordinaria, en el que no se restringe la generalidad del modo indicado.

Las elipses de probabilidad

Propiedades del sistema de cónicas dado por la ecuación

$$(r - p)^2 = \frac{1}{b}\,[p\,(1 - p)],$$

esto es, $$br^2 - 2brp + (b + 1)\,p^2 - p = 0.$$

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Si $b > 0$ todas estas cónicas son elipses, ya que el discriminante es

$$b(b+1) - b^2 = b > 0.$$

Las soluciones con respecto a r en función de p son

$$r = p \pm \sqrt{\frac{p(1-p)}{b}}.$$

Las soluciones con respecto a p en función de r son

$$p = \frac{2br + 1 \pm \sqrt{\{4br(1-r) + 1\}}}{2(b+1)}.$$

Si $p = 0$, $r = 0$ (raíz doble), y si $p = 1$, $r = 1$ (raíz doble), de suerte que todas las elipses son tangentes a la línea $p = 0$ (y, por tanto, lo son entre sí) en el punto $(0, 0)$, y son también tangentes a la línea $p = 1$ (y, por tanto, asimismo entre sí) en el punto $(1, 1)$.

Si $r = 0$, o bien $p = 0$ ó $p = \frac{1}{b+1}$.

Si $r = 1$, o bien $p = 1$ ó $p = \frac{b}{b+1}$.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

El significado de los enunciados probabilitarios dentro de un sistema científico

El sistema deductivo de las razones de clase que hemos desarrollado en el capítulo anterior es un sistema deductivo puro en el que todos los teoremas tienen la hipotética forma siguiente: si una hiperclase probabilitaria tiene cierto parámetro probabilitario, entonces se siguen tales y cuales consecuencias acerca de la proporción de cierta hiperclase relacionada con aquélla. Con objeto de incorporar este sistema deductivo puro a un sistema aplicado que contenga proposiciones lógicamente contingentes que puedan confrontarse con la experiencia, hemos de añadirle una proposición que asigne un valor determinado al parámetro probabilitario de la hiperclase probabilitaria; con lo cual podremos deducir en el sistema aplicado proposiciones acerca de clases que estén vinculadas de diversas maneras a aquellas hiperclases.

La interpretación de los enunciados probabilitarios que vamos a presentar en este capítulo consiste en considerarlos proposiciones que asignen valores a los parámetros probabilitarios de hiperclases probabilitarias, y, además, proposiciones (hipótesis estadísticas) que funcionen como hipótesis de nivel supremo de un sistema deductivo aplicado. La peculiaridad de estas hipótesis estadísticas es que no son refutables de modo concluyente por ninguna experiencia: como veremos, pueden darse criterios empíricos para rechazarlas, pero semejantes rechazos serán siempre provisionales y estarán sujetos a revocación. La función epistemológica del sistema deductivo que determina el significado de una hipótesis estadística que sirva de hipótesis de nivel máximo es distinta de la propia de un sistema deductivo científico en el que las hipótesis de nivel supremo sean hipótesis no estadísticas acerca de conceptos teoréticos: en estas últimas, lo que determina el significado de los enunciados que contengan el término teorético son las hipótesis de nivel ínfimo, mientras que en las primeras el significado

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

de los enunciados probabilitarios que expresen las hipótesis estadísticas queda establecido directamente por una regla generalizada de rechazamiento; pero las razones que tenemos para utilizar esta regla dependen de que la hipótesis estadística actúe como hipótesis de nivel supremo de un sistema deductivo probabilitario. Por consiguiente, el estudio del significado de los enunciados probabilitarios es distinto del de los que contengan términos teoréticos, y exige un capítulo aparte para su exposición.

Hipótesis universales e hipótesis estadísticas

Entre los preliminares necesarios para semejante estudio se cuenta el percatarse de que todos los enunciados generales son, de hecho, enunciados probabilitarios, ya que decir que todos los *A* son *B* es lo mismo que decir que el 100 por 100 de los *A* son *B*, lo cual (de acuerdo con mi tesis) equivale a decir que la probabilidad de que un *A* sea *B* es 1; y análogamente, decir que ningún *A* es *B* es decir que el 0 por 100 de los *A* son *B* y decir que la probabilidad de que un *A* sea *B* es 0: las generalizaciones universales, ya sean afirmativas o negativas, son casos especiales de los enunciados probabilitarios. El hecho de que, frente a los demás enunciados probabilitarios, puedan ser refutados lógicamente por la experiencia no procede de que no sean enunciados de esta índole, sino de que las probabilidades que adscriben toman los valores extremos, 1 y 0[1].

Así pues, las doctrinas correctas acerca del modo lógico de funcionar de los enunciados probabilitarios dentro de los sistemas deductivos de la probabilidad tienen que aplicarse también a las generalizaciones universales como a casos límites. Lo cual puede guiarnos en la búsqueda de una solución.

---

[1] Quienes prefieran emplear el modelo de la bolsa infinita para la teoría de la probabilidad objetarán a la identificación de los enunciados probabilitarios que adscriben probabilidades de valor 1 y 0 con las generalizaciones universales. Si existe al menos una bola negra, pero no un número infinito de ellas, en la bolsa continente un número infinito de bolas —se dice—, este hecho del modelo corresponderá a una probabilidad nula de que un *A* sea *B*, y no a que ningún *A* sea *B*. Mi respuesta es que se trata de una razón suplementaria que muestra lo inapropiado que es el modelo de la bolsa infinita, ya que, tal y como se emplean las probabilidades en la ciencia, se admite que las asignaciones de probabilidad cero son indistinguibles de las generalizaciones universales. Los matemáticos puros que han subsumido la aritmética de las razones de clase dentro de una teoría, más general, de la medida de conjuntos infinitos de puntos sortean esta dificultad valiéndose de artificios tales como omitir de su consideración los conjuntos de puntos cuya «medida» sea cero.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Como hemos visto, lo que otorga significado a una cláusula que exprese una generalización universal empírica del nivel hipotético ínfimo es su posición en un cálculo que se interprete como expresión *de un sistema deductivo aplicado. Por ejemplo, la cláusula «todos* los nacimientos son de niños» significa exactamente aquella proposición (de fuerza lógica mínima) tal que de la conyunción de ella con la proposición de que un acontecimiento determinado sea un nacimiento se siga lógicamente la proposición según la cual aquel acontecimiento determinado es el nacimiento de un niño. Pero decir que la proposición *c* es consecuencia lógica de la conyunción de dos proposiciones, *a* y *b*, equivale a decir que *a* es lógicamente incompatible con la conyunción de *b* y no-*c*; de aquí que podamos admitir con la misma razón que el significado de la cláusula «todos los nacimientos son de niños» esté determinado por ser la proposición (de fuerza lógica mínima) que quedaría falsada cuando encontrásemos un nacimiento cualquiera que no fuese de un niño [2]. De ahí que el significado empírico de dicha cláusula esté dado por las observaciones basándose en las cuales se admita que expresa una falsedad: o sea, la proposición expresada por tal cláusula está especificada por las observaciones basándose en las cuales ha de *rechazarse;* y la *regla de rechazamiento* que da significado empírico a «todos los *A* son *B*» es: basándose en la observación de un *A* determinado, rechácese la proposición expresada por la cláusula «todos los *A* son *B*» si y sólo si el *A* determinado que se observe no es *B*. Es lógicamente posible que un *A* cualquiera que se observe sea *B* o no lo sea; la hipótesis de que todo *A* sea *B* reduce estas dos posibilidades a una, de modo que si esta posibilidad única no se realiza la hipótesis es falsa. Si sigo esta regla de rechazamiento con respecto a generalizaciones universales no rechazaré nunca una generalización universal que sea verdadera, y, por tanto, no efectuaré un *rechazamiento equivocado.*

---

[2] El porqué de no haber mencionado este otro segundo modo posible de otorgar significado a los enunciados universales cuando discutimos el primer modo (en las páginas 100 y sig.) reside en que no quería complicar el cálculo que allí utilizaba para debatir la cuestión añadiendo un símbolo —y las reglas que lo gobiernan— que expresara la lógica de la negación. Este segundo modo está entrañado en el criterio —de falsación— popperiano del «carácter empírico» de un sistema de hipótesis (véase más arriba, nota de las páginas 31 y sig.).

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Regla de rechazamiento para enunciados probabilitarios

Consideremos ahora la cláusula «la probabilidad de que un nacimiento lo sea de un niño es $\frac{51}{100}$», o, con expresión sinónima, «el 51 por 100 de los nacimientos son de niños» —que constituye un caso particular de la forma general de proposición expresada por «la probabilidad de que un miembro de β sea miembro de α es p», en donde p denota una fracción propia, es decir, un número racional comprendido entre 0 y 1—. A este tipo de cláusula se le otorga significado mediante la regla de rechazamiento siguiente (que llamaremos *regla* k *de rechazamiento)*: elíjase cualquier número positivo y pequeño, k (por ejemplo, 1/20), y, sobre la base de n observaciones de miembros de β, rechácese la hipótesis de que la probabilidad de que un miembro de β sea miembro de α es p si la razón en α de este conjunto de observaciones (esto es, el número de miembros de α de este conjunto dividido por n) es, o bien inferior a $p - \sqrt{(pq/nk)}$, o bien superior a $p + \sqrt{(pq/nk)}$.

Esta regla equivale a decir, en el lenguaje del último capítulo: mírese el conjunto de n observaciones como una clase selectiva de n miembros tomada de una hiperclase probabilitaria en $\{\alpha, \beta\}$ de n miembros, y admítase que la cláusula probabilitaria exprese la hipótesis de que el parámetro en α de dicha hiperclase probabilitaria tiene el valor p; obsérvese la elipse de probabilidad cuyo valor de b sea nk; si r es la razón en α del conjunto de n observaciones, rechácese la hipótesis en caso de que el punto (r, p) caiga fuera de dicha elipse.

Podemos argumentar como sigue en favor de esta regla k de rechazamiento. O bien la hipótesis que estamos considerando es verdadera o es falsa; si es falsa ningún rechazamiento de ella será equivocado; si es verdadera, todo rechazamiento de la misma estará equivocado[3]; pero en este caso, entre todas las clases selectivas, la proporción de las que tengan una razón en α que caiga fuera del intervalo $[p - \sqrt{(pq/nk)},\ p + \sqrt{(pq/nk)}]$ es inferior a k, de modo que la regla rechazará la hipótesis tan sólo en una proporción k de las posibles ocasiones de rechazamiento, y efectuaremos un rechazamiento equivocado en una proporción inferior a k de tales ocasiones. No

[3] Los rechazamientos equivocados de que hablo equivalen a los «errores de tipo I» introducidos en la literatura estadística por J. Neyman y E. S. Pearson (*Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 29 [1933], pág. 493).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

existe imposibilidad lógica de que al seguir la regla k de rechazamiento rechacemos una hipótesis verdadera —y, por tanto, que nos equivoquemos al rechazar—, pero si la hipótesis es verdadera semejantes rechazamientos equivocados *ocurrirán* en una proporción pequeña de los casos (sólo en un 5 por 100 de las posibles ocasiones si tomamos para k el valor $1/20$); y si tomamos un k suficientemente pequeño, podemos conseguir que los rechazamientos equivocados ocurran solamente en una proporción tan pequeña de los casos que —por emplear una expresión que goza del favor de muchos autores que se ocupan de la estadística matemática— es «prácticamente seguro» que un rechazamiento determinado no forme parte de semejante clase, tan rara. Así pues, será «prácticamente seguro» que, al rechazar una hipótesis en una ocasión determinada de acuerdo con esta regla, no cometeremos la equivocación de rechazar una proposición que, en realidad, sea verdadera.

En esta argumentación se encuentra, sin embargo, un grave hiato, que es preciso salvar. La consecuencia lógica de que p sea el parámetro en α de la hiperclase probabilitaria en $\{\alpha, \beta\}$ es que la proporción de selecciones de esta hiperclase que tengan una razón en α fuera de cierto intervalo alrededor de p es inferior a k; pero lo que se observa es solamente una de estas selecciones, y se lleva a cabo o no un rechazamiento basándose en esta sola selección; mientras que decir que la proporción de dichas selecciones con cierta propiedad es inferior a k o que la proporción de rechazamientos equivocados entre todos los que se hagan basándose en semejantes selecciones observadas es inferior a k no es señalar nada acerca de la selección observada misma, sino acerca de la hiperclase de posibles selecciones: se trata, en realidad, de un enunciado probabilitario acerca de la probabilidad de que una selección tenga una propiedad determinada —de que su razón en α caiga fuera de un intervalo determinado—, enunciado que afirma que esta probabilidad es inferior a k. Por tanto —podría decirse perfectamente— la explicación del enunciado probabilitario inicial a base de las circunstancias bajo las cuales habría de ser rechazado es circular, ya que el rechazamiento mismo ha de explicarse a base de la probabilidad.

Es la misma objeción —conocida y válida— que se hace frente a la mayoría de las tentativas de definir la probabilidad a base de la frecuencia. A partir de una premisa acerca de probabilidades se siguen, en virtud de la aritmética de las razones de clase, ciertas conclusiones acerca de otras probabilidades relacionadas con aquéllas, pero jamás conclusiones que no sean enunciados probabilitarios: a

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

partir de una premisa acerca del parámetro en α de una hiperclase probabilitaria se sigue una conclusión acerca de la proporción de las selecciones que, dentro de la hiperclase omniselectiva de ellas, tengan ciertas razones en α, pero jamás una conclusión acerca de ninguna selección determinada. Cuando se utiliza una selección concreta como criterio empírico para rechazar la premisa lo que se hace es suponer que dicha selección tipifica de algún modo la hiperclase omniselectiva, y el hecho de que muy pocas de las demás selecciones posibles se parezcan a ella en tener una razón en α con la propiedad en cuestión parece tener muy escasa trascendencia, ya que no hemos llegado a observar las demás selecciones posibles. Apenas parece racional que rechacemos una hipótesis porque se siga de ella una conclusión cuya verdad o falsedad no tengamos medios de someter a contraste.

Este defecto de nuestra argumentación es bastante grave para quienes piensen que ya saben lo que son las hipótesis probabilitarias y que la empleen con objeto de rechazar los valores de las probabilidades propuestas en estas hipótesis; pero es más grave aún para quienes, como yo, propongan utilizar los criterios empíricos de rechazamiento de una hipótesis probabilitaria con la finalidad de adscribir un significado al enunciado de la misma: parece existir un círculo inquebrantable en semejante método de definición.

No obstante lo cual, persistamos en pensar del modo que lo hemos hecho y veamos adónde vamos a parar. Supongamos que, siguiendo la regla k de rechazamiento, hemos rechazado la hipótesis probabilitaria inicial al observar un conjunto de n ejemplares de β cuya razón en α caía fuera del intervalo debido; este rechazamiento se justifica diciendo que en caso de que la hipótesis fuese verdadera y de que hubiéramos aplicado la regla a todas las selecciones de la hiperclase probabilitaria, habríamos rechazado equivocadamente la hipótesis en una proporción de estos casos inferior a k. No podemos, *ex hypothesi*, examinar más que una de las clases que constituyen las selecciones de dicha hiperclase probabilitaria, pero sí podemos examinar una de las hiperclases selecciones de una hiperhiperclase probabilitaria, y utilizar el resultado correspondiente, ya para confirmar el rechazamiento anterior de la hipótesis probabilitaria inicial, ya para revocarlo y restaurar dicha hipótesis a su *statu quo ante*.

Para hacer tal cosa, en vez de considerar una hiperclase probabilitaria en $\{\alpha, \beta\}$ de n miembros, de la cual constituya una selección el conjunto de n observaciones, lo que haremos es considerar n_1 hiperclases probabilitarias de este tipo y tomar un conjunto de n_1 conjuntos —cada uno de n observaciones— como selección (que será una

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

hiperclase) de la hiperhiperclase probabilitaria de las n_1 hiperclases omniselectivas correspondientes a estas n_1 hiperclases probabilitarias. Planteemos la cuestión de un modo más formalizado.

Consideremos n_1 hiperclases probabilitarias en $\{\alpha, \beta\}$ de n miembros, cada una de las cuales tenga p por parámetro en α, y supongamos que toda clase-miembro de cada una de estas hiperclases excluya toda clase-miembro de cualquier otra de las mismas. Consideremos ahora las n_1 hiperclases omniselectivas que correspondan a estas n_1 hiperclases probabilitarias de n miembros; entonces, si B es la hiperclase que incluye todas las hiperclases así definidas, y si A es la hiperclase de todas las clases de n miembros cuya razón en α se encuentre fuera del intervalo $[p - \sqrt{(pq/nk)}, p + \sqrt{(pq/nk)}]$, las n_1 hiperclases omniselectivas, 1) estarán todas incluidas en B, 2) serán mutuamente excluyentes dos a dos, y 3) serán equiproporcionales en A dos a dos. Por tanto, la hiperhiperclase de estas n_1 hiperclases es una hiperhiperclase probabilitaria en $\{A, B\}$ de n_1 miembros con parámetro en A igual a p_1, el cual, como hemos demostrado valiéndonos de la aritmética de las razones de clase del capítulo anterior, no es inferior a k.

Consideremos ahora las selecciones de n_1 miembros (que serán hiperclases) tomadas de esta hiperhiperclase probabilitaria en $\{A, B\}$. Por medio de la misma aritmética de razones de clase podemos deducir que, entre todas estas selecciones, la proporción de aquéllas cuya razón en A se encuentre fuera del intervalo $[p_1 - \sqrt{\{p_1(1-p_1)/n_1k\}}, p_1 + \sqrt{\{p_1(1-p_1)/n_1k\}}]$ es inferior a k; como $p_1 < k$, podemos deducir además (por el teorema V del apéndice del capítulo anterior, para $k \leqslant 1/2$) que, entre todas estas selecciones, la proporción de las que tengan una razón en A fuera del intervalo $[0, k + \sqrt{\{k(1-k)/n_1k\}}]$ es inferior a k, y, *a fortiori*, que también es inferior a k la proporción de las que tengan una razón en A mayor que $k + \sqrt{(1/n_1)}$.

Podemos continuar esta argumentación considerando n_2 hiperhiperclases probabilitarias en $\{A, B\}$ de n_1 miembros, formando las n_2 hiperhiperclases omniselectivas correspondientes a ellas y advirtiendo que, en circunstancias apropiadas de exclusión, éstas son miembros de una hiperhiperhiperclase probabilitaria de n_2 miembros cuyo parámetro en $\mathbf{A}$, p_2, es menor que k —siendo $\mathbf{A}$ la hiperhiperclase de las hiperclases de n_1 miembros cuya razón en A sea superior a $k + \sqrt{(1/n_1)}$; y, en virtud de la misma aritmética de razones de clase, se sigue que, entre las selecciones de n_2 miembros (que son hiperhiperclases, a su vez),

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

la proporción de aquéllas cuya razón en **A** sea superior a $k + \sqrt{(1/n_2)}$ es menor que k.

En general: sea H_0 la hipótesis de que el parámetro en α de la hiperclase probabilitaria inicial sea p, y sean, H_1 la hipótesis de que el parámetro en A de la hiperhiperclase probabilitaria siguiente sea menor que k, H_2 la hipótesis de que el parámetro en A de la hiperhiperhiperclase probabilitaria siguiente sea menor que k, etc.; cada una de estas hipótesis es consecuencia lógica de la anterior, de suerte que todas ellas lo son de la hipótesis inicial, H_0, y forman una jerarquía descendente de hipótesis dentro del sistema deductivo probabilitario, en la que H_0 es la de máximo nivel. Como la falsedad de una cualquiera de estas hipótesis es consecuencia de la de alguna de las anteriores, si se rechaza una de ellas se rechazarán, a la vez, todas las de nivel superior a ella; y, por consiguiente, se puede rechazar H_0 rechazando una cualquiera de las hipótesis que son consecuencias lógicas suyas.

La regla k de rechazamiento que hemos propuesto para rechazar la hipótesis probabilitaria H_0 basándonos en un conjunto de n observaciones puede generalizarse de modo que rechacemos H_0 basándonos en un hiperconjunto de n_1 conjuntos de n observaciones cada uno, basándonos en un hiperhiperconjunto de n_2 hiperconjuntos de n_1 conjuntos —cada uno de n observaciones— cada uno, y así sucesivamente. Las reglas k correspondientes adoptan la forma que sigue.

K_1. Basándose en un conjunto de n observaciones de miembros de β, rechácese H_0 si la razón en α de dicho conjunto se encuentra fuera del intervalo $[p - \sqrt{(pq/nk)},\ p + \sqrt{(pq/nk)}]$.

K_2. Basándose en $n_1 n$ observaciones de miembros de β, consideradas como un hiperconjunto de n_1 conjuntos de n observaciones cada uno, rechácese H_1 —y, por tanto, rechácese, asimismo, H_0— si la razón en A de dicho hiperconjunto es mayor que $k + \sqrt{(1/n_1)}$.

K_3. Basándose en $n_2 n_1 n$ observaciones de miembros de β, consideradas como un hiperhiperconjunto de n_2 hiperconjuntos, cada uno de ellos formado por n_1 conjuntos de n observaciones cada uno, rechácese H_2 —y, por tanto, rechácense también H_1 y H_0— si la razón en A de dicho hiperhiperconjunto es mayor que $k + \sqrt{(1/n_2)}$.

Etcétera.

La primera contrastación de rechazamiento, K_1, se justifica diciendo que H_1 se sigue de H_0 y que si H_1 fuese verdadera el conjunto observado sería un ejemplar de gran rareza. Análogamente, la segunda contrastación de rechazamiento, K_2, se justifica diciendo que H_2 se si-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

gue de H_1, la cual, a su vez, se sigue de H_0, y que si H_2 fuese verdadera el hiperconjunto observado sería un ejemplar de gran rareza. Y así sucesivamente.

Supongamos ahora que hemos hecho n observaciones, que hemos aplicado la primera contrastación de rechazamiento, K_1, y que, de acuerdo con ella, hemos rechazado la hipótesis. Podemos proceder al examen de $n_1 n$ observaciones y, dividiéndolas en n_1 conjuntos de n observaciones, aplicar la segunda contrastación de rechazamiento, K_2; si ésta rechaza también la hipótesis el primer rechazamiento queda confirmado.

Pero si esta segunda contrastación no la rechaza, las observaciones sobre las que se basa formarán un hiperconjunto de conjuntos de observaciones, en el que los que sean parecidos —en los aspectos pertinentes— al primer conjunto de observaciones, sobre el que se basaba la primera contrastación, K_1, aparecerán tan infrecuentemente como predecía la hipótesis (o un poco menos infrecuentemente) [4]. En consecuencia, habrá que considerar atípico el primer conjunto de observaciones: será de esperar que aparezcan infrecuentemente conjuntos como él, y el segundo lote de observaciones hará aparecer con la infrecuencia debida conjuntos de observaciones de este tipo. Así pues, el resultado de la segunda contrastación, K_2, o sea, el de no rechazar la hipótesis, hace ver que su rechazamiento anterior de acuerdo con la primera, K_1, ha de revisarse a la luz de los datos proporcionados por el segundo lote de observaciones; y como estos datos no la rechazan será menester que revoquemos el rechazamiento basado en lo obtenido al aplicar la primera contrastación; la hipótesis se mantendrá, pues, a salvo de rechazamiento alguno que se apoyase en los datos disponibles.

Podemos explicar esta situación de otra forma dándole la vuelta y suponiendo que se hubiera llevado a cabo la segunda contrastación, K_2, antes que la primera, K_1. Ahora bien, la segunda contrastación no rechazaría directamente la hipótesis inicial, H_0, sino la hipótesis derivada H_1, cuyo rechazamiento implica el de H_0; mas H_1 afirma que el parámetro en A de la hiperhiperclase probabilitaria de la que hemos observado una selección es menor que k, y la contrastación K_2

[4] Es necesario hacer esta salvedad, ya que el teorema de la aritmética de las razones de clase que utilizamos no afirma nada acerca de la proporción de las clases que posean un valor exacto de la razón de clase, sino acerca de la proporción de clases cuya razón de clase se encuentre dentro (o fuera) de cierto intervalo alrededor de un valor exacto —que en el caso de la contrastación K_1 es el intervalo $[0, k + \sqrt{(1/n_1)}]$.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

no la ha rechazado, basándose en que la razón en A de la selección observada no es superior a $k + \sqrt{(1/n_1)}$. Supongamos que aplicamos ahora la primera contrastación, K_1, a cada uno de los n_1 conjuntos de n observaciones que son los miembros de la selección observada. Puesto que una contrastación K_1 rechaza H_0 siempre que el conjunto de observaciones sobre el que se base tenga una razón en α situada fuera del intervalo $[p - \sqrt{(pq/nk)}, p + \sqrt{(pq/nk)}]$, es decir, siempre que dicho conjunto sea miembro de A, aplicando la contrastación K_1 a cada uno de los conjuntos de observaciones miembros de la selección observada no tendremos más de $n_1\{k + \sqrt{(1/n_1)}\}$ rechazos; pero la hipótesis H_0 predice que la contrastación K_1 rechazará (equivocadamente) la hipótesis en una proporción aproximada de las ocasiones a que se aplique que es inferior a k; de modo que no puede mantenerse que el hecho de que la proporción de rechazos que se haya llevado a cabo basándose en los n_1 contrastaciones K_1 no sea mayor que $k + \sqrt{(1/n_1)}$ milite contra una hipótesis que predecía una proporción aproximada menor que k. Y sería ridículo persistir en rechazar una hipótesis que predecía que en casi todas las ocasiones en que una contrastación determinada rechazara la hipótesis el rechazamiento estaría equivocado.

El resultado de toda esta argumentación es que si la hipótesis que ha sido rechazada se somete a una segunda contrastación y ésta no la rechaza es preciso revocar el primer rechazamiento: para los fines de rechazar la hipótesis la segunda contrastación anula la primera.

Análogamente, si la segunda contrastación, K_2, rechaza la hipótesis (ya la haya rechazado o no la primera, K_1) pero se aplica una tercera, K_3, y no la rechaza, hay que revocar el rechazamiento. Para que una contrastación —en cualquier etapa en que se encuentre— no se revoque jamás es preciso que todas las contrastaciones de las etapas posteriores rechacen la hipótesis: la condición para que una hipótesis quede *rechazada definitivamente* es que exista una etapa a partir de la cual todas las contrastaciones la rechacen.

Puesto que no podemos saber, en ninguna etapa, si otras observaciones ulteriores, que no hemos hecho aún, rechazarán o no la hipótesis en una etapa posterior, no podemos saber nunca si hay que rechazar *definitivamente* una hipótesis. La serie de reglas k de rechazamiento está formada por reglas para rechazar provisionalmente, de modo siempre sujeto a revisión: basándose en un conjunto de observaciones la regla k o rechaza o no rechaza la hipótesis, pero el rechazamiento es provisional, y habrá de ser revocado si, basándose en un

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

hiperconjunto de conjuntos de observaciones, o en un hiperhiperconjunto de hiperconjuntos de conjuntos de observaciones, o, etc., esta regla deja de rechazar la hipótesis. Como es natural, una falta de rechazamiento es también provisional: si la regla no rechaza la hipótesis H_0 basándose en un conjunto de observaciones puede muy bien ocurrir que la rechace basándose en un hiperconjunto de conjuntos de observaciones, o en un hiperhiperconjunto de hiperconjuntos de conjuntos de observaciones, o, etc., ya que, como H_1, H_2, etc., son todas ellas consecuencias lógicas de H_0, del rechazamiento de una cualquiera de estas hipótesis se tiene que seguir el de H_0. Así pues, según esta regla no hay lote alguno de observaciones, por grande que sea, que de un modo definitivo rechace o deje de rechazar la hipótesis H_0.

¿Implica acaso este carácter provisional de la regla k de rechazamiento que no sirve para otorgar un significado empírico a enunciados acerca de hipótesis estadísticas, esto es, a enunciados probabilitarios? No lo creo. Implicaría tal cosa si aceptásemos un criterio rigorista de significado empírico, como ocurría con quienes en otro tiempo propusieron el «principio de verificación», según el cual un enunciado empírico solamente tiene significado o sentido si se pueden especificar las condiciones empíricas en las que quedaría aceptado o rechazado de un modo definitivo. (En su forma de rigorismo extremo, solamente si existen condiciones empíricas para su aceptación definitiva; pero ello es, sin duda, insostenible, ya que convertiría en sinsentidos todas las hipótesis universales, que pueden ser falsadas por la experiencia, pero nunca definitivamente verificadas.) Pero me parece que podemos tomar perfectamente como criterio de posesión de significado empírico el de que debe haber condiciones empíricas en las que el enunciado en cuestión se acepte y otras en las que se rechace —independientemente de que semejantes aceptación o rechazamiento sean definitivos o provisionales y susceptibles de revisión basada en experiencias posteriores—. Con este criterio de «verificación» generalizado, la regla k de rechazamiento otorga un significado empírico a los enunciados probabilitarios: el enunciado según el cual es p la probabilidad de que un miembro de la clase β sea miembro de la clase α expresa la proposición que ha de rechazarse si la razón en α de un conjunto de n miembros observados de β se encuentra fuera del intervalo $[p - \sqrt{(pq/nk)},\ p + \sqrt{(pq/nk)}]$ —independientemente del hecho de que sea preciso revocar este rechazamiento si la observación de un hiperconjunto de conjuntos de n miembros de β nos hace no rechazar el enunciado probabilitario derivado según el cual la probabilidad de que una clase de n miembros de β tenga una razón de α

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

que se sitúe fuera de este intervalo es inferior a k—. Y este último enunciado probabilitario expresa la proposición que quedaría rechazada de análoga manera —independientemente del hecho de que tal rechazamiento podría quedar revocado si otras observaciones posteriores lo exigieran— [5].

Hemos expresado el criterio generalizado de verificación (para juzgar la posesión de sentido de los enunciados empíricos) en la forma según la cual existen condiciones empíricas bajo las cuales habrá que rechazar el enunciado del caso, aun cuando no quede rechazado definitivamente (o aceptado, etc.; pero ello no es pertinente en el caso de los enunciados probabilitarios, que son proposiciones generales). Es preciso, sin embargo, matizar este criterio en cierto sentido: no debe existir imposibilidad lógica alguna de que el rechazamiento efectuado en una etapa cualquiera no quede jamás revocado en una etapa posterior cualquiera, pues, si tal cosa fuese lógicamente imposible, sería lógicamente necesario que todo rechazamiento quedase anulado en alguna etapa posterior, de suerte que sería lógicamente imposible que el enunciado permaneciese rechazado por todas las observaciones ulteriores tras haber sido rechazado una vez; y entonces sabríamos de antemano, antes de someter al contraste de las observaciones la hipótesis, que al cabo de una serie suficientemente larga de etapas de contrastación estaríamos en la misma situación que al principio. Los conjuntos de observaciones sobre los que se basan las contrastaciones de rechazamiento sucesivas son conjuntos separados; el criterio de la regla de rechazamiento está basado en cada etapa en propiedades empíricas de estos conjuntos separados, y la posesión por un conjunto de la propiedad pertinente es lógicamente independiente de la posesión por otro conjunto de la propiedad pertinente en su caso; de modo que es

[5] Importa tener en cuenta a lo largo de la lectura de todo este capítulo que proponemos la lectura de la serie de contrastaciones de rechazamiento para explicar el *significado* o *sentido* de los enunciados probabilitarios, y no, ni como el mejor método para decidir si ha de rechazarse o no una cantidad propuesta como valor de un parámetro probabilitario, ni —menos aún— como el mejor método de discernir el mejor entre dos valores propuestos. Las matemáticas probabilitarias hacen ver que, para todos los valores finitos de n_1, n_2, n_3, etc., existirá toda una gama de valores del parámetro probabilitario situados alrededor del «verdadero» —que es aquél para el que haya una probabilidad nula de que *cualquier* hipótesis que afirme que dicho parámetro tiene un valor determinado que caiga dentro de dicha gama centrada en él llegue a ser rechazada y permanezca en este estado a partir de cierta etapa de la serie de contrastaciones—. La gama aludida se contrae en un punto cuando n_1, n_2, etc. crecen sin fin y sin límite; pero el hecho de que para valores finitos de n_1, n_2, etc. exista una gama de hipótesis estadísticas incompatibles que la serie de contrastaciones «casi con seguridad» no llega a rechazar no vicia el uso que hago de tal serie de contrastaciones para explicar la naturaleza de las hipótesis estadísticas.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

perfectamente posible que las contrastaciones sucesivas de la serie continúen siempre rechazando el enunciado probabilitario. Si bien no podemos estar nunca seguros de que el rechazamiento por medio de una contrastación no vendrá seguido de una revocación de tal rechazamiento debida a que alguna contrastación subsiguiente no la rechace, tampoco estamos seguros jamás de que vaya a quedar así revocada; aunque todo rechazamiento puede revocarse puede también no revocarse; y sostengo que la posibilidad de que haya una serie indefinida de contrastaciones empíricas cada una de las cuales rechace el enunciado vale para otorgar a éste un significado empírico.

Este punto está relacionado con otro involucrado en la forma del «principio de verificación» aplicable a las proposiciones empíricas que no sean enunciados probabilitarios. Algunas personas precipitadas han enunciado ocasionalmente el principio en la forma siguiente: el significado de un enunciado consiste en un método mediante el cual puede verificárselo empíricamente con los medios de observación que tengamos actualmente a nuestra disposición. Mas se trata de una forma ridícula de tal principio: actualmente no tenemos medios para decidir si en el otro lado de la Luna hay o no un cráter mayor que el más grande de todos los existentes en su cara visible desde la Tierra, pero el enunciado correspondiente tiene una significación perfecta. Hay que dar al criterio de verificación no la forma de una posibilidad práctica, sino la de una posibilidad lógica de verificación; no hay imposibilidad lógica de que se viaje alrededor de la Luna en un cohete, de que se «observen» objetos en su parte de atrás por medio de un perfeccionamiento del radar, ni, en verdad, de que la Luna gire de suerte que su otra cara mire hacia la Tierra. Análogamente, al considerar la verificabilidad de los enunciados probabilitarios lo que exigimos es la posibilidad lógica y no la práctica; y no existe imposibilidad lógica de que las contrastaciones empíricas de nuestra serie, que son lógicamente independientes entre sí, rechacen a una la hipótesis probabilitaria.

Quizá pueda ser útil una metáfora. Imaginemos las hipótesis que hemos de examinar como documentos colocados en una bandeja rotulada «Para examen»; imaginemos otra bandeja con el rótulo de «Rechazados» y un procedimiento de examinar los documentos y de pasarlos de la primera bandeja a la segunda (que corresponderá al rechazamiento de la hipótesis estadística), así como otro procedimiento de pasar un documento de la segunda a la primera bandeja (lo cual corresponderá a la revocación de un rechazamiento previo de la hipótesis estadística que sea). El hecho de que todo documento que

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

haya pasado a la bandeja de «Rechazado» pueda tener que volver a la otra bandeja, «Para examen», no hace que todo el sistema sea fútil; lo que sí lo haría es que fuese lógicamente necesario que todo documento que haya llegado a la bandeja de «Rechazados» tuviese que volver adonde estaba al principio: el procedimiento de examen es útil si es posible que los documentos que pasen a la bandeja de «Rechazados» se queden allí para siempre. La función de una bandeja de documentos inútiles no es la de un cesto para pescar langostas, que es ineficaz si hay alguna langosta que logre escaparse, sino que vale para algo si hay algún documento que logre quedarse en ella.

¿Es arbitraria la regla de rechazamiento?

En este capítulo mantenemos la tesis de que la adopción de la regla k de rechazamiento otorga un significado o sentido empírico a los enunciados probabilitarios a base de una característica observable (la razón en α) de un conjunto observable de observaciones, cuyo conocimiento puede valer para rechazar el enunciado del caso. El que el rechazamiento pueda quedar revocado en virtud del conocimiento de otra característica observable de otras observaciones no priva de todo valor a la contrastación de rechazamiento, ya que es lógicamente posible que un rechazamiento se mantenga, por muchas contrastaciones a que se la someta de la jerarquía de éstas. Este criterio es empírico, ya que la contrastación de rechazamiento no puede emplearse *in vacuo*, sino solamente a base de unos conocimientos de observación. Es verdad que no hay rechazamiento, ni serie de rechazamientos, que nos «dé seguridad», en el sentido de que todos estos rechazamientos pueden quedar revocados por una contrastación posterior; pero lo que John Dewey llamaba «la búsqueda de la certeza» es, en el caso del conocimiento empírico, una trampa y una ilusión.

Hasta ahora vamos bien. Pero no hemos acabado con todas nuestras dificultades. Pues un crítico podría decir con bastante razón que el complicado criterio que hemos dado —a saber, que un enunciado probabilitario adquiere sentido o significado a partir de la regla según la cual hay que rechazarlo si cierta razón de un conjunto de n observaciones cae fuera de cierto intervalo— es enormemente arbitrario. ¿Por qué razón utilizamos este criterio y no otro? Y, en particular, el crítico podría hacer la radical crítica de que este criterio no vincula en modo alguno el rechazamiento de una hipótesis más bien con su falsedad que con su verdad, y que un criterio empírico de posesión de sentido debería ocuparse de la distinción entre la falsedad

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

y la verdad, y no de las circunstancias en las que para mí —o, en realidad, para el «círculo cultural» de los estadísticos matemáticos— se la haya de rechazar. Y que, a menos que se haga ver alguna vinculación existente entre rechazamiento y falsedad, este criterio es peor que inútil, ya que al utilizarlo nos engañará haciéndonos pensar que existe tal vinculación.

No puede hacerse frente a esta radical objeción diciendo, como hace la mayoría de los estadísticos matemáticos, que si k se toma suficientemente pequeño es «prácticamente seguro» que no rechazaremos equivocadamente una hipótesis estadística y que, en consecuencia, es «prácticamente seguro» que todas las hipótesis que rechacemos sean falsas; pues lo que está en cuestión es el significado mismo de la expresión «prácticamente seguro». Parecidamente, no vale de nada decir, de una forma más alambicada, que es «prácticamente seguro» que rechazaremos equivocadamente una hipótesis verdadera en una proporción menor que k de todas las veces que apliquemos la contrastación de rechazamiento, pues éste es también un enunciado probabilitario al cual se ha otorgado significado apoyándose en el rechazar. Afortunadamente, puede darse una respuesta bastante satisfactoria considerando los casos extremos en que la hipótesis probabilitaria afirme que la probabilidad de que todo miembro de β sea miembro de α es 0, o bien que es 1. Pues si dicha probabilidad es 0 la hipótesis quedará refutada si se halla un miembro cualquiera de β que lo sea de α, ya que esta observación es lógicamente incompatible con el que no haya ningún miembro de β que lo sea de α; y, por consiguiente, al encontrar un miembro de la clase $(\alpha\beta)$ se demostrará que la hipótesis probabilitaria era falsa. Pero al aplicar la regla k de rechazamiento se rechazará la hipótesis si la razón en α de un conjunto de n observaciones se encuentra dentro del intervalo

$$\left[0 - \sqrt{\frac{0\,(1-0)}{nk}},\ 0 + \sqrt{\frac{0\,(1-0)}{nk}}\right],$$

es decir, si dicha razón es distinta de 0. Mas como este intervalo degenerado, que sólo consta del punto 0, no depende de los valores de n ni de k (supuesto que ninguno de ellos sea 0), la regla k de rechazamiento rechazará la hipótesis si en un número cualquiera de observaciones, n, se halla al menos un miembro de α, cualquiera que sea el número positivo k; así pues, para todo n y k positivos, esta regla rechazará las hipótesis que adscriban una probabilidad 0 que sea falsa. De modo análogo, la hipótesis que afirme que la probabilidad de que un miembro de β sea miembro de α es 1 quedará refutada si se en-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

cuentra un miembro cualquiera de β que no lo sea de α, y será rechazada por una regla k de rechazamiento (para todo valor positivo de k) si la razón en α de algún conjunto de n observaciones es distinta de 1, o sea, si al menos en una de las observaciones de este conjunto un miembro no lo es de α —cualquiera que sea el número de observaciones—; por tanto, la regla rechazará las hipótesis que adscriban una probabilidad 1 que sea falsa. Así pues, en los casos en que la probabilidad es o bien 0 o bien 1, el empleo de la regla k de rechazamiento conduce al mismo resultado que el de la regla de rechazar los enunciados que sepamos sean falsos. Ello establece cierta vinculación entre el rechazamiento y la falsedad en los dos casos extremos, y me parece, por ello, establecer también la vinculación debida en los demás: excepto en los casos extremos no hay necesidad lógica de que un enunciado probabilitario que se rechace por la regla k basándose en un conjunto de observaciones sea falso; pero el hecho de que esta necesidad lógica sí exista para los valores extremos de p hace ver que el rechazamiento «corresponde» a la falsedad de una manera en que no «corresponde» a la verdad; y, en mi opinión, esto es todo lo que necesitamos. Pues lo que exigimos es que la regla no cumpla lo que precisamos que haga si sustituimos la palabra «rechácese» por «acéptese»: si ocurriera tal cosa, nos diría en los casos extremos que aceptásemos enunciados que supiésemos falsos, lo cual sería absurdo.

Hemos llegado a una situación tal que se otorga significado a los enunciados probabilitarios en virtud de su rechazabilidad —basándose en las observaciones— de acuerdo con una regla k de rechazamiento, rechazabilidad que corresponde a la falsedad más que a la verdad. Habiendo concedido, pues, significado empírico a los enunciados probabilitarios, puede darse una razón excelente para que utilicemos la regla k de rechazamiento en lugar de cualquier otra: a saber, la «justificación» que dimos de ella al exponerla por primera vez (pág. 176). Esta razón es —por repetirlo ahora— la de que si el enunciado probabilitario es verdadero la probabilidad de rechazarlo al utilizar la regla k es menor que k; o bien, expresándolo con los símbolos que ya hemos utilizado: la razón para emplear la regla k de rechazamiento consiste en que la proposición según la cual es menor que k la probabilidad de rechazar H_0 al emplear esta regla equivale lógicamente a H_1, que es consecuencia lógica de H_0. Ahora bien, como ya habíamos hecho notar, nos moveríamos en un círculo si nos valiésemos del hecho de que H_1 se siga lógicamente de H_0 para definir la «probabilidad» que aparece en el enunciado de H_0 a partir de los términos que aparezcan en H_1, ya que uno de éstos es una pro-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

babilidad (la de que una razón en α caiga fuera de determinado intervalo). Pero si hemos otorgado ya significado a un enunciado probabilitario mediante un procedimiento general de rechazamiento basado en los resultados de la observación, no hay circularidad alguna en proponer otro enunciado probabilitario (al que se otorga sentido en forma análoga) como razón para emplear semejante procedimiento general de rechazamiento; luego no se puede objetar a que utilicemos el hecho de que H_1 sea consecuencia lógica de H_0 para justificar la definición del enunciado de H_0 por medio de una regla k de rechazamiento, con tal de que ésta no utilice, a su vez, H_1 —como, efectivamente, no hace.

No trato de negar que existe cierto tipo de circularidad involucrado en que demos, como justificación de la manera de definir un enunciado probabilitario, otro enunciado probabilitario; pero no es una circularidad viciosa, no vicia la definición. Lo que ha ocurrido es que primero damos una regla de acuerdo con la cual se otorga sentido a los enunciados probabilitarios en virtud de ser los enunciados rechazables en virtud de dicha regla y basándose en los conocimientos empíricos, lo cual nos proporciona la definición de los enunciados probabilitarios como un género especial de enunciados empíricos; y en este método de definición no se encuentra circularidad alguna. Si preguntamos ahora por qué ha de emplearse este método de definición más bien que otro cualquiera estamos preguntando por las razones por las que las probabilidades así definidas cumplen lo que queremos que hagan; y la razón consiste en otro enunciado probabilitario. He aquí la circularidad mencionada; pero no vicia nada de lo dicho.

Habría, desde luego, un círculo vicioso —un círculo en la inferencia— si la razón para creer (o para descreer) un enunciado probabilitario fuese la creencia (o la descreencia) de otro enunciado de la misma índole. Pero nuestro método de definición no entraña semejante círculo: la razón para descreer un enunciado probabilitario está constituido por los conocimientos empíricos a base de los cuales haya de ser rechazado de acuerdo con la regla k de rechazamiento que determine el significado de dicho enunciado; y el que haya de ser rechazado basándose en tales conocimientos no es la razón para descreer de él, sino un enunciado acerca de cómo se emplean los enunciados probabilitarios. El que la razón por la cual se empleen de este modo estos enunciados pueda darse solamente por medio de otro enunciado probabilitario no es pertinente en cuanto a las razones para descreer del enunciado inicial.

No podemos ocuparnos a fondo de la cuestión de la circularidad

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

sin escribir un tratado entero sobre la definición y la noción —unida a ella— de análisis. Pero es necesario mencionar que algunos filósofos emplean el término «definición» en un sentido estricto, mientras que otros lo hacen en un sentido lato [6]. Los que emplean el sentido más restringido limitarían la definición de una palabra o de una expresión a la formación de un sinónimo, y la definición de una cláusula de cierto tipo a la formación de una cláusula que tenga el mismo significado y en la que falte el rasgo aludido. En este sentido las palabras específicamente probabilitarias que aparecen en los enunciados probabilitarios son indefinibles, ya que es imposible traducir un enunciado de esta índole a otro en que no haya tal tipo de palabras; de modo que puede decirse verdaderamente que —en el sentido a que nos referimos— la noción de probabilidad es inanalizable. Pero ninguna de las cuestiones importantes de la filosofía de la ciencia —ni de ninguna rama de ella— puede resolverse dando definiciones ni haciendo análisis si unas y otros se toman en este sentido restringido, pues las cuestiones importante son siempre las que se refieren al uso que hacemos de enunciados de un tipo particular y a la forma en que pensamos acerca de conceptos de un tipo particular, cuestiones que no serían fuente de perplejidad alguna si fuese posible dirimirlas traduciendo lisa y llanamente los enunciados a otros que no nos dejaran perplejos, o si fuese posible analizar los conceptos como un complejo de otros conceptos unidos entre sí de forma sencilla. Hemos hecho ver en el capítulo tercero que los conceptos teoréticos de una ciencia adelantada, tal como la física, no cumplirían su cometido si fuesen analizables (en sentido restringido) a base de observaciones directas; y las probabilidades no valdrían para la finalidad que les exigimos si los enunciados acerca de ellas pudiesen traducirse en enunciados acerca de frecuencias observables directamente. En todos los casos de importancia filosófica se requiere algo más útil y más interesante que una mera traducción.

Algunos filósofos que emplean el sentido restringido de definición y dicen que la «probabilidad» es indefinible propondrían de buena gana que nos contentáramos con lo dicho. Para mí, ello sería pura y simplemente pasar por alto el problema de la probabilidad, que es el de aclarar la función que los conceptos probabilitarios desempeñan en nuestro pensamiento. Sin embargo, la mayoría de dichos filósofos estarían de acuerdo conmigo en admitir que éste es el problema, en

[6] Este sentido lato incluye el tipo de «definición implícita» mencionado en el capítulo tercero, pero es más amplio que él.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

cuyo caso se trataría solamente de la forma en que haya de describirse éste: ellos lo llamarían acaso el de «buscar el lugar de la probabilidad en nuestro mapa lingüístico», mientras que yo lo designaría como el de definir el significado de «probabilidad» en los enunciados científicos probabilitarios o el de analizar la probabilidad tal y como la utiliza la ciencia; pero se trata de dos modos de describir una y la misma actividad filosófica. En cuanto a mí, entiendo que es perfectamente oportuno describir el enunciado de las reglas con arreglo a las cuales se definan las palabras probabilitarias como una definición de dichas palabras, en un sentido amplio de definición, pero no me voy a pelear con quienes quieran describir semejante proceso de otro modo; con los que sí estoy en desacuerdo es con quienes emplean el hecho de que los enunciados probabilitarios no sean traducibles a enunciados de otra forma como excusa para decir que no hay nada más que decir acerca de ellos: ello es cometer la *trahison des philosophes*, o sea, la de sostener que no hay problema ninguno exactamente en el punto en que el problema se hace más importante y difícil.

La constante arbitraria de la regla de rechazamiento

Dejemos ahora esta cuestión de la naturaleza del análisis filosófico y volvamos al de la probabilidad tal y como se la utiliza dentro de una ciencia. Hemos dado lo que me parecen ser buenas razones, tanto en favor de describir como un rechazamiento la operación mental que subyace a los enunciados probabilitarios, como en defensa de la forma de la regla de rechazamiento que hemos adoptado. Pero hay un elemento que sigue siendo arbitrario, y para cuya elección no hemos presentado razón alguna: el valor del pequeño número positivo k, que sirve para enunciar la regla k de rechazamiento. Dado que la aparición de este número constituye un rasgo esencial de la regla que rige el empleo de los conceptos probabilitarios es necesario que discutamos con algún detalle sus funciones.

En primer término se encuentra un punto relativamente secundario. El teorema de Bienaymé-Chebichev de la aritmética de las razones de clase, que nos proporciona los fundamentos de la regla k que hemos dado, no enuncia cuál sea el valor exacto de la proporción de selecciones de n miembros que tengan razones de clase situadas fuera del intervalo $[p - \sqrt{(pq/nk)}, p + \sqrt{(pq/nk)}]$, sino que enuncia solamente que esta proporción es inferior a k. Mas para cualquier conjunto de valores de p, n y k es posible calcular con exactitud dicha proporción (si bien el cálculo es extraordinariamente fastidioso), y

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

puede demostrarse que cuando n crece sin fin y sin límite ésta se aproxima a un valor dado por una función matemática bastante sencilla de k [7]. Tanto los valores exactos como el valor límite de tal proporción son muy inferiores a k, de modo que la desigualdad de Bienaymé-Chebichev es —en el sentido matemático de la expresión— un teorema muy débil, y la regla k de rechazamiento que en él se funda es mucho más débil de lo que podría ser una regla fundada en los resultados de la aritmética de las razones de clase. Pero puesto que lo que ocupa nuestros propósitos al explicar la lógica de los enunciados probabilitarios es encontrar una regla de rechazamiento, carece de importancia que haya otra más fuerte igualmente defendible. La regla k que hemos dado se funda en la desigualdad de Bienaymé-Chebichev por la excelente razón de que esta desigualdad es muy sencilla y se presta con facilidad a ejemplos numéricos, y la de que su demostración, aun siendo matemáticamente elegante, no utiliza técnicas más avanzadas que las del álgebra escolar, de suerte que todas las matemáticas de que nos valemos en este libro están a la vista, perfectamente accesibles para su examen. Pero quien prefiera emplear una regla k fundada en una igualdad de la aritmética de las razones de clase, en lugar de estarlo en una desigualdad, puede adoptar una regla de la forma siguiente: rechácese la hipótesis si la razón en α de un conjunto de n observaciones se encuentra fuera del intervalo $[p - \sqrt{(pq/nh)}, p + \sqrt{(pq/nh)}]$, siendo h el número (dependiente de n, p y k) tal que la proporción de selecciones de n miembros que tengan una razón en α situada fuera de este intervalo sea *igual a* k [8]. Como h es siempre mayor que k, el intervalo

$$\left[p - \sqrt{\frac{pq}{nh}}, p + \sqrt{\frac{pq}{nh}}\right]$$

será siempre menor que el intervalo

$$\left[p - \sqrt{\frac{pq}{nk}}, p + \sqrt{\frac{pq}{nk}}\right];$$

con lo cual toda hipótesis que sea rechazada por la primera regla lo

[7] $1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{k}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$

[8] Puesto que, para un n dado, la proporción de selecciones de n miembros que tengan una razón en α incluida en una gama determinada cualquiera puede tomar sólo un número finito de valores, es imposible que dicha proporción sea *exactamente* igual a k, a menos que k sea precisamente uno de tales valores. Para ser rigurosamente correcto habría que sustituir, pues, en el enunciado de la regla k fuerte, «sea igual a k» por «tome el máximo valor posible igual o menor que k»; pero pasaremos por alto esta sutileza matemática en el debate que sigue de esta cuestión.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

será por la segunda, aunque esta última rechazará hipótesis que aquélla no. Ahora bien, la primera regla k es sólo una regla de rechazamiento; nos exige únicamente que rechacemos un enunciado probabilitario si se cumplen determinadas condiciones empíricas, y si no se cumplen no nos exige tal rechazamiento; pero no nos prohibe que rechacemos un enunciado probabilitario si preferimos utilizar una regla de rechazamiento más fuerte. En cambio, la segunda regla k de rechazamiento que hemos dado es la más fuerte que pueda justificarse mediante la aritmética de razones de clase; podría parecer, por tanto, que sería propio enunciarla empezando: «rechácese el enunciado probabilitario *si y sólo si*, etc.» y suponer que prohiba el rechazamiento de este enunciado en caso de que no se satisfagan las condiciones empíricas que exigen el rechazamiento; pero así enunciaríamos la regla de un modo propicio a confusiones, ya que un enunciado probabilitario que no haya sido rechazado por un conjunto de observaciones o en una etapa cualquiera puede perfectamente quedar rechazada por otro conjunto de observaciones o en una etapa posterior, de forma que la prohibición de rechazamiento habría de ser provisional, sujeta a revocación ulterior. Además, una hipótesis estadística que haya logrado pasar las contrastaciones de la observación directa puede muy bien llegar a sufrir el rechazo debido a que no se ajuste a un sistema deductivo científico de mayor amplitud, que emplee hipótesis estadísticas de un nivel todavía más alto. Así pues, la forma correcta de enunciar la regla k fuerte es la misma en que lo hemos hecho con la débil *(si*, y no *si y sólo si)* y la adjunción, como nota a ella —pero no como parte de la misma—, que es la regla k más fuerte que quepa justificar mediante consideraciones derivadas de la aritmética de las razones de clase.

Los intervalos y las elipses dentro de los cuales han de caer las razones de clase observadas para que la hipótesis probabilitaria del caso no sea rechazada por la contrastación de rechazamiento corresponden a las «zonas de aceptación» de la literatura estadística contemporánea. En ésta no se emplean tales regiones con el propósito explícito de determinar por su medio el significado de los enunciados probabilitarios, sino que —admitiendo que se sabe ya cuál sea este significado— se pretende disponer de una contrastación que nos permita descubrir su verdad o su falsedad: por consiguiente, se supone que tales zonas están trazadas de tal modo que, basándose en un conjunto de n observaciones, no solamente es preciso rechazar una hipótesis probabilitaria si el punto (r, p) cae fuera de la zona apropiada, sino que habrá que aceptarla si cae en su interior (y de aquí el nombre

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

de «zona de aceptación»). Así pues, la dicotomía que la elipse (u otra figura cerrada) establece en el cuadrado, dividiéndolo en dos zonas —la situada sobre o dentro de dicha figura cerrada y la situada fuera de ella—, se tiene que admitir que corresponde a una dicotomía de las hipótesis en las que han de ser aceptadas y las que han de ser rechazadas; y por ello es esencial que la figura cerrada se mantenga con el tamaño exacto justificado por la aritmética de las razones de clase, pues de otro modo las hipótesis llegarían a ser aceptadas sin la debida garantía; y, en consecuencia, se precisan figuras basadas en las proporciones exactas de las clases selectivas que tengan razones en α situadas en intervalos determinados [9]. Pero aquí no nos competen los criterios de la verdad de los enunciados probabilitarios, sino solamente los criterios de su falsedad, de modo que las «zonas de aceptación» de los estadísticos se convierten para nosotros meramente en «zonas en que no hay rechazamiento»; y, puesto que lo que nos interesa son más las partes exteriores a ellas (las «zonas de rechazamiento» o «zonas críticas», como a veces se las llama) que las interiores, la lógica de nuestra argumentación no queda afectada si las elipses —u otras figuras cerradas— se dibujan más grandes de lo que teóricamente necesitarían ser: todo lo que ocurre entonces es que empleamos zonas de rechazamiento más pequeñas —y, por tanto, una regla de rechazamiento más débil— de lo que sería menester para fundamentar la regla en los teoremas de la aritmética de las razones de clase (que es lo que queremos hacer). Dado que cualquier hipótesis probabilitaria rechazada por una regla k débil también será rechazada por otra más fuerte, esta debilidad carece de trascendencia para nuestro problema de determinar el significado de los enunciados probabilitarios por medio de una regla k de rechazamiento: la arbitrariedad inherente al haber fundado la que vamos a utilizar en una desigualdad bastante sencilla de la aritmética citada en lugar de haberlo hecho en una igualdad exacta es algo así como una arbitrariedad estilística debida a mi método de exposición.

La arbitrariedad esencial que hemos cometido

Sin embargo, la existencia en la regla k de rechazamiento de una constante indeterminada, k, es una arbitrariedad que forma una de

[9] Pueden encontrarse semejantes figuras en C. J. Clopper y E. S. Pearson, *Biometrika*, vol. 26 (1934) págs. 404 y sigs., y en M. G. Kendall, *The Advanced Theory of Statistics*, t. 2 (Londres, 1946), pág. 68.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

las características esenciales de los enunciados probabilitarios, pues la elección de esta constante no puede determinarse ni por consideraciones interiores a la ciencia en cuestión ni interiores a su lógica. Ello se debe a que los rechazos que la regla k impone no son nunca definitivos: podemos siempre estar equivocados al rechazar una hipótesis probabilitaria y la constante k es, como hemos visto, una cota superior de la probabilidad de que estemos rechazando equivocadamente una hipótesis verdadera, de modo que nuestra elección de esta constante depende de la importancia que tenga para nosotros el evitar una equivocación al rechazar las hipótesis, lo cual dependerá de la utilidad que tendría cada una de éstas si no la rechazásemos. Si la utilización que vayamos a hacer de la hipótesis es puramente intelectual (por ejemplo, para organizar otras hipótesis de nivel inferior dentro de un sistema deductivo más comprehensivo de lo que de otro modo podría conseguirse), estaremos dispuestos a rechazar la hipótesis a menos de que se ajuste mucho a los hechos observados; es decir, si hay fuertes pruebas en contra suya, aun cuando exista una probabilidad moderada de que la rechacemos siendo verdadera: por consiguiente, tomaremos para k un valor tan alto como $1/20$ o incluso $1/10$, con lo cual será de esperar que rechacemos equivocadamente la hipótesis en el 5 por 100 o en el 10 por 100 de las ocasiones posibles de rechazamiento. Supongamos ahora, sin embargo, que la hipótesis tuviese gran utilidad práctica para nosotros en caso de ser verdadera (podría ser, por ejemplo, una hipótesis que, de ser verdadera, nos permitiera poner a punto un tratamiento para una enfermedad que careciese hasta el momento de tratamiento alguno); entonces no estaríamos dispuestos a rechazarla a menos que las pruebas en contra suya fuesen abrumadoras, no lo haríamos más que si la probabilidad de rechazarla siendo verdadera fuese minúscula, y escogeríamos para k un número muy pequeño, por ejemplo $\frac{1}{100}$ o $\frac{1}{1.000}$. Así pues, la elección de k dependerá en gran medida de lo importante que sea para nosotros rechazar una hipótesis que, en realidad, sea verdadera, esto es, de la importancia que tenga a nuestros ojos el evitar rechazos equivocados.

Desde el punto de vista lógico, la arbitrariedad en la elección del número k es un rasgo esencial de la manera en que concedemos significado a los enunciados que aseveran probabilidades distintas de 1 y de 0. Cuando p tiene uno de estos dos últimos valores, o sea, cuando el enunciado es una generalización universal, la regla k de rechazamiento rechazará la hipótesis en cuanto se encuentre un solo caso

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

en contra, independientemente del valor de k (como hemos mostrado en la pág. 188), y esta constante se utiliza entonces de un modo «vacío», como dicen los lógicos —podría tener otro valor sin que el resultado quedase afectado—; además, la probabilidad de que cometamos un error al rechazar en tales condiciones la hipótesis será menor que k, cualquiera que sea el número positivo k. Pero si un número que esté sometido a la restricción de ser o positivo a cero es menor que cualquier número positivo, entonces tiene que ser cero; de modo que la probabilidad de que nos equivoquemos al rechazarlo es 0, y no nos equivocaremos. Por tanto, en ambos casos el rechazamiento será definitivo, y el que la hipótesis quede rechazada o no por la regla k no depende en modo alguno del valor de k, así que la arbitrariedad de este número carece de importancia.

En todos los demás casos la decisión en cuanto a rechazar o no una hipótesis probabilitaria de acuerdo con la regla k depende del valor de k. Sobre la base de un valor r observado de una razón en α de un conjunto de n observaciones, la elipse probabilitaria correspondiente a k_1 (esto es, la elipse de b_1, siendo $b_1 = nk_1$) se encuentra dentro de la correspondiente a k_2 (elipse de b_2, siendo $b_2 = nk_2$) si k_1 es mayor que k_2. Una persona que utilice la regla k_1 de rechazamiento rechazará la hipótesis probabilitaria si el punto cuyas coordenadas son (r, p) cae fuera de la elipse más pequeña, y otra que emplee la regla k_2 la rechazará si cae fuera de la elipse grande; si el punto citado se encuentra en la lúnula entre ambas elipses, la persona aludida en primer lugar rechazará la hipótesis, pero la segunda no. Como hemos visto, aquélla puede tener razones excelentes para valerse de la regla k_1 y ésta para hacerlo de la k_2: así, puede ocurrir que esta última persona tenga un interés económico, o hedonístico, en que la hipótesis sea cierta, y que falten estos acicates en la otra persona; pero semejantes consideraciones parecen carecer de congruencia con el carácter razonable de descreer en la hipótesis del caso. La elección de k es lógicamente arbitraria, es decir, que considerando el asunto de un modo puramente lógico no hay razones para admitir un valor de k con preferencia a otro; y, sin embargo, el valor que se admita para este parámetro puede tener gran influencia sobre el rechazamiento o no de las hipótesis probabilitarias. Al estudiar en el próximo capítulo los principios con arreglo a los cuales se elige entre hipótesis estadísticas que formen una alternativa quedará más claro el hecho que los sutiles trabajos recientes de los estadísticos matemá-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

ticos han sacado a luz [10], esto es, que los principios según los cuales rechazamos las hipótesis probabilitarias contienen factores arbitrarios desde el punto de vista lógico, y que la elección de tales factores tiene que justificarse por consideraciones extralógicas —en las que se tengan en cuenta los fines con que nos propongamos utilizar dichas hipótesis—. En realidad, veremos que la cuestión de las razones de aceptación de una hipótesis cualquiera, ya sea estadística o universal, entraña consideraciones teleológicas: la justificación última de toda creencia científica depende del fin principal por el que pensamos científicamente —el de predecir el futuro y, por tanto, dominarlo—. La peculiaridad del razonar estadístico es que presupone juicios en cuanto al tipo de futuro que queremos incluso en etapas tempranas de la argumentación; y al reflexionar sobre el fundamento racional de semejante pensamiento no podemos evitar que la ética irrumpa en la lógica inductiva [11].

En el presente capítulo no nos ocupamos del carácter razonable del pensar científico, bien cuando emplea hipótesis estadísticas o cuando se vale de hipótesis universales, sino de lo que determine el significado de los enunciados probabilitarios. ¿Vicia acaso la arbitrariedad inevitable de la regla k de rechazamiento su empleo para definir éstos —en el sentido amplio de definición— a base de contrastaciones empíricas de rechazamiento? A mi entender no lo hace, y ello por las razones que siguen.

Como hemos visto, si una persona sigue una regla k_1 de rechazamiento mientras otra sigue una regla k_2 —siendo k_1 mayor que k_2—, la primera puede rechazar una hipótesis que la segunda no rechace. Pero tal cosa se apoyaba en el supuesto de que ambas basasen sus contrastaciones de rechazamiento sobre la misma razón en α hallada con las mismas n observaciones. Supongamos ahora que las dos funden su contrastación exactamente sobre la misma razón en α que hayan descubierto, r, pero que la primera la haya encontrado en un conjunto de n_1 observaciones y la segunda en otro de n_2 observaciones [12]. Ahora

[10] En especial J. Neyman y E. S. Pearson, en *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 29 (1933), págs. 492 y sigs., y A. Wald, en *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 10 (1939), págs. 299 y sigs.

[11] He debatido la cuestión general de las relaciones existentes entre la ética y la lógica inductiva en mi *Henriette Hertz Annual Philosophical Lecture* ante la British Academy, titulada *Moral Principles and Inductive Policies* (1950).

[12] Naturalmente, es muy inverosímil que dos personas que examinen conjuntos distintos de casos, ya consten o no del mismo número de ellos, encuentren *exactamente* la misma razón en α, r, para sus dos conjuntos; de forma que el supuesto que aquí

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

bien, el producto de n y k es lo que determina el valor de b de la elipse de probabilidad, y el caer fuera de ésta del punto (r, p) es lo que se emplea para rechazar la hipótesis. Por tanto, si $n_2k_2 = n_1k_1$ la elipse de b_2 utilizada por la persona mencionada en segundo lugar coincidirá con la elipse de b_1, de que se sirve la primera, y aquélla rechazará la hipótesis siempre que ésta lo haga: el punto (r, p) representará para la persona a quien primero nos hemos referido la combinación de p con una razón en α de valor r encontrada en un conjunto de n_1 observaciones, y para la otra la combinación de p con una razón en α de valor r encontrada en un conjunto de n_2 observaciones; si estas razones en α son iguales y si $n_2 = n_1 (k_1/k_2)$, la fuerza de las dos contrastaciones de rechazamiento en virtud de observaciones será la misma para ambas personas, en el sentido de que toda hipótesis que rechace la primera será rechazada por la segunda, y a la inversa.

Así pues, esta última, que emplea un valor de k más pequeño, k_2, en su regla k de rechazamiento, puede compensar el hecho de que basándose en el mismo número de observaciones no rechazaría hipótesis que la primera sí lo haría —ya que utiliza un valor de k mayor, k_1— sin más que apoyarse en un número de observaciones mayor, puesto que la fuerza de la contrastación de rechazamiento depende del producto nk. Por otra parte, la probabilidad de llevar a cabo un rechazamiento equivocado al utilizar la regla k_2 es, desde luego, menor que k_2, de modo que la segunda, al apoyarse en $n_2 = n_1 (k_1/k_2)$, consigue tener una contrastación de la misma fuerza que la primera sin sacrificar su ventaja sobre ella de gozar de una cota superior de la probabilidad de hacer rechazos equivocados más pequeña que la de ésta; pero ello no es pertinente para el punto de que ahora se trata, el cual es que dos reglas k de rechazamiento distintas rechazarán las mismas hipótesis, contando con la misma razón en α, r, si el número n_1 de observaciones sobre que se basen los rechazamientos k_1 y el de aquéllas sobre que se basen los rechazamientos k_2, n_2, están relacionados entre sí por la ecuación $n_1k_1 = n_2k_2$.

Aunque no puede decirse que este hecho reduzca la arbitrariedad de la elección de k, sí reduce el elemento de carácter privado de ella: pues el resultado de una contrastación de rechazamiento que emplee una regla k con un valor determinado de este parámetro será igual

---

hacemos no es nada «realista». Pero tal cosa no afecta a su empleo en un debate acerca del *significado* de los enunciados probabilitarios, que es lo único que concierne a este capítulo.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

(para el mismo valor observado de la razón en α) que el de una contrastación que emplee otro valor de k, con tal de que la relación entre los números de observaciones en que se basen ambas contrastaciones sea la adecuada.

El hecho de que una contrastación k_1 de rechazamiento tenga igual fuerza que otra con el valor k_2 si $n_1k_1 = n_2k_2$ tiene como consecuencia que, por pequeño que sea el valor que escojamos de k, puede hacerse que la contrastación de rechazamiento correspondiente tenga una fuerza cualquiera que hayamos fijado previamente, eligiendo del modo apropiado el número n de observaciones sobre que se basen; en particular, puede hacerse tan fuerte como cualquier otra contrastación, por fuerte que ésta sea, tomando un n suficientemente grande. Dicho en el lenguaje de nuestras elipses de probabilidad encajadas sucesivamente: si tomamos una de ellas, por estrecha que sea (o sea, por mucho que se aproxime a la recta diagonal, $r = p$), para todo valor de k, por pequeño que sea, existe un número n tal que la regla k de rechazamiento rechaza toda hipótesis estadística que, sobre la base de n observaciones o más, posea una razón en α, r, a la que corresponda un punto (r, p) que caiga fuera de dicha elipse[13]. Por consiguiente, de los sistemas de elipses encajadas sucesivamente, cualquiera valdrá como elipse de rechazamiento para una contrastación k de rechazamiento, por pequeño que sea k, si se elige un n suficientemente grande.

Esto conduce a la importante consecuencia siguiente. Imaginemos una serie de contrastaciones de rechazamiento que estén de acuerdo con la misma regla k de rechazamiento aplicada a una serie de conjuntos de observaciones de miembros distintos de β tales que el primer conjunto conste de m observaciones, el segundo de $2m$, y así sucesivamente[14]; supongamos que en el primero de ellos el número de miembros de α sea s, en el segundo $2s$, etc., de suerte que la razón en α de cada uno de estos conjuntos sea la misma fracción, $r = s/m$. Utilicemos ahora esta serie de contrastaciones de rechazamiento para someter a contraste la hipótesis estadística que afirme que la probabilidad de que un miembro de β sea miembro de α es p, siendo p un número que discrepe de r en una cantidad positiva, d. *Al llegar a cierto punto de la serie de contrastaciones, dicha hipótesis estadística quedará rechazada, y todas las contrastaciones subsiguientes las rechazarán también,* lo cual ocurrirá cualquiera que sea el valor positivo que

---

[13] $n = b/k$, siendo b la constante de la elipse.

[14] No es menester que estos conjuntos sean mutuamente excluyentes.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

tenga k, e independientemente asimismo del valor positivo que tome d.

Para demostrar tal cosa dibújese la elipse de probabilidad que pase por el punto cuya coordenada r sea $p - d$ y cuya coordenada p sea p: existe una y sólo una elipse que pase por tal punto, la cual pasa también por el punto $(p + d, p)$ y tiene por valor de b el cociente pq/d^2 [15]; además, cualquier elipse de probabilidad cuyo valor de b sea mayor que éste se encontrará dentro de ella, de modo que si n es mayor que pq/d^2k la elipse de probabilidad cuyo valor de b sea nk caerá dentro de esta elipse, y los puntos $(p - d, p)$ y $(p + d, p)$ caerán fuera de aquélla. Pero uno u otro de estos puntos representa la combinación de una probabilidad p con una observación de razón en α, r, que discrepe de p en d, de forma que la hipótesis quedará rechazada por cualquier contrastación k de rechazamiento basada en un número de observaciones mayor que pq/d^2k; y, puesto que los números de observaciones de las sucesivas contrastaciones son m, $2m$, $3m$, ..., la contrastación l y todas las siguientes a ella rechazarán la hipótesis citada —siendo l cualquier entero mayor que pq/md^2k.

Por tanto, cualquiera que sea el valor que admitamos para k en una regla k de rechazamiento, ésta rechazará siempre una hipótesis estadística si en un número de observaciones suficientemente elevado se llega a una razón en α que discrepe del valor de la probabilidad aseverado por la hipótesis en una cantidad mayor que otra previamente fijada, por pequeña que ésta sea. Y si dos personas empiezan desde el comienzo con reglas de rechazamiento diferentes puede ocurrir que no estén de acuerdo en cuanto al rechazamiento de una hipótesis estadística cuando se basen en un número de observaciones reducido que les proporcione a ambos la misma razón en α; pero al aumentar tal número se llegará siempre a un punto en el cual y a partir del cual estarán de acuerdo en rechazar toda hipótesis cuya probabilidad discrepe de la razón en α que habían encontrado ambos en una cantidad mayor que una dada. De modo que la arbitrariedad de la elección de k para la regla de rechazamiento tiene solamente un efecto limitado: un número de observaciones suficientemente elevado hará que carezca de efecto el valor de este parámetro que se haya elegido —dentro de una gama de valores de k cuya cota inferior sea cierto número positivo.

Sea H_p la hipótesis según la cual la probabilidad de que un miembro de β sea miembro de α es p. Ahora podemos enunciar con toda precisión la propiedad de «invariancia» de las distintas reglas k con

---

[15] Dado que $\sqrt{(pq/b)} = d$.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

respecto al rechazamiento de la hipótesis H_p cuando las razones en α de todos los conjuntos de observaciones pertinentes discrepen de p en una cantidad no menor que un número positivo d. Supongamos que k_1 y n_1 sean dos números no negativos tales que $k_1 n_1 = pq/d^2$; entonces, la propiedad que H_p satisface de quedar rechazada por una contrastación k basada en un conjunto de n observaciones será invariante con respecto a todo valor de k que sea mayor que k_1, y asimismo con respecto a todo valor de n que sea mayor que n_1.

En el caso de las hipótesis universales, en que ó $p = 0$ ó $p = 1$, las restricciones impuestas a k y a n —esto es, que tengan por cotas inferiores respectivas k_1 y n_1— está dada por la ecuación $k_1 n_1 = 0$, de la cual $k_1 = 0$ y $n_1 = 0$ forman una solución. Por consiguiente, la propiedad que $H_{p=0}$ y $H_{p=1}$ satisfacen, de quedar rechazadas por una contrastación k basada en un conjunto de n observaciones, será invariante con respecto a toda k mayor que 0 y a todo n mayor que 0, como habíamos visto ya (pág. 187). De modo que en el caso de las hipótesis estadísticas la invariancia difiere de la propia de las hipótesis universales solamente por el hecho de que en las primeras las cotas inferiores de k y n no son cero, sino números positivos mutuamente dependientes.

Todo lo anterior consiste realmente sólo en enunciar en un lenguaje perfilado los dos hechos siguientes, bastante obvios: que si se aplica una regla k de rechazamiento dotada de un valor dado de k a una serie de conjuntos crecientes de observaciones en la que el valor de la razón en α discrepe de p en una cantidad mayor que cierto número positivo fijado, se llega a un punto de la serie en que la hipótesis estadística H_p queda rechazada, y continuará quedando rechazada, de acuerdo con la regla k citada, de modo que, aun cuando la elección de un valor de k con preferencia a otro tendrá consecuencias en punto al rechazamiento o no de la hipótesis a base de un número limitado de observaciones, no las tendrá a este respecto si este número aumenta suficientemente (el valor de k tiene trascendencia sobre el resultado de utilizar una regla k de rechazamiento en un caso particular, pero no la tiene sobre el de utilizarla en una serie de casos en que n crezca constantemente). Y que cuando se examina la definición de los enunciados probabilitarios apoyándose en el procedimiento de rechazamiento no se puede objetar nada a que expliquemos el hecho de que tal procedimiento presente el aspecto de ser arbitrario —por utilizar una constante arbitraria— indicando que «a la larga» no lo es, ya que el valor de k carece de importancia si hacemos n suficientemente grande. (El valor que tiene que tener n para uno de k dado lo decide la

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

cota inferior, d, de las desviaciones de la razón en α de los conjuntos de observaciones con respecto a p, ya que nk tiene que ser mayor que pq/d^2.)

Mas, ¿no se ha logrado escapar a la arbitrariedad de la elección de k merced a la introducción de otro número igualmente arbitrario, a saber, la cota inferior, d, de la desviación de las razones en α con respecto a p? La respuesta a esta pregunta es que la arbitrariedad de d puede tratarse de la misma forma que la de k: si d_1 es menor que d_2, entonces pq/d_1^2 será mayor que pq/d_2^2, y el número de observaciones que se necesiten para que el valor de k carezca de trascendencia tendrá que ser mayor, mas para todo valor positivo de d, d_1, y todo valor positivo de k, k_1, habrá un valor de n (a saber, $n_1 = pq/k_1d_1^2$) tal que la hipótesis H_p quedará rechazada por la regla k si la razón en α hallada en un conjunto de n observaciones se desvía de p en más de d_1; de modo que la contrastación de rechazamiento es invariante para todos los valores de d que no sean inferiores al valor d_1 que —juntamente con k_1— determina el de n_1, y el efecto que produce la elección de una d_1 más pequeña es el de hacer mayor el número de observaciones que se precisen para que llegue a lograrse la invariancia tanto con respecto a d como con respecto a k [16].

Los números k_1, d_1 y n_1 están relacionados entre sí por las tres ecuaciones siguientes, que aritméticamente son equivalentes:

$$d_1 = \sqrt{\frac{pq}{n_1k_1}}, \quad k_1 = \frac{pq}{n_1d_1^2}, \quad n_1 = \frac{pq}{k_1d_1^2}.$$

En la definición de la probabilidad por medio de una regla k de rechazamiento asumimos que n y k estaban previamente fijados, y por ello utilizamos la primera de estas ecuaciones para enunciar semejante regla; además, no hicimos uso en ningún momento de la exposición de lo que sucedería a tal ecuación si el valor de n aumentase sin fin y sin límite. Con objeto de explicar la naturaleza provisional del rechazamiento fue necesario que considerásemos hiperconjuntos cuyos n_1 miembros fuesen conjuntos de n observaciones cada uno, hiperhiperconjuntos cuyos n_2 miembros fuesen hiperconjuntos de conjuntos de observaciones, y así sucesivamente; pero en ninguna ocasión sacamos partido de ninguna propiedad dependiente del tamaño de tales números —en realidad, todo cuanto se dijo sería verdad (aun cuando no muy interesante) si todos y cada uno de ellos fuesen iguales a 1—. Sólo

[16] Dicho cualitativa, no cuantitativamente, ya que n_1 está en razón inversa del cuadrado de d_1.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

cuando, después de haber definido la probabilidad por medio de un procedimiento de rechazar, nos pusimos a considerar la naturaleza de la constante arbitraria k involucrada en semejante procedimiento fue cuando estudiamos lo que ocurriría con una serie de conjuntos crecientes de observaciones e hicimos uso de la tercera ecuación, $n_1 = p_1q_1/ /k_1d_1^2$, para fijar un valor de n por encima del cual este procedimiento fuese invariante con respecto a valores de k y d no inferiores, respectivamente, a k_1 y d_1. Así pues, sólo en ese momento utilizamos valores de n no fijados de antemano independientemente de k y de d, sino determinados —en cuanto a su cota inferior— por las cotas inferiores de k y d. Pero tampoco utilizamos entonces la segunda ecuación, $k_1 = p_1q_1/n_1d_1^2$, que determina k_1 en función de n_1 y de d_1. Y si la ley de los grandes números se toma (según hicimos en la página 164) como nombre de la proposición según la cual, para p y d fijados, $1 - k$ tiende al límite 1 cuando n aumenta sin fin y sin límite, no hemos utilizado esta ley en la definición de la probabilidad dada en este capítulo.

Relación con la ley de los grandes números

Desde luego, la forma de la desigualdad de Bienaymé-Chebichev que constituye la razón para utilizar una regla de rechazamiento a base del intervalo $[p - \sqrt{(pq/nk)},\ p + \sqrt{(pq/nk)}]$ con objeto de llegar a una definición de la probabilidad, es matemáticamente equivalente a la forma de la desigualdad que, expresada a base de probabilidades, afirma que la probabilidad de que la razón en α de un conjunto de n observaciones se encuentre fuera del intervalo $[p - d,\ p + d]$ no es superior a pq/nd^2, y de la cual se sigue inmediatamente la ley de los grandes números. Pero no hemos dado una definición de la probabilidad apoyándonos en una k decreciente que sea función de n y que tienda al límite cero al aumentar n sin fin y sin límite: hemos admitido siempre que el valor de k era una constante y hemos dado el intervalo a que se refiere la regla k a base de los números independientes que eran valores de p, n y k. Hemos expuesto la razón fundamentadora de la definición a base de la posible revocación de un rechazamiento, no a base de la probabilidad de que un rechazamiento equivocado tienda a cero. Y hemos puesto de manifiesto la vinculación existente entre rechazamiento y falsedad haciendo observar que si la proporción de equivocaciones posibles es inferior a k, cualquiera que sea el número positivo k, no hay posibilidad de equi-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

vocarse. En nuestra exposición positiva nunca hemos identificado «tener una probabilidad muy pequeña» con «ser prácticamente imposible», ni «tener una probabilidad muy grande» con «ser prácticamente seguro»: todo lo hemos expuesto a base de una regla —complicada, y *prima facie* arbitraria— que emplea la noción de rechazamiento que puede llegar a revocarse. Y la forma en que el número de observaciones entra en la razón que fundamenta el procedimiento de rechazamiento es, simplemente, la de que cuanto más pequeño se escoja k tanto mayor tendrá que ser n para que el rechazo tenga la misma fuerza.

El efecto que produce el crecimiento de n arroja luz sobre una pregunta que podría ocurrírsele a un lector con conocimientos matemáticos, pregunta que puede formularse del siguiente modo: «Usted ha propuesto, como regla de rechazamiento, la de rechazar la hipótesis H_p si la razón en α de un conjunto de n observaciones se encuentra fuera del intervalo $[p - \sqrt{(pq/nk)},\ p + \sqrt{(pq/nk)}]$; y la ha justificado citando el teorema de la aritmética de las razones de clase según el cual, en un hiperconjunto, la proporción de conjuntos de n observaciones cuya razón en α caiga fuera de dicho intervalo es cierto número inferior a k (número que tal aritmética permitirá calcular exactamente en todo caso determinado y aproximadamente cuando n sea muy grande). Pero no ha dado ninguna razón de su elección del intervalo $[p - \sqrt{(pq/nk)},\ p + \sqrt{(pq/nk)}]$ en vez de cualquier otro intervalo en torno a p que tenga la propiedad que se había exigido de que, en un hiperconjunto, la proporción de conjuntos de n observaciones cuya razón en α se encuentre fuera del mismo sea menor que k: pues existe un número ilimitado de tales intervalos además de los que incluye el antes citado. ¿Por qué toma usted éste como intervalo de referencia en vez de uno de estos otros? Expresándolo con sus elipses de probabilidad, ¿por qué ha adoptado una de éstas para dividir el cuadrado fundamental en la zona de rechazamiento en k y la de no rechazamiento en k, en lugar de cualquier otro método igualmente bueno? En resumen, ¿por qué no ha utilizado cualquier otra regla de rechazamiento de iguales virtudes?».

La contestación a estas preguntas es que, si bien existen otros muchos intervalos además del $[p - \sqrt{(pq/nk)},\ p + \sqrt{(pq/nk)}]$ que tienen la propiedad exigida, cualquier hipótesis que resultare rechazada por una regla de rechazamiento debido a encontrarse fuera de alguno de estos intervalos quedaría asimismo rechazada por la mía, para cierto valor de n, en virtud de encontrarse fuera del intervalo que yo he

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

elegido. Lo cual se sigue del hecho de que el sistema de intervalos $[p - \sqrt{(pq/nk)},\ p + \sqrt{(pq/nk)}]$ forme un sistema de encajamiento sucesivo al aumentar n, sistema cuyos intervalos convergen hacia p al aumentar n sin fin y sin límite; y el sistema correspondiente de elipses probabilitarias forma un sistema análogo de encajamiento sucesivo que converge hacia la recta $p = r$. Así pues, cualquier intervalo, sea el que sea, que incluya el punto p, y cualquier zona apropiada[17], sea la que sea, que incluya el segmento de la línea $p = r$ situado dentro del cuadrado fundamental, incluirán, respectivamente, a partir de cierto valor de n en adelante, todos los intervalos del sistema de encajamiento sucesivo de los $[p - \sqrt{(pq/nk)},\ p + \sqrt{(pq/nk)}]$ y todas las elipses del sistema de encajamiento sucesivo de las elipses de probabilidad. En consecuencia, todo punto que caiga fuera del nuevo intervalo o de la nueva zona apropiada caerá, para valores suficientemente grandes de n, fuera de estos intervalos o de estas elipses, respectivamente, y las hipótesis rechazadas por la nueva regla lo serán también por la antigua para valores de n suficientemente elevados.

Aún más: si en lugar de considerar intervalos tales que la proporción de conjuntos que tengan razones en α situadas fuera del intervalo del caso sea *menor que* k consideramos otros, tales que dicha proporción sea *igual a* k, encontramos que todos estos sistemas de encajamiento sucesivo, cada uno de los cuales converge hacia un punto[18], son equivalentes —en un sentido de «equivalente» idóneo para utilizarlo en las reglas de rechazamiento—. Pues si I_n (para $n = 1, 2, \ldots$) es un intervalo del sistema de intervalos encajados sucesivamente $[p - \sqrt{(pq/nh)},\ p + \sqrt{(pq/nh)}]$ en el que sea h un número tal que la proporción de conjuntos a los que corresponda la situación fuera del intervalo sea k, y si J_m (para $m = 1, 2, \ldots$) es un intervalo de otro sistema cualquiera de intervalos encajados sucesivamente, convergentes hacia un punto y dotados de la misma propiedad, entonces no solamente para toda m habrá una n tal que el subsistema de intervalos encajados sucesivamente que empiece con I_n se encuentre en su totalidad dentro de J_m, sino que también ocurrirá lo contrario; esto es, que para toda n habrá una m tal que el subsistema de intervalos

[17] «Zona apropiada», ya que debe satisfacer la condición de que toda línea $p = p_1$, siendo $0 < p_1 < 1$, no corte más de dos veces su línea frontera dentro del cuadrado fundamental.

[18] Un sistema de intervalos encajados sucesivamente converge hacia un punto (es «puntualmente convergente») si la sucesión no decreciente de los puntos extremos izquierdos de los intervalos y la sucesión no creciente de los puntos extremos derechos de los mismos tienden hacia el mismo punto al crecer n sin fin y sin límite.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

encajados sucesivamente que comience por J_m se encuentre en su totalidad dentro de I_n[19]. Por tanto, estos dos sistemas están algo así como mutuamente enclavados: toda hipótesis que se rechace en virtud de una regla que utilice uno de ellos se rechazará también por una regla que utilice el otro, aun cuando normalmente el número de observaciones que sea preciso en un sistema para el rechazamiento sea distinto del preciso para ello mismo en el otro. Dado que si dos de estos sistemas de encajamiento sucesivo están enclavados con el sistema que utiliza los intervalos

$$\left[p - \sqrt{\frac{pq}{nh}},\ p + \sqrt{\frac{pq}{nh}}\right],$$

ellos dos también están enclavados entre sí, son todos equivalentes en el sentido de que los rechazamientos en uno de ellos irán acompañados de rechazamiento en cada uno de los demás.

Por consiguiente, cualquier regla de rechazamiento servirá para nuestros fines de otorgar significado a los enunciados probabilitarios si tiene la forma siguiente: rechácese H_p si la razón en α de un conjunto de n observaciones cae fuera del enésimo intervalo de un sistema de ellos, I_n, tal que la proporción de conjuntos de n miembros cuya razón en α se halle fuera del intervalo enésimo de este sistema sea igual a k. En virtud de la equivalencia de todas las reglas de rechazamiento de esta forma, parece razonable elegir una que sea sencilla, lo cual da razón de que yo haya elegido el sistema de los intervalos $[p - \sqrt{(pq/nh)},\ p + \sqrt{(pq/nh)}]$ para apoyar en él mi regla; la cual he simplificado aún más asumiendo que h era igual a k y valiéndome para justificarla de que con ella se consigue la probabilidad de un rechazamiento equivocado sea menor que k, en lugar de igual a este parámetro. Adoptando esta forma simplificada hemos podido justificarla valiéndonos sólo de las matemáticas elementales.

La equivalencia de todos estos sistemas de intervalos encajados explica el hecho de que no sea incorrecto expresar la regla de rechazamiento en la imprecisa forma de una regla que rechace una hipótesis estadística en caso de que una razón en α observada se desvíe del valor predicho por la hipótesis en una cantidad mayor que una determinada —la cual será tanto menor cuanto mayor sea el número de observaciones—: no es errónea, sólo imprecisa. Para la discusión filosófica de este capítulo ha sido necesario exponerla en forma precisa, y explicar subsecuentemente que cualquier otra forma precisa que

[19] Los dos sistemas de encajamiento sucesivo puntualmente convergentes convergen hacia el mismo punto, cuyo valor es p.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

satisfaga ciertas condiciones podría haber servido para nuestra finalidad con igual perfección.

Por qué se apoya en intervalos la regla de rechazamiento

Es preciso tomar en consideración otra crítica que puede hacerse contra la forma de mi definición. La regla k de rechazamiento que hemos dado corresponde a la regla que utilizan la mayoría de los estadísticos en sus «contrastaciones —o pruebas, o dócimas— de significación [*significance*]», es decir, para rechazar cualquier hipótesis cuyo «punto muestral» correspondiente a un conjunto de observaciones caiga dentro de la «zona crítica» —que es tal que la probabilidad de cualquier punto que caiga en su interior se encuentra por debajo del «nivel de significación»—; si bien ellos no emplean semejante contrastación misma para definir la probabilidad (como yo he hecho). Harold Jeffreys ha criticado este método fundándose en que la razón que ofrece para rechazar una hipótesis no es solamente la improbabilidad de encontrar los resultados observados supuesta la verdad de la hipótesis, sino también —en el mismo supuesto— la improbabilidad de encontrar resultados que no hayan sido observados y que —en dicho supuesto, repetimos— sean más improbables que los observados; así pues, «puede rechazarse una hipótesis verdadera por no haber predicho resultados observables que no hayan acontecido, lo cual parece un método bastante notable: frente a él, el hecho de que tales acontecimientos no hayan sucedido podría tomarse más razonablemente como prueba a favor de la ley, y no en contra de ella» [20]. Esta crítica tan plausible le lleva a uno a preguntar: ¿no sería mejor buscar el criterio adecuado para rechazar las hipótesis estadísticas en la proporción de conjuntos que tengan la razón en α realmente observada, y no en la de conjuntos cuya razón se encuentre en una gama dentro de la cual caiga la observada?

La dificultad que yace en la utilización de la razón en α real como criterio para la definición de probabilidad reside en que, mientras la aritmética de razones de clase demuestra que la proporción de conjuntos que tienen una razón en α situada en el intervalo $[p - d, p + d]$ es una función creciente de n (y no inferior a $1 - pq/nd^2$, en virtud de la desigualdad de Bienaymé-Chebichev), esta misma aritmética demuestra que la proporción de conjuntos con una razón en α determi-

[20] *Theory of Probability* (Oxford, 1939), pág. 316.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

nada cualquiera es una función decreciente de n, que tiende a cero al aumentar n sin fin y sin límite; así pues, un conjunto cuya razón en α sea exactamente p no está en distinta situación que otro que tenga otra razón en α cualquiera al aumentar el número de observaciones [21]. Por consiguiente, es necesario reunir conjuntos con razones en α diferentes para formar clases cuyas proporciones no tiendan a cero al aumentar n más allá de todo límite; y el modo natural de dicha reunión es hacerlo por medio de intervalos de razones de clase. Una vez llevada ésta a cabo, la aritmética de razones de clase que hemos desarrollado en este libro hace ver que al aumentar n progresivamente se tiene una proporción cada vez mayor (del número total de conjuntos posibles) con razones en α situadas dentro de cualquier intervalo que incluya p, y una proporción cada vez menor de entre todos los conjuntos posibles con razones en α situadas dentro de cualquier intervalo que no incluya p: al aumentar n los conjuntos se van concentrando progresivamente en todo intervalo dado en torno a p, y son cada vez más escasos en cualesquiera otros intervalos o grupos de ellos. Y puesto que su escasez en la zona exterior a un intervalo en torno a p (escasez demostrada por la desigualdad de Bienaymé-Chebichev) entraña su escasez en cualesquiera intervalos situados en dicha zona, la utilización de una regla que se apoye en la escasez en esta zona es más débil que la de otra que lo haga en la escasez en un intervalo incluido en tal zona —por ejemplo, el intervalo que comprenda sólo un pequeño entorno de la razón en α observada.

El argumento de Jeffreys consiste en decir que es falaz «rechazar una hipótesis basándose en observaciones que no hayan acontecido» [22]; pero es menester que comparemos con algo el conjunto de observaciones dotado de una razón en α observada; y como es lo único que se ha observado, no habrá nada con que lo comparemos que haya sido observado. Jeffreys sugiere que hubiera sido preferible compararlo con «el resultado más probable» [23], que es un conjunto de n observaciones dotado de la razón en α p_1, siendo np_1 la parte entera de $(n+1)p$ [24]; ahora bien, este resultado no ha acontecido, pues, de haberlo hecho, una regla de «contrastación de significación» no llevaría a rechazar la hipótesis. El procedimiento de dividir el intervalo [0, 1]

---

[21] La proporción de tales conjuntos tiende a cero más lentamente de lo que lo hace la de cualesquiera otros que tengan otra razón en α; pero tiende a cero.

[22] *Theory of Probability*, pág. 319.

[23] *Op. cit.*, pág. 317.

[24] Si el mismo $(n+1)p$ es un entero, tanto la razón en α de valor $(n+1)p/n$ como la de valor p dan resultados del tipo de «los más probables».

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

de los posibles valores de la razón en α en un subintervalo en torno de p y el resto, y de comparar entre sí los números de conjuntos cuyas razones en α caigan en una y otra partes de esta dicotomía tiene visos de ser preferible a cualquier otro método de comparación si tenemos en cuenta el hecho de que al aumentar el valor de n los conjuntos se concentran cada vez más en el subintervalo elegido en torno a p [25].

Sin embargo, la razón más poderosa en favor de esta dicotomía y de la admisión dentro de la regla de rechazamiento de todas las razones en α situadas dentro de un intervalo $[p-d,\ p+d]$ surge cuando nos ponemos a considerar, no la hipótesis de que el parámetro probabilitario tenga un valor concreto, p, sino la de que posea un valor comprendido dentro de un intervalo concreto, $[p_1,\ p_2]$. Ahora bien, las hipótesis estadísticas de que nos ocupamos en las contrastaciones empíricas no asignan nunca (excepto cuando se trata de hipótesis de bajo nivel deductibles de otras también estadísticas) un valor concreto, p, al parámetro probabilitario, sino que afirman que la probabilidad tiene el valor concreto, p, con cierto grado de aproximación, d: esto es, que se encuentra en el intervalo $[p-d,\ p+d]$; de modo que para estas hipótesis no habrá una razón en α que sea «la más probable», sino que entre las gamas de razones en α habrá una —el intervalo que acabamos de citar— que será «la más probable»; y toda contrastación de rechazamiento plausible tendrá que apoyarse en el número de conjuntos cuya razón en α se encuentre en algún punto de cierto intervalo. Una generalización lógica de la regla k de rechazamiento que hemos propuesto en este capítulo rechazará la hipótesis de que p se encuentre en el intervalo $[p_1,\ p_2]$ si la razón en α de n observaciones cae fuera del intervalo $[p_1 - \sqrt{\{p_1(1-p_1)/nk\}},\ p_2 + \sqrt{\{p_2(1-p_2)/nk\}}]$, que al aumentar n sin fin y sin límite se contrae hacia $[p_1,\ p_2]$, que es el intervalo aludido por la hipótesis. Y el caso al que los estadísticos matemáticos llaman la hipótesis «simple» —que atribuye un valor único al parámetro probabilitario— puede perfectamente considerarse como un caso degenerado de este procedimiento más general: a saber, aquél en que $p_1 = p_2$ y en que el inter-

[25] La diferencia entre el criterio sugerido por Jeffreys —el de rechazar la hipótesis en caso de que la razón del número de hiperconjuntos de conjuntos de n observaciones que tengan la razón en α observada al número de hiperconjuntos de conjuntos de n observaciones que tengan la razón en α «más probable» sea menor que k— y mi criterio de la regla k disminuye al aumentar n. Aquél podría muy bien ser preferible para ciertos problemas inductivos; pero lo que aquí nos ocupa es el empleo de una regla de rechazamiento para definir la probabilidad, asunto que (debe recordarse) no es el que ocupa a Jeffreys.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

valo $[p_1, p_2]$ se convierte en el intervalo degenerado que consta del punto único p_1.

La probabilidad en el contexto de los juegos de azar

Aun cuando los enunciados probabilitarios que se emplean en los juegos de azar no son hipótesis estadísticas científicas, poseen una característica que ilumina un hecho importante acerca de la manera en que éstas se utilizan dentro de los sistemas científicos, de suerte que conviene discutir brevemente el significado de tales enunciados.

Tomemos, como ejemplo típico, el enunciado según el cual la probabilidad de salir cinco en un dado es 1/6. En ciertos contextos (por ejemplo, en las exposiciones de la teoría elemental de las probabilidades) no se lo toma como enunciado empírico referente a un dado real o a una clase de dados reales, sino como enunciado acerca de un dado «ideal», que se utiliza para ejemplificar un teorema de la teoría pura de la probabilidad (acaso el teorema de que si hay m posibilidades excluyentes y exhaustivas, todas ellas con igual probabilidad, la probabilidad de cada una es $1/m$); en este caso dicho enunciado expresa una proposición lógicamente necesaria que se sigue lógicamente de la definición de dado ideal o de máquina de conceder probabilidades iguales a seis posibilidades en alternativa, y se refiere a un dado solamente en el mismo sentido «vacío» en que el enunciado según el cual dos manzanas más otras dos manzanas son en total cuatro manzanas se refiere a manzanas. El mismo análisis es válido con respecto al enunciado que parece referirse a un dado real (y dice «este dado») o a una clase de dados reales («estos dados»), pero que se toma en el sentido de que si este dado fuese un dado *ideal* (o si estos dados fuesen dados *ideales*) la probabilidad de sacar cinco con él (o con cada uno de ellos) sería 1/6.

Dejando de lado los casos en que el enunciado referido exprese una proposición lógicamente necesaria, pasemos a estos otros, mucho más interesantes, en que expresa una proposición contingente que atribuye una propiedad empírica a un dado real o a una clase de dados reales. Si hemos de admitir que se refiere a una clase de dados (así, a la clase de todos los dados que hay en esta mesa o a la de todos los producidos por cierta fábrica durante un año determinado) expresará la proposición general que atribuya dicha propiedad empírica a una clase limitada. Hay muy pocos contextos en que pueda entenderse semejante enunciado como expresión de una proposición general acer-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

ca de todos los dados, pasados, presentes y futuros, ya que sería ciertamente falsa si la tomásemos como proposición contingente sobre todos los dados reales; pero en caso de que así la entendiésemos atribuiría una propiedad empírica a todo miembro de una clase real.

¿Qué es esta propiedad empírica de salir cinco con probabilidad de 1/6? El enunciado según el cual un dado determinado tiene esta propiedad significa, como lo ha formulado C. S. Peirce, que «el dado tiene cierto 'sería'; y decir que un dado tiene un 'sería' es decir que tiene una propiedad muy parecida a un *hábito* que pudiese tener una persona». Peirce continúa diciendo que «exactamente del mismo modo que sería necesario, para definir un hábito de una persona, describir a qué tipo de comportamiento le llevaría y en qué género de ocasiones —si bien este enunciado no implicaría en modo alguno que el hábito *consista* en tal acción—, para definir el 'sería' del dado es necesario explicar a qué tipo de comportamiento llevaría al dado en una ocasión que revelase todas las consecuencias de dicho 'sería'; enunciado que no implicaría de suyo que el 'sería' del dado *consista* en tal comportamiento»[26].

Esta sorprendente descripción de Peirce corresponde a decir, en la terminología utilizada en este libro, que la propiedad de sacar cinco con una probabilidad de 1/6 es un concepto teorético que aparece en la hipótesis expresada por la cláusula «la probabilidad de sacar cinco con este dado es 1/6», y que el método de someter a contraste esta hipótesis es el de observar qué sale en el dado en las ocasiones en que se lo echa, aun cuando tal hipótesis no es idéntica a ningún conjunto de proposiciones observables ni la propiedad 'sería' del dado es una construcción lógica a partir de propiedades observables.

La hipótesis de que sea 1/6 la probabilidad de que salga cinco al tirar este dado se diferencia de una hipótesis científica únicamente por ser insuficientemente general; se trata, desde luego, de una proposición general, ya que no se refiere a una tirada determinada del mismo, sino a tiradas de él, en general; pero se limita a tener como objeto este dado concreto (incluso la proposición —entendida como contingente— de que todos los dados reales tengan esta propiedad 'sería' no tiene la generalidad suficiente para ser una proposición

---

[26] *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vol. 2 (Cambridge, Mass., 1932), § 2.664; *The Philosophy of Peirce*, ed. por J. Buchler (Londres, 1940), pág. 169. Peirce escribió estas notas en 1910; la propiedad a que se estaba refiriendo era la de sacar, con una probabilidad de 1/3, un número divisible por 3, pero sus observaciones son igualmente aplicables a la propiedad que he tomado como ejemplo, y que es más sencilla.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

científica). Mas el modo en que funciona un enunciado probabilitario acerca de este dado concreto es el mismo en que lo hace una hipótesis estadística científica: se otorga significado al enunciado acerca del dado por el lugar que ocupe en un sistema deductivo estadístico en el que sea contrastable por la experiencia y rechazable basándose en ella, de acuerdo con una regla k de rechazamiento —contrastaciones en las que es preciso confrontarlo con observaciones de la proporción en que se encuentre que sale cinco dentro de los conjuntos de tiradas del dado—. Así pues, no hay diferencia lógica entre la forma en que se otorga significado a los enunciados probabilitarios dentro de una ciencia y aquélla en que se lo concede a los enunciados lógicamente contingentes que aparecen al hablar de los juegos de azar.

Creo que hay muchas personas que, aun cuando podrían darse por satisfechas con la versión de la probabilidad de las hipótesis estadísticas científicas que he presentado en este capítulo —versión que se apoya en los criterios empíricos para su rechazamiento—, no se sentirán completamente a gusto ante la aplicación de la misma versión a las probabilidades de los juegos de azar. Ello se debe, según creo, al hecho de que las razones por las que primero pensamos en las hipótesis estadísticas científicas son muy diferentes, por regla general, de las que nos llevan a pensar en un enunciado probabilitario de juegos de azar. En el caso de todas las hipótesis científicas de las ciencias sociales, y de gran cantidad de ellas de las ciencias biológicas y físicas, lo que nos sugiere el valor numérico que asignamos en la hipótesis al parámetro probabilitario es la razón de clase —o la gama de razones de clase— encontrada en los conjuntos de casos observados; nadie, por ejemplo, habría siquiera propuesto para su consideración la hipótesis de que el 51 por 100 de los nacimientos lo sean de niños si no hubiera una gran cantidad de datos estadísticos acerca de conjuntos de nacimientos en los que la razón de los nacimientos de varones fuese aproximadamente el número citado. Pero en el caso de los juegos de azar suele ser muy distinto el método por el que primeramente asignamos un valor numérico a la probabilidad que aparezca en el enunciado probabilitario: si nos presentan un dado que no hayamos visto nunca antes y nos piden que le adscribamos una probabilidad de sacar cinco con él estaremos dispuestos a atribuirle una cifra antes de tener datos ningunos acerca del número de veces que haya salido cinco cuando se lo haya tirado anteriormente; lo único que pedimos es comprobar que realmente tenga seis caras, que una de ellas tenga cinco puntos y que el dado tenga aspecto y nos dé sensación de simétrico: entonces estamos dispuestos a adscribir probabi-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

lidades iguales a los seis modos distintos de quedar detenido el dado, y de la igualdad de las probabilidades de estos seis casos exhaustivos y excluyentes podemos deducir, mediante la teoría pura de las probabilidades, que la probabilidad de cada uno de ellos (por ejemplo, la de que salga cinco) es 1/6.

Pero aunque estemos dispuestos en casos como el del dado a atribuir un valor al parámetro probabilitario careciendo de datos de frecuencias estadísticas, esta atribución es siempre provisional, que habrá de ser abandonada si no se ajusta suficientemente a las razones de clase de los conjuntos de observaciones: por muy simétrico que sea el aspecto que el dado presente y parezca a nuestros sentidos, por mucho que lo sea de acuerdo con alguna prueba mecánica y por mucho que nos satisfaga la limpieza con que se hagan las tiradas, rechazaremos la hipótesis de que la probabilidad de sacar cinco es 1/6 si en un conjunto de tiradas suficientemente largo la proporción de cincos se desvía de 1/6 lo suficiente. El hecho de que haya satisfecho la contrastación para ver que no estaba cargado tiene como efecto que elijamos un valor pequeño de k, de suerte que rechacemos la hipótesis solamente en caso de que, supuesta su verdad, fuese muy improbable que hubiésemos encontrado la razón de cincos que hayamos encontrado en el conjunto de tiradas observado; pero lo de rechazar la hipótesis sí que lo haremos, en caso de que los datos estadísticos sean suficientemente poderosos; pues si rehusamos rechazar la hipótesis por mucho datos estadísticos que tengamos en contra suya, dando como razón que el dado realmente no está falseado y que sólo tiene la apariencia de estarlo, estaremos tratando el enunciado probabilitario no como expresión de una hipótesis contingente acerca de un dado real, sino como expresión de una proposición lógicamente necesaria acerca de un dado ideal, no falseado.

Idéntica situación aparece en cualquier ciencia adelantada con respecto a una hipótesis estadística que de suyo sea deductible de una hipótesis de nivel superior que esté fuertemente apoyada por datos que no constituyan apoyo directo a favor de aquélla: con facilidad exigiremos que haya datos estadísticos directos sumamente fuertes para estar dispuestos a rechazar la hipótesis de bajo nivel, pues su rechazamiento acarreará el de la de alto nivel, fuertemente apoyada, de la cual sea consecuencia lógica. Y, en ocasiones, los datos independientes en pro de la hipótesis de alto nivel lo son en favor de la igualdad de probabilidades de cierto número de hipótesis posibles, mutuamente excluyentes y exhaustivas, exactamente como ocurre en los juegos de azar; y, viceversa, puede haber muy bien juegos de azar en

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

los que estemos tan poco dispuestos a pronosticar las probabilidades antes de haber visto los datos estadísticos como lo estamos en cuanto a la razón de nacimientos de niños. Los juegos de azar en que empezamos por suponer que haya probabilidades iguales son aquéllos que hemos proyectado con esta finalidad, valiéndonos del hecho de que existen muchos sistemas físicos (por ejemplo, tiradas de dados y rotaciones de agujas) en los que sabemos que unas diferencias pequeñísimas en las causas del movimiento —diferencias demasiado pequeñas para poder sujetarlas al humano albedrío— producen grandes diferencias en el efecto. Henri Poincaré [27] señaló la importancia de los sistemas de esta índole para las asignaciones de probabilidades iguales: la razón que hay para atribuir iguales probabilidades a las seis posibilidades de caída del dado no es la razón negativa de que no tengamos razones para suponer que caiga saliendo una cara hacia arriba con preferencia a las demás, sino la razón positiva de que el dado constituye un sistema de Poincaré, en el que un cambio imperceptible en la posición en que se lo eche o en la dirección y velocidad de la rotación que se le imprima cambian todo en cuanto a la cara sobre la que vaya a reposar.

Si se concede que se otorga un significado a los enunciados probabilitarios contingentes que se emplean en los juegos de azar por medio de una regla de rechazamiento provisional, de la misma manera que se obra con los enunciados probabilitarios dentro de una ciencia, la comparación entre unos y otros subrayará un rasgo de los últimos que podría, tal vez, quedar olvidado. Las razones que tenemos para creer una hipótesis estadística no necesitan ser solamente datos estadísticos —en realidad, no lo necesitan en absoluto—: los datos directos en apoyo de una hipótesis estadística tendrían que ser estadísticos, pero en la ciencia puede aparecer una hipótesis de este género —así, una proposición acerca de las probabilidades de un juego de azar del tipo de un sistema de Poincaré— dentro de un sistema deductivo como consecuencia lógica de hipótesis de nivel más elevado que gocen de datos independientes en favor suyo; no obstante lo cual, por robustos que sean los datos directos o indirectos que apoyen una hipótesis estadística, ya sea en una ciencia o en un juego de azar, una cantidad

---

[27] *Calcul des Probabilités* (París, 1896), págs. 127 y sigs.; *La Science et l'Hypothèse* (París, 1902), págs. 233 y sigs. (traducción inglesa, Londres, 1905, págs. 201 y sigs. [versión en castellano, *La ciencia y la hipótesis*, Buenos Aires, Espasa Calpe, 1943, págs. 173 y sigs.]); *Science et Méthode* (París, 1908), págs. 67 y sigs. (traducción inglesa, Londres, 1914, págs. 67 y sigs. [versión en castellano, *Ciencia y método*, Buenos Aires, Espasa Calpe, 1945, págs. 55 y sigs.]).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

suficiente de datos directos contrarios de razones de clase en conjuntos de observaciones bastará para hacer que la rechacemos. De suerte que no hay incoherencia alguna en mantener al mismo tiempo que el significado de un enunciado probabilitario viene dado por su rechazabilidad en virtud de unos datos estadísticos apropiados y que puede creerse en él razonablemente con independencia de datos estadísticos.

La tesis que he venido defendiendo acerca de la probabilidad, tanto en la ciencia como en los juegos de azar, puede ser designada con toda propiedad como una teoría *frecuencial* de la probabilidad, ya que se han de encontrar los criterios de significado o sentido de los enunciados probabilitarios en que se los rechace o se los deje de rechazar a base de las frecuencias (esto es, las razones de clase) que se hallen en conjuntos observados [28]. Pero si se llama frecuencial a mi teoría debe recordarse, tanto que mi tesis no identifica los enunciados probabilitarios con enunciados acerca de frecuencias observadas —y la relación entre unos y otros es bastante complicada, como hemos expuesto en este capítulo—, como que una creencia razonable en enunciados probabilitarios puede basarse en datos enteramente distintos que los relativos a frecuencias que correspondan a probabilidades.

Carácter «teorético» de las hipótesis estadísticas

Hemos identificado la hipótesis estadística expresada por el enunciado probabilitario de que es p la probabilidad de que un miembro de β sea miembro de α con la proposición según la cual el parámetro en α de la hiperclase probabilitaria en $\{\alpha, \beta\}$ es p —proposición sujeta a contrastación empírica por medio de un conjunto de n casos de β considerados como una selección de esta hiperclase—. Nos hemos ocupado principalmente en este capítulo de explicar cómo opera dicha contrastación empírica en virtud de su capacidad para rechazar provisionalmente una hipótesis —carácter provisional de este rechazo que constituye el rasgo distintivo de las hipótesis estadísticas.

Mas parece haber todavía dos preguntas desconcertantes que aún no hemos aclarado. En primer lugar, ¿qué es lo que determina el tamaño de las clases-miembros de la hiperclase probabilitaria?: hemos llamado a tales números m_1, m_2, ..., m_n, pero ¿qué es lo que deter-

[28] Algunos autores (por ejemplo, Kneale) restringirían la aplicación del título de teoría frecuencial a las de la forma propugnada por Von Mises y Reichenbach, en que se identifican las probabilidades con *límites* de frecuencias observadas.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

mina el valor de estos n números? Segundo, si hemos de considerar un conjunto de n_1 casos como una selección de una hiperclase probabilitaria y también una selección de n_2 casos como selección a partir de una hiperclase probabilitaria, estas dos hiperclases han de ser distintas, ya que la primera tiene n_1 clases-miembros y la segunda n_2; entonces, ¿cómo puede identificarse la probabilidad p con el parámetro probabilitario de una de estas hiperclases con preferencia a la otra?

Formulemos concretamente estas preguntas con referencia a la hipótesis estadística según la cual la probabilidad de que un recién nacido sea niño es $\frac{51}{100}$. Si identificamos esta proposición con aquélla según la cual el parámetro de masculinidad de una hiperclase probabilitaria en {masculinidad, nacimiento humano} es $\frac{51}{100}$, y se identifican conjuntos determinados de nacimientos con selecciones de esta hiperclase, entonces: en primer término, ¿qué es lo que determina los tamaños de las clases —miembros de la hiperclase— de cada una de las cuales se toma un miembro para formar la selección que constituya un conjunto determinado de nacimientos?; y, en segundo, ¿cómo pueden ser miembros de la misma hiperclase una selección de 100 nacimientos y una de 1.000?

Se llega a una respuesta a estas preguntas cuando nos damos cuenta del carácter «teorético» de la hiperclase probabilitaria que entra en juego. Su función reside en permitir que se lleven a cabo deducciones acerca de los números de selecciones de ella que posean ciertas razones de clase, y a este respecto es indiferente cuáles sean los números de sus clases-miembros, ya que estos números —m_1, m_2, ..., m_n— aparecen tanto en los numeradores como en los denominadores de las fracciones del cálculo y quedan eliminados: son como los factores de fase de las ecuaciones de onda de Schrödinger de la mecánica cuántica, que desaparecen en el proceso de deducción de las consecuencias observables. En cuanto a la segunda pregunta se la puede contestar de dos formas distintas. Una consiste en tomar el enunciado probabilitario como aserción de que *toda* hiperclase probabilitaria en {masculinidad, nacimiento humano} tiene el parámetro p; lo cual presenta la desventaja de que oculta el carácter teorético de las hiperclases probabilitarias que sean: pues decir que la probabilidad de que un recién nacido sea niño es $\frac{51}{100}$ no es hacer observación alguna acerca de toda hiperclase real de clases equiproporcionales en masculinidad de nacimientos humanos, sino proponer una hipótesis

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

relativa al concepto teorético de semejante hiperclase; y hemos hablado normalmente en singular de las hiperclases probabilitarias de que se tratara en cada momento —en la forma de suponer que el conjunto de casos era una selección de *una* hiperclase de este tipo— para destacar su carácter teorético. Si se acentúa mucho el punto de que las hiperclases tienen que ser diferentes si los números de las selecciones son diferentes tenemos una segunda forma de salir al paso de tal punto: la de tomar el enunciado probabilitario como aserción de que toda hiperclase probabilitaria que entre en cuestión —por ejemplo, B_1, dotada de n_1 miembros, B_2, dotada de n_2 miembros, etc.— es una subclase de una hiperclase probabilitaria, B_0, que tenga p como parámetro probabilitario; pues de la definición de hiperclase probabilitaria se sigue que toda subclase no vacía de ella es otra hiperclase probabilitaria con el mismo parámetro probabilitario.

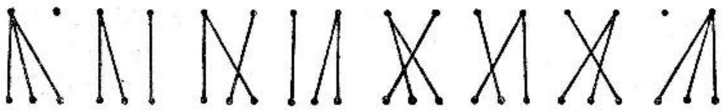
Si la hiperclase B_0 tiene que incluir subclases con un número finito cualquiera de miembros tendrá que tener, por su parte, un número infinito de ellos; pero no se puede objetar lógicamente a tal cosa, ya que las clases cuyas razones en α tienen que ser iguales son las clases finitas que son miembros de la hiperclase probabilitaria infinita, B_0, y no hemos dicho nada acerca de las proporciones que existan en ésta [29]. En realidad, la infinitud de B_0 destaca el carácter teorético de su concepto: el considerar un conjunto de n observaciones como una selección de n miembros a partir de n clases, a su vez miembros —es decir, que constituyen algunos de los miembros— de una hiperclase probabilitaria infinita, llama la atención sobre el hecho de que no hay que mirar semejante «selección» de n miembros como si se construyera mediante un proceso de tomar un miembro de cada una de las clases de cierto número de ellas que formasen parte de una clase infinita de clases que estuviera ante nosotros, al modo de un Briareo de n brazos que tomase una bola de cada bolsa de un número n de ellas que formase parte de un conjunto infinito de bolsas situado delante de él; sino que se trata, más bien, de una relación entre el concepto teorético de hiperclase probabilitaria (y el parámetro probabilitario asignado a ella) y los conjuntos realmente observables.

El que sea tentador tomar las «selecciones» en un sentido más literal de lo que es apropiado para un sistema de relaciones entre conjuntos de entidades observables y conceptos teoréticos se debe a que,

[29] Puesto que todas las selecciones de que hablamos lo son a partir de hiperclases finitas que son subclases de la hiperclase infinita, no se precisa ningún axioma multiplicativo (o de elección) que nos asegure la existencia de tales selecciones.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

en beneficio de la sencillez, hemos expuesto la aritmética de razones de clase en la forma de teoremas matemáticos acerca de selecciones a partir de clases de clases. Pero esta noción de selección es un caso particular de la selección a partir de relaciones[30], y la aritmética de razones de clase es válida en este caso más general. Estaría fuera de lugar que expusiéramos aquí el sistema puramente deductivo de selecciones a partir de relaciones, especialmente puesto que las consideraciones matemáticas que entran en él son exactamente las mismas que las concernientes a las selecciones a partir de clases de clases; pero vale la pena de presentar un modelo de este sistema para que se lo pueda comparar con el modelo —para el otro sistema— de un Briareo de tres brazos que sacase bolas de tres bolsas cada una de las cuales contuviera solamente dos bolas (pág. 152). El modelo que es comparable a este último consiste en el número de maneras de trazar un sistema de segmentos de recta que unan cada uno de los tres puntos



I I I   I I D   I D I   I D D   D I I   D I D   D D I   D D D

Fig. 8.

inferiores a uno, y sólo uno, de los dos puntos superiores (véase la figura 8); los símbolos de tres letras colocados debajo de cada una de las ocho figuras indican a cuál de los dos puntos superiores, el izquierdo o el derecho, está unido cada uno de los puntos inferiores (de izquierda a derecha, el primero, el segundo y el tercero); y la expresión de las ocho maneras diferentes de trazar este sistema de líneas mediante tales símbolos hace ver su equivalencia formal con las ocho maneras de sacar tres bolas de un grupo de tres bolsas —cada una de las cuales contenga dos bolas— tomando una de cada bolsa.

Si pensamos en las hipótesis estadísticas como hipótesis de nivel supremo de un sistema deductivo del cual sean modelos diagramas de este tipo, tenderemos a expresar sus relaciones con las proposiciones acerca de las razones de clase en conjuntos de observaciones en un lenguaje tal que hablemos de que los conjuntos de observaciones son «representantes» de los conceptos teoréticos, o de que constituyen la «progenie» de éstos; y las palabras que señalen sus relaciones mu-

[30] A. N. Whitehead y Bertrand Russell, *Principia Mathematica,* vol. I, parte II, sección D.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

tuas serán tan palmariamente metafóricas que apenas tendremos peligro de no reconocer el carácter teorético de los conceptos a los que las entidades observadas se vinculan mediante tales relaciones.

Sin embargo, el estudio de los sistemas deductivos probabilitarios es mucho más profuso cuando se realiza en el lenguaje de las selecciones a partir de relaciones que cuando se hace en el de las selecciones a partir de las clases de clases, y por ello hemos preferido este segundo procedimiento. Pero hemos de tener cuidado de no hacer preguntas (por ejemplo, en cuanto al número de miembros de las clases de una hiperclase probabilitaria) que no tengan paralelo en la otra posible forma de estudio, y de no tomar el lenguaje de las selecciones como si presupusiera que el conjunto de cosas que seleccionemos y el de miembros de la hiperclase de la cual se «seleccione» aquel conjunto fueran de la misma condición: es preciso mirar el lenguaje de las selecciones como un lenguaje de *como si*, que tiene la utilidad de que las matemáticas pueden expresarse en él de forma conveniente.

Conclusión

Según la tesis que hemos expuesto en este capítulo, la peculiaridad de los enunciados probabilitarios (excepto los que adscriban probabilidades o bien de 0 o bien de 1) reside en que el criterio empírico para rechazarlos nunca es definitivo, sino siempre provisional, de modo que todo rechazo de acuerdo con el mismo es susceptible de revocación por virtud de experiencias ulteriores; y, por consiguiente, no se puede identificar ningún enunciado probabilitario con un enunciado de la aparición de determinadas frecuencias en ningún conjunto de casos reales. Pero, como hemos indicado, puede decirse con toda propiedad de mi enfoque que es un «enfoque frecuencial de las probabilidades» en cuanto que lo que otorga significado a los enunciados probabilitarios está siempre apoyado en su rechazabilidad —si bien provisional— por medio de frecuencias observables. Tras todo lo que hemos dicho en este capítulo apenas debería haber ningún peligro de una mala inteligencia cuando hablemos —como vamos a hacer en el próximo capítulo— de que los enunciados probabilitarios son equivalentes, *a la larga*, a aseveraciones de frecuencias (esto es, de razones de clase) en conjuntos de observaciones; pues la especificación de «a la larga» tiene la pretensión de referirse a la gama completa de consideraciones lógicas y epistemológicas que hemos desarrollado en este capítulo.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

La elección entre hipótesis estadísticas

Dos de los problemas de la lógica de las hipótesis científicas son los mismos independientemente de que éstas sean o no estadísticas. En los dos últimos capítulos hemos tratado el problema del significado de las hipótesis estadísticas siguiendo las líneas de desarrollo sugeridas por la lógica de las hipótesis universales: del mismo modo que se concedía significado al enunciado de una hipótesis universal por medio de las observaciones basándose en las cuales habría de ser rechazada —y rechazada definitivamente—, así hemos otorgado un significado al enunciado de una hipótesis estadística por medio de las observaciones sobre cuya base habría de rechazársela —si bien provisionalmente, nunca de modo definitivo—. Así pues, en ambos casos la solución de este problema se encuentra valiéndose de un rechazamiento: en uno y otro caso lo que concede significado a los enunciados de las hipótesis es un procedimiento de rechazarlas; y hasta no resolver este problema no podíamos seguir adelante. El segundo, el de la justificación última de la aceptación de una hipótesis científica, es también análogo —en realidad es el mismo— en los dos tipos de hipótesis. Pero antes de que nos ocupemos de él quiero estudiar un tercer problema que presenta un cariz distinto para las hipótesis estadísticas y para las universales: el de las razones que haya para preferir una hipótesis estadística a otra.

Naturalmente, surgen cuestiones acerca de si los datos apoyan una hipótesis universal (por ejemplo, todo B es A) más que otra rival de ella (por ejemplo, todo C es A), y los partidarios de una teoría no empírica de la probabilidad que han intentado elaborar una lógica formal de la inducción (Harold Jeffreys, J. M. Keynes, Rudolf Carnap) han incluido el fundamento racional de la elección entre hipótesis rivales dentro de su perspectiva; mas ninguno de estos autores, según me parece, ha presentado criterios para tal elección que sean a la vez plausibles y suficientemente definidos para ser útiles. Si el punto de vista de este libro es correcto no existen semejantes criterios

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

generales para llevar a cabo tales elecciones: la medida en que una hipótesis se ajuste al cuerpo total de conocimientos científicos es sumamente pertinente en cuanto a su pretensión de ser incluida en tal cuerpo de conocimientos, y es difícil ver de qué podría servir a este respecto una lógica formal de la «credibilidad», de la «aceptabilidad» o de la «confirmación», aparte de para señalar perogrulladas tan manifiestas como la de que si hay buenos datos que apoyen una hipótesis, toda hipótesis de nivel inferior que sea consecuencia suya estará asimismo apoyada por buenos datos y muy bien puede recibir apoyo de otros buenos datos independientes.

En el caso de las hipótesis estadísticas la situación es diferente [1]: cada una de ellas (del género que hemos tenido en cuenta en este libro) [2] asevera que una probabilidad especificada tiene un valor definido, o uno incluido dentro de una gama determinada de valores, y al considerar esto surge inmediatamente la pregunta de por qué este valor particular (o esta gama particular de valores) en vez de otro. Es poco más o menos imposible considerar la hipótesis de que sea el 51 por 100 la probabilidad de que un nacimiento lo sea de un niño sin compararla con la hipótesis rival de que dicha probabilidad sea el 50 por 100, el 52 por 100 u otro tanto por ciento concreto cualquiera; y, en realidad, al desarrollar la lógica del significado de los enunciados probabilitarios he tenido las máximas dificultades para eludir semejante comparación, así como puede muy bien haber ocurrido que esté sujeto a críticas debido a esta elusión. Pero tenga o no razón al afirmar que puede darse aisladamente una versión del significado de los enunciados probabilitarios, es incontestable que cualesquiera razones que haya para *creer* un enunciado probabilitario tienen que serlo también para creer dicho enunciado más bien que cualquier otro que adscriba una probabilidad distinta a la misma proposición sobre la base de los mismos datos. Además, muchos de los enunciados probabilitarios (hipótesis estadísticas) de que se ocupa la ciencia —y casi todos los de las ciencias sociales— poseen escasos apoyos indirectos: los datos en favor suyo consisten enteramente, o casi enteramente, en los datos directos del acuerdo de sus consecuencias con los hechos

---

[1] Cuando la hipótesis rival de una hipótesis universal no es otra de este mismo tipo, sino una de índole estadística, se considera que aquélla es una hipótesis estadística que atribuye una probabilidad igual a 1.

[2] No hemos tenido en cuenta las hipótesis estadísticas, más complejas, que afirman que la conyunción —o la alternación— de un conjunto de probabilidades especificadas y en relación mutua tiene un conjunto de valores asignados, ni tampoco las que se ocupan de distribuciones continuas de probabilidad.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

observados; así, es fácil ver que el que se encuentre un cisne negro en Australia hace preferible la hipótesis de que todos los cisnes europeos son blancos a la de que todos los cisnes son blancos, pero no hay forma obvia de ver si el hecho de que yo saque ocho bolas negras en veinte extracciones (con reposición tras cada una de ellas) realizadas en una bolsa de la que sepa que contiene diez bolas que son o bien seis negras y cuatro blancas o bien tres negras y siete blancas, convierte la primera de estas hipótesis en preferible a la segunda o a la inversa.

Por expresarlo de otro modo. En las hipótesis universales la lógica de la relación entre los datos directos y la hipótesis o es sumamente sencilla o entraña solamente dificultades matemáticas: si los datos se siguen de la hipótesis —ya sea inmediatamente, ya a través de una deducción matemática complicada—, ésta se encuentra apoyada por aquéllos, y si no ocurre así no lo está; en lo que se refiere a los datos directos, todo lo que se necesita para justificar que se prefiera una hipótesis a otra es que los datos en favor de aquélla incluyan y excedan a los existentes en favor de la no preferida; y si los datos directos en pro son los mismos, la elección entre una y otra hipótesis universal depende de los apoyos indirectos. Pero en el caso de una alternativa de hipótesis estadísticas posibles que atribuyan, sobre la base de los mismos datos, probabilidades distintas a la misma proposición, la elección puede depender de estos mismos datos directos: de igual modo que el rechazamiento de una hipótesis estadística por la observación no es asunto de la lógica deductiva, sino de una regla especial de rechazamiento, la elección entre hipótesis estadísticas que formen una alternativa no es asunto de esta lógica, sino que exige que elijamos primero unas normas antes de pasar a semejante elección. Y en modo alguno es evidente cuáles sean las mejores normas, ni —en verdad— qué es lo que se quiere decir al decir de unas normas que sean «las mejores» con este fin.

A partir de la obra iniciadora de sir R. A. Fisher —desde 1912 en adelante— los estadísticos matemáticos han puesto a punto diversos conjuntos de normas de esta índole; las han ideado para diversos tipos de elección y las han llamado con nombres diferentes. Las normas ideadas para decidir si debe preferirse la hipótesis de que el valor de cierta probabilidad difiera de cierto número a la hipótesis de que sea igual a él han sido llamadas «contrastaciones —o pruebas, o dócimas— de significación»; las ideadas con el fin de preferir un valor (o una gama de valores) a cualquier otro valor (o gama de valores) han recibido el nombre de «contrastaciones —o pruebas, o dó-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

cimas— de estimación» («estimación puntual» o «estimación de intervalos», respectivamente). Muchas de estas contrastaciones se propusieron inicialmente como pruebas *ad hoc*, en vista de ciertos problemas determinados que habían surgido en la estadística aplicada, y se presentaron sin muchas pretensiones de una justificación racional; sólo en los últimos veinte años se han comenzado a educir principios generales reguladores de tales normas —por Jerzy Neyman, E. S. Pearson y otros estadísticos matemáticos—, y recientemente Abraham Wald ha elaborado un «procedimiento de decisión» completamente general para lo que él llama la «inferencia estadística» [3]. Todos estos autores han puesto a punto sus métodos sin perder de vista su aplicación práctica a casos en los que las hipótesis estadísticas no sean enunciados probabilitarios singulares, sino enunciados acerca de leyes funcionales sobre probabilidades continuas (tales como el de que la probabilidad de que un inglés tenga una estatura x es cierta función de x en que los parámetros tienen unos valores determinados); y, en consecuencia, entra en ellos una gran cantidad de desarrollos matemáticos complicados que hace difícil separar la pulpa lógica del jugo matemático [*lit.*, «la madera lógica de los árboles matemáticos»]. Sin embargo, en los casos más sencillos puede verse el esqueleto lógico de estos procedimientos; y como el enfoque de Wald plantea una cuestión de gran interés filosófico voy a exponer en este capítulo, esencialmente, las normas «minimax» de este autor refiriéndome a un ejemplo, que he construido de suerte que tenga la máxima sencillez posible [4].

Pero antes de hacerlo es menester que señalemos un punto importante. Los estadísticos matemáticos que he mencionado —Fisher, Neyman, Pearson, Wald— ni se ocupan ni tienen por qué hacerlo

[3] Wald trazó un bosquejo de su método en su opúsculo *On the Principles of Statistical Inference* (Notre Dame, 1942) [versión castellana, *Sobre los principios de la inferencia estadística*, Madrid, C. S. I. C. (Monografías de ciencia moderna), 1951], capítulo VI, y lo ha desarrollado luego en una serie de artículos en *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 10 (1939), págs. 299 y sigs., vol. 18 (1947), págs. 549 y sigs., y vol. 20 (1949), págs. 165 y sigs., en *Annals of Mathematics*, segunda serie, vol. 46 (1945), págs. 265 y sigs., y en *Econometrica*, vol. 15 (1947), págs. 279 y sigs. (En el libro de WALD, *Statistical Decision Functions* (Nueva York, 1950), que no he llegado a ver hasta después de haber terminado este capítulo, se expone dicho método sistemáticamente.)

[4] Aun cuando varios autores de lógica se refieren a la «verosimilitud máxima» de Fisher, sólo conozco dos obras sobre lógica, la *Theory of Experimental Inference* (Nueva York, 1948), de C. W. CHURCHMAN, y los *Logical Foundations of Probability*, de RUDOLF CARNAP, que hagan referencia a la obra de Wald —e incluso, en realidad, a las de Neyman y Pearson, que proceden de 1933.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

de la cuestión filosófica de la justificación de la inducción, que ha sido lo que poseía el supremo interés para los filósofos; en consecuencia, suponen a menudo que si un criterio no es capaz de rechazar una hipótesis estadística es preciso aceptarla. Ello es suponer que el científico estuviese frente a dos posibilidades y sólo dos, la de rechazar la hipótesis y la de aceptarla, y que la tarea del estadístico matemático fuese la de proporcionarle unas normas que le dijeran cuál de estas actitudes debe tomar cuando los datos observados sean de cierto género; suposiciones que los estadísticos matemáticos realizan con frecuencia mediante una representación geométrica en la que los valores posibles de observación se representan por puntos de un «espacio muestral» que ha de dividirse en una «zona de aceptación» y una «zona de rechazamiento»; y consideran que el problema que les es propio es el de encontrar un principio que justifique esta dicotomía. Todo lo que el científico tendría que hacer es ver en cuál de estas dos zonas caería el punto que corresponda a su conjunto de observaciones y aceptar o rechazar la hipótesis de acuerdo con ello.

El filósofo señalará en seguida, naturalmente, que no ser capaz de rechazar una hipótesis es una cuestión enteramente distinta de la de aceptarla, y que incluso si unas normas de rechazamiento rechazasen toda hipótesis posible excepto una, ello no implicaría que hubiera de aceptarse ésta, salvo en el supuesto de que una de entre todas estas hipótesis posibles tuviese que ser verdadera; pero no es necesario que ocurra tal cosa: no es necesario, por ejemplo, que, o bien el 50 por 100 o menos de los nacimientos lo sean de niños, o bien que lo sean más del 50 por 100, pues puede acontecer perfectamente que no haya hipótesis estadística alguna acerca de la proporción de nacimientos de niños que sea verdadera. En realidad, los procedimientos de estimación de los estadísticos matemáticos son respuestas a preguntas hipotéticas tales como: suponiendo que exista una ley estadística tal que la probabilidad de que un B sea A tenga el valor p, ¿cuál es la mejor estimación de este valor? (o, en el mismo supuesto, ¿cuál es la mejor estimación de una gama de valores en la que se encuentre aquél?).

No hay nada que objetar a que el estadístico matemático haga esa suposición y a que describa la zona de su espacio muestral en la que su principio le impida rechazar la hipótesis del caso llamándola zona de «aceptación» de ésta, con tal de que esté claro para todo el mundo que en este contexto «aceptación» quiere decir no rechazamiento. Mas el paso de este género negativo de aceptación a otro más positivo exige que se siga la norma inductiva general de aceptar las hipótesis que hayan sido confirmadas y no estén rechazadas; norma cuya justifica-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

ción plantea la cuestión filosófica de la justificación fundamental de la inducción y que constituirá el tema del capítulo siguiente.

Vamos a estudiar con cierto detalle el caso sencillo de las normas para elegir, basándose en la experiencia, entre dos hipótesis estadísticas que formen una alternativa; tras él yace la suposición general de que una u otra de las dos hipótesis sea verdadera —pero no ambas—, de modo que toda norma que nos haga rechazar una será *ipso facto* norma para aceptar la otra, y viceversa. No nos ocuparemos en este capítulo de las razones que haya para aceptar semejante supuesto general, sino de la forma de elegir una norma que nos haga preferir una hipótesis estadística a otra, habiendo concedido ya que haya alguna hipótesis de este tipo verdadera y que las dos en cuestión sean las únicas que aspiren al puesto de ser una hipótesis verdadera.

«Utilidades» y «esperanzas matemáticas»

La norma que hemos de poner a punto en este capítulo para elegir entre dos hipótesis estadísticas de una alternativa —que se basa en la norma «minimax» de Wald— se apoya esencialmente en considerar que la creencia de una hipótesis tiene efectos deseables si es verdadera, e indeseables si es falsa: la elección está determinada por una comparación de los efectos deseables de creer una hipótesis siendo verdadera, y de los indeseables de creerla siendo falsa, con los efectos deseables e indeseables de creer la otra hipótesis en los casos respectivos de que sea verdadera y de que sea falsa. Por tanto, no se pueden evitar nociones de *valor* mensurable: los criterios que utilicemos manejarán las relaciones aritméticas de cuatro valores —la ganancia o la pérdida que se obtengan eligiendo una hipótesis siendo respectivamente verdadera o falsa y la ganancia o la pérdida que se consigan al elegir la otra hipótesis en los casos de que sea verdadera o falsa, respectivamente—. Las distintas asignaciones de estos cuatro valores ocasionarán elecciones distintas; pero aunque es preciso atribuir unos números a esas ganancias y pérdidas con objeto de tener una base para lo que llamaremos una norma «prudencial», es indiferente para la teoría los rasgos de los efectos a los que se asignen tales números: las ganancias y pérdidas consideradas pueden ser cantidades de felicidad, de eudemonía, de gozo o de bondad absoluta; no hay necesidad de que el lógico idee una norma de elección para resolver ninguna cuestión ética en cuanto a la naturaleza de las cosas últimamente deseables: lo único que precisa es que haya algún criterio mensurable de

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

la cantidad que el científico vaya a ganar al aceptar una hipótesis que, de hecho, sea verdadera y de la que vaya a perder al aceptar una que, de hecho, sea falsa. Exactamente del mismo modo que ciertas partes de la economía dependen de la asunción de una utilidad mensurable que valga para determinar la elección económica, esta parte de la lógica inductiva depende de la asunción de un valor mensurable —al que del modo menos comprometido del mundo llamaremos «utilidad»— que valga para determinar la elección entre hipótesis rivales. En la medida en que no sean válidas estas asunciones las teorías puras de la economía de la utilidad y de la inferencia estadística «prudencial» (que son sistemas deductivos impuros o mixtos en el sentido del capítulo segundo) no permitirán que se hagan deducciones de valor práctico; pero si son válidas aproximadamente —en general o en un campo limitado— pueden obtenerse criterios aproximados que, *faute de mieux*, tendrán gran utilidad práctica.

Los elementos de valor —las «utilidades»— entran en nuestra teoría de la elección entre hipótesis no de una manera directa, sino a través de la noción de «esperanza matemática». Supongamos que p sea la probabilidad de que un miembro de β sea miembro de α, que a sea la utilidad que se gane si el miembro de β es miembro de α y que b sea la que se gane si el miembro de β no es miembro de α; entonces, si se saca la utilidad media de un gran número de miembros de β, ésta será, a la larga

$$ap + b(1 - p).$$

Llamaremos a este valor medio a la larga, de acuerdo con lo que es costumbre, la «esperanza matemática de la utilidad conjunta» —o, brevemente, la «esperanza matemática», cuando, como ocurre en este capítulo, se trata siempre de la esperanza matemática de una utilidad—. Las esperanzas matemáticas no se refieren a miembros determinados de la clase β, sino a todo miembro de esta clase (como ocurre con las probabilidades mediante las cuales se definen); y el nombre tradicional de «esperanza matemática» es muy desafortunado, pues sugiere que hay un acto subjetivo de esperar una utilidad, en una ocasión determinada, de que un miembro determinado de β sea o no miembro de α, mientras que lo que le compete es una media a la larga de un gran número de ocasiones. Cuando la esperanza matemática es negativa lleva el nombre de riesgo, que es el término empleado por Wald, que manejaba esperanzas matemáticas negativas; como mi estudio será más optimisita que el de Wald, y admitiré que haya tanto ganancias como pérdidas, prefiero utilizar el término de «esperanza

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

matemática», pese a sus asociaciones engañosas, en lugar del de «riesgo».

ESTUDIO DETALLADO DE UN CASO SENCILLO

Supongamos que hemos de elegir entre dos hipótesis estadísticas, H_1 y H_2 (H_1 afirmará que es p_1 la probabilidad de que un miembro de una clase, β, sea miembro de otra clase, α, y H_2 afirmará que esa misma probabilidad es p_2); vamos a excluir el caso de que alguna de estas dos hipótesis sea una hipótesis universal, es decir, supondremos que $0 < p_1 < 1$ y que $0 < p_2 < 1$. Si $p_1 = p_2$ las dos hipótesis son idénticas y no hay elección posible, de modo que vamos a suponer que una de estas probabilidades es mayor que la otra: admitamos por comodidad, que p_1 es la mayor. Entonces estas hipótesis son lógicamente excluyentes, o sea, que no pueden ser ambas verdaderas. Supongamos que sabemos que son también exhaustivas, es decir, que no pueden ser ambas falsas: esto no puede ser un conocimiento lógico, sino que es de presumir que hayamos llegado a ello como resultado de conocimientos empíricos, por ejemplo, que la bolsa de la que extraigamos bolas contenga o una proporción p_1 o una proporción p_2 de bolas blancas, o que las plantas que estemos examinando tengan una razón de genes que dé lugar a una probabilidad p_1 de poseer cierta característica o una razón de genes que dé lugar a una probabilidad p_2 de poseerla, no estando permitida ninguna otra posibilidad por el sistema deductivo mendeliano que hayamos aceptado. Supongamos, por fin, que, además de saber que la probabilidad tiene solamente estos valores posibles, lo único que sepamos en este asunto es que se haya examinado un conjunto de n miembros de β y se haya encontrado que contenía exactamente s miembros de α. Entonces, si hemos de elegir entre preferir la hipótesis H_1 a la H_2 o a la inversa, ¿cómo lo hemos de decidir? Es decir, ¿qué justificación racional existe para tal decisión?

En lugar de estudiar la cuestión en general voy a hacerlo en un caso numérico sencillo. Supongamos que $p_1 = 3/5 = 0{,}6$ y que $p_2 = 3/10 = 0{,}3$. (Hemos elegido estos valores, tras muchos experimentos mentales, de modo que la representación geométrica que voy a utilizar tenga una figura apropiada, y asimismo de modo que los valores de las probabilidades —derivadas de p_1 y p_2— que necesitemos sean múltiplos de $\frac{1}{100}$ y puedan expresarse, por tanto, de forma muy cómoda, en tantos por ciento o por medio de fracciones decima-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

les de dos cifras significativas.) Supongamos luego que el número n de casos que hayamos examinado de β sea dos: ello puede hacer que todo el problema parezca ridículo, pues puede preguntarse cómo será posible tomar una decisión racional basándose en una muestra tan pequeña. En realidad, sin embargo, se puede efectuar una decisión racional: este caso tan sencillo hace ver toda la lógica propia de este procedimiento, y no quiero que mis lectores tengan que hacer para seguirme más ejercicios aritméticos que los estrictamente necesarios. En los principios generales que vamos a proponer no hay nada que dependa de que las probabilidades de las hipótesis sean fracciones tan sencillas ni de que el número correspondiente a la muestra examinada sea tan pequeño. Mencionaremos una muestra más grande, de veinte casos, cuando la cuestión de su tamaño llegue a tener trascendencia.)

Sobre la base del conocimiento de una muestra de dos casos hay ocho maneras de decidir entre las dos hipótesis: ocho posibles «reglas de *decisión*» o «*estrategias de preferencia*» *, según se haya de preferir H_1 o H_2 si la muestra contiene 0, 1 ó 2 miembros de α. Las ordenaremos del modo que sigue (s es el número de miembros de α encontrados en la muestra):

T_1. Si $s = 0$, 1 ó 2, prefiérase H_1 (esto es, prefiérase siempre H_1).
T_2. Si $s = 1$ ó 2, prefiérase H_1; si $s = 0$, prefiérase H_2.
T_3. Si $s = 2$, prefiérase H_1; si $s = 0$ ó 1, prefiérase H_2.
T_4. Si $s = 0$, 1 ó 2, prefiérase H_2 (es decir, prefiérase siempre H_2).
T_5. Si $s = 0$, prefiérase H_1; si $s = 1$ ó 2, prefiérase H_2.
T_6. Si $s = 0$ ó 1, prefiérase H_1; si $s = 2$, prefiérase H_2.
T_7. Si $s = 0$ ó 2, prefiérase H_1; si $s = 1$, prefiérase H_2.
T_8. Si $s = 1$, prefiérase H_1; si $s = 0$ ó 2, prefiérase H_2.

Puesto que cada una de estas estrategias es completa, es decir, tiene en cuenta todas las razones que pueden encontrarse en la muestra, el problema con que nos enfrentamos es el de elegir la mejor estrategia por motivos racionalmente defendibles. Naturalmente, puede haber dos o más estrategias «óptimas», que sean igualmente buenas y mejores que ninguna otra; pero veremos que en nuestro ejemplo no ocurre tal cosa (salvo en casos extremos), de suerte que una estrategia óptima será la mejor. Por consiguiente, el problema es: ¿qué norma racional hay para elegir las estrategias óptimas?

Tenemos que calcular primero la probabilidad, para cada una de las ocho estrategias, de que prescriba la elección correcta en cada una de las dos hipótesis, o sea, la probabilidad de que si una hipótesis es

---

* Como veremos más adelante, a veces se reserva la palabra «estrategia» para otro concepto, y se utiliza en este caso la de «táctica».—*N. del T.*

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

verdadera la estrategia en cuestión prescriba que elijamos esa hipótesis. Por ejemplo, si H_1 es verdadera y seguimos la estrategia T_1, que prescribe que elijamos H_1 cualquiera que sea lo que hayamos encontrado en la muestra, esta estrategia prescribirá siempre una elección correcta, y su probabilidad de elección correcta supuesta la verdad de H_1 será el 100 por 100; pero si H_1 es falsa y la hipótesis verdadera es la H_2, esta estrategia no prescribirá nunca una elección que sea conforme a la verdad, ya que nos llevará siempre a elegir la hipótesis falsa, y su probabilidad de elección correcta supuesta la verdad de H_2 será el 0 por 100. La estrategia T_2 prescribirá unas veces la elección correcta cuando H_1 sea verdadera y H_2 falsa, y otras veces lo hará cuando H_2 sea verdadera y H_1 falsa; su probabilidad de elección correcta supuesta la verdad de H_2 es la probabilidad, dada H_2, de que un conjunto de dos miembros de β no contenga miembro alguno de α, que es ${}^2C_0\, p_2^0\, (1 - p_2)^2$, es decir, $1 \,.\, 1 \,.\, (7/10)^2$, que es el 49 por 100; y su probabilidad de elección correcta dada H_1 es la probabilidad, dada H_1, de que un conjunto de dos miembros de β contenga o bien uno o bien dos miembros de α, lo cual es la suma de la probabilidad de que el conjunto contenga un miembro de α y la de que contenga dos miembros de α; la primera de estas probabilidades es ${}^2C_1\, p_1^1\, (1 - p_1)^1$, esto es, $2 \,.\, 3/5 \,.\, 2/5$, que es el 48 por 100, y la segunda es ${}^2C_2\, p_1^2\, (1 - p_1)^0$, o sea $1 \,.\, (3/5)^2 \,.\, 1$, que es el 36 por 100; con lo cual su suma es el 84 por 100, que es la probabilidad, dada H_1, de elegir correctamente cuando se siga la estrategia T_2.

La fórmula que da la probabilidad de elección correcta para cada estrategia es $\Sigma\ {}^2C_s\, p^s\, (1 - p)^{2-s}$, siendo $p = 3/5$ o $3/10$, según tomemos la probabilidad sobre la base de que sea verdad H_1 o de que lo sea H_2, y en que la suma se extiende a los valores de s para los que la estrategia prescriba que se elija H_1 o H_2 (según sea el caso). En la tabla V damos el par de probabilidades de elección correcta, x_i, y_i

TABLA V. *Probabilidades de elección correcta*

Estrategia		Probabilidad de elección correcta dada H_1 (en %)	Probabilidad de elección correcta dada H_2 (en %)
T_i		y_i	x_i
T_1	(H_1 para $s = 0$, 1 y 2)	100	0
T_2	(H_1 para $s = 1$ y 2; H_2 para $s = 0$)	84	49
T_3	(H_1 para $s = 2$; H_2 para $s = 0$ y 1)	36	91
T_4	(H_2 para $s = 0$, 1 y 2)	0	100
T_5	(H_1 para $s = 0$; H_2 para $s = 1$ y 2)	16	51
T_6	(H_1 para $s = 0$ y 1; H_2 para $s = 2$)	64	9
T_7	(H_1 para $s = 0$ y 2; H_2 para $s = 1$)	52	42
T_8	(H_1 para $s = 1$; H_2 para $s = 0$ y 2)	48	58

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

(expresadas en tanto por ciento) para cada una de las ocho estrategias, que se han calculado mediante esta fórmula.

Necesitamos también, para cada una de las ocho estrategias, la probabilidad de que se prescriba una elección incorrecta en cada una de las dos hipótesis, esto es, la probabilidad de que, si una de las hipótesis es la verdadera, la estrategia en cuestión prescriba precisamente que no se la elija. Puesto que elegir una hipótesis y no elegirla son, en las condiciones de nuestro problema, posibilidades excluyentes y exhaustivas, las probabilidades de que con la estrategia T_i se haga una elección incorrecta si H_1 es verdadera o si H_2 es verdadera son, respectivamente, $1 - x_i$ o $1 - y_i$, siendo x_i e y_i las probabilidades de elección correcta en esa estrategia dadas, respectivamente, la verdad de la primera y la verdad de la segunda hipótesis. Por consiguiente, podemos calcular a partir de la tabla V, por ejemplo, la probabilidad de que se elija incorrectamente con la estrategia T_3 dada la hipótesis H_1: que será $1 - \frac{33}{100}$, es decir, el 64 por 100.

En este punto es cuando tenemos que introducir las consideraciones de valor. Supongamos que si H_1 es verdadera gano a unidades de valor (utilidad, contento, eudemonía, alegría o lo que se quiera) al elegir H_1 —y, por supuesto, al actuar de acuerdo con mi elección—, pero que si H_1 es falsa pierdo b unidades de valor al elegir H_1; supongamos también que gano c unidades de valor si elijo H_2 siendo H_2 verdadera y que pierdo d unidades eligiendo H_2 cuando H_2 sea falsa. Puesto que hemos tenido en cuenta separadamente las pérdidas y las ganancias, ninguno de los números a, b, c ni d será negativo; y, con esta sola restricción, pueden ser cualesquiera números racionales, lo mismo enteros que fraccionarios [5]. Los estadísticos matemáticos que han utilizado las medidas de valor al estudiar la inferencia estadística han tenido en cuenta solamente las pérdidas (por ejemplo, la «función ponderal» de Wald es una función no negativa que mide «la importancia relativa del error cometido al aceptar» una hipótesis siendo otra la verdadera [6], lo cual equivale a hacer $a = c = 0$. Como parece innecesariamnete lúgubre ocuparse de la inferencia estadística a base de minimizar las expectativas de pérdidas en vez de hacerlo a base de maximizar las expectativas de ganancias, y puesto que tener

[5] Esta restricción a los números racionales se necesita únicamente para la argumentación de las páginas 259 y sigs., pero, dado que la matematización de la teoría del valor no ha adelantado hasta el estadio de precisar números irracionales para las medidas de valor, parece preferible excluirlos desde un principio.

[6] *On the Principles of Statistical Inference*, pág. 40 [versión castellana citada, páginas 33 y sig.].

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

sólo en cuenta pérdidas o sólo ganancias entraña una restricción de la generalidad de las normas y pasar por alto una interesante posibilidad que ha de surgir, voy a emplear en mi exposición aquellas cuatro cantidades. Como es natural, lo único pertinente son sus razones mutuas, ya que la escala de valor carece de trascendencia; y, en realidad, haremos ver que lo que afecta a la elección de la estrategia son las dos relaciones numéricas entre estos cuatro números (entre los cuatro coeficientes o valores de utilidad).

Estas cuatro cantidades determinan la esperanza matemática de cada una de las ocho estrategias dada la verdad de cada una de las dos hipótesis. Supongamos que empleo la estrategia T_i. Si H_1 es verdadera, la probabilidad de que elija correctamente esta hipótesis es x_1, y la esperanza matemática de la ganancia que provenga de elegir H_1 siendo verdadera esta hipótesis es, según ello, ax_i; pero la probabilidad de elegir —incorrectamente— H_2 cuando realmente sea verdadera H_1 es $(1 - x_i)$, de modo que la esperanza matemática de una pérdida provinente de elegir H_2 no siendo verdadera esta hipótesis es $d(1 - x_1)$; por tanto, la esperanza matemática neta que nos otorga la estrategia T_i cuando H_1 es verdadera es $ax_i - d(1 - x_i)$. Si, por el contrario, la hipótesis verdadera es H_2, la esperanza matemática de obtener una ganancia en virtud de elegir correctamente H_2 siendo verdadera es cy_i, y la esperanza matemática de pérdida originada por una elección incorrecta de H_1 —que será falsa— es $b(1 - y_i)$, lo que da una esperanza matemática neta de $cy_i - b(1 - y_i)$. Si llamamos X_i e Y_i, respectivamente, a las esperanzas matemáticas de la estrategia T_i en el caso de que H_1 sea verdadera y en el de que H_2 sea verdadera, tenemos

$$X_i = ax_i - d(1 - x_i) = (a + d)\,x_i - d,$$
$$Y_i = cy_i - b(1 - y_i) = (b + c)\,y_i - b.$$

Vemos que X_i depende sólo de los valores de x_i, a y d, y que Y_i sólo de los de y_i, b y c. Para valores dados de a, b, c y d es posible calcular este par de esperanzas matemáticas a partir de la tabla de probabilidades de elección correcta; por ejemplo,

$$X_2 = (a + d)\frac{84}{100} - d, \qquad Y_2 = (b + c)\frac{49}{100} - b.$$

En el caso más sencillo, en que $b = d = 0$ y $a = c$, que es aquél en que no contamos con pérdida ninguna si elegimos una hipótesis falsa y en que contamos con la misma ganancia cualquiera que sea la hipótesis que elijamos, con tal de que sea verdadera, las dieciséis esperanzas matemáticas son proporcionales a las correspondientes probabili-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

dades de elección correcta; y como sus valores absolutos carecen de importancia, pueden suponerse iguales a éstas.

El punto esencial es que con este método de cálculo encontramos un par de números para cada estrategia T_i, X_i e Y_i, tales que el primero mida la esperanza matemática, dada la verdad de H_1, que nos otorguen las elecciones prescritas por T_i, y el segundo la esperanza matemática, dada la verdad de H_2, que nos otorguen estas mismas elecciones. Las relaciones existentes entre estos dieciséis números forman la base de las normas «prudenciales» para escoger una estrategia óptima.

Las normas «prudenciales»

Propongo las siguientes normas racionales para escoger estrategias óptimas. *Primer paso:* de cada par de números que representen las dos esperanzas matemáticas de una estrategia elíjase el menor, y si los dos son iguales, elíjase ese número; tenemos así ocho números, uno por estrategia. *Segundo paso*: elíjase el mayor de todos estos números; la estrategia que se ha de considerar óptima será la correspondiente a tal número, y ésa será la que haya de ponerse en práctica.

Puede ocurrir que no haya un número único que sea el mayor de todos, sino que dos o más sean iguales entre sí y mayores que cualesquiera otros; en este caso se necesita un *tercer paso:* elíjase como estrategia óptima, de entre todas las que correspondan a tales máximos iguales, aquélla para la cual la otra esperanza matemática sea mayor; y si dos o más tienen el mismo máximo para esta otra esperanza matemática, constituirán estrategias igualmente óptimas [7].

Con objeto de dar un ejemplo de estas normas de selección de estrategias echemos un vistazo a la tabla V de probabilidades de elección correcta (pág. 230) y consideremos que los números allí estampados correspondan a las esperanzas matemáticas respectivas (lo cual, como hemos visto, es lo que acontece cuando $b = d = 0$ y $a = c$). De acuerdo con las normas, el primer paso consiste en mirar los números que haya en cada fila y elegir el mínimo (o un mínimo si am-

[7] En realidad, esto no ocurre nunca con las esperanzas matemáticas derivadas de las probabilidades de elección correcta para dos hipótesis en alternativa, a menos que se tenga $a = b = c = d = 0$; luego, excepto para este caso, habrá siempre una estrategia óptima única si seguimos unas normas prudenciales.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

bos son iguales)[8]: encontramos el 0 por 100 de la fila de T_1, el 49 por 100 de la de T_2, el 36 por 100 de la de T_3, y así sucesivamente hasta llegar al 48 por 100 de la fila de T_8; el segundo paso nos hace buscar el número máximo entre estos ocho, que es el 49 por 100, y adoptar como estrategia óptima aquélla en cuya fila se encuentre dicho máximo, que es, en nuestro caso, la T_2.

Si en la fila de T_8 hubiésemos tenido el 49 por 100 en lugar del 48 por 100 habríamos contado con dos máximos iguales; entonces hubiera sido preciso el tercer paso, el de comparar los otros números de estas dos filas; pero en la de T_8 este otro número es el 58 por 100, mientras que en la de T_2 es el 84 por 100, de modo que también en este caso habría que seguir prefiriendo la estrategia T_2.

Cuando no hay estas igualdades que complican las cosas cabe expresar estas normas sucintamente diciendo que consisten en elegir la estrategia cuya esperanza matemática mínima —del par de ellas que le corresponda— sea la máxima entre todas las estrategias posibles, o, todavía más brevemente, diciendo que se trata de la norma de *maximizar la esperanza matemática mínima*. Wald describe, a la inversa, su norma, que es análoga a ésta, como la de minimizar el riesgo máximo, y la llama «método minimax»; yo llamaría de un modo parecido a mis normas, expresadas positivamente, las «normas maximin» y a las estrategias corespondientes las «estrategias maximin»; pero prefiero designar estas estrategias y las normas que las prescriben con el apelativo de «prudenciales», ya que su rasgo característico reside en que manifiestan la virtud cardinal de la prudencia.

Pues, ¿a qué resultado llegaremos siguiendo las normas prudenciales?: al de protegernos cuanto sea posible frente a los caprichos de la Naturaleza. Si elegimos una estrategia distinta de la óptima desde el punto de vista prudencial podemos cosechar un beneficio mucho mayor, pero exactamente lo mismo podemos quedar en una situación mucho peor. Así, en el caso en que $b = d = 0$ y $a = c$ (de modo que las esperanzas matemáticas corespondan a los números registrados en la tabla V), si hubiésemos elegido la estrategia T_3 en vez de la T_2 podríamos haber mejorado nuestras perspectivas si H_2 fuese verdadera (habríamos pasado de 49 por 100 a 91 por 100), pero las habríamos empeorado si H_1 lo fuese (pasando de 84 por 100 a 36 por 100); y como las condiciones de nuestro problema son tales que carecemos enteramente de toda base para preferir una de las hipótesis a la otra

[8] Emplearemos siempre «mínimo» y «máximo» en un sentido que no implique unicidad, de suerte que, por ejemplo, diremos que 50 es un mínimo (y asimismo un máximo) de la pareja de números 50, 50.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

excepto la proporcionada por la muestra de dos casos, elegir T_3 en lugar de T_2 hubiera sido confiar en la buena suerte: sería efecto de un golpe de suerte, y no de una previsión nuestra, que consiguiéramos más con T_3 que con T_2, de modo que la elección de aquella estrategia en una ocasión concreta podría ser afortunada, pero seguiría siendo imprudente. Al emplear T_2 y, por tanto, elegir la hipótesis H_1 cuando encontrásemos uno o dos ejemplares de α en nuestra muestra binaria de β, y la hipótesis H_2 cuando no encontrásemos ejemplares de α en dicha muestra, conseguimos el máximo posible coherente con nuestra completa ignorancia de lo que esté haciendo la Naturaleza —completa salvo por la información que ésta nos haya proporcionado en la muestra observada.

Sería muy apresurado mantener que al emplear las normas prudenciales para elegir entre hipótesis estaríamos utilizando las normas que en todos los casos sería más razonable utilizar: los criterios para determinar cuál sea la actuación más razonable son muy variados, y la prudencia es solamente uno de ellos; pero si concedemos que ser prudente es un modo de ser razonable, las normas que sean más prudentes serán las más racionales en las circunstancias en que actuar del modo más razonable sea actuar del modo más prudente. La lógica de la prudencia que la teoría de «las normas prudenciales» nos proporciona constituirá, pues, una parte —cuya importancia no es cosa que competa decidir al lógico— del fundamento racional de la actuación racional.

Relación con la teoría de los juegos de Von Neumann

Es muy fácil caer en un lenguaje antropomórfico —como me ha ocurrido a mí— al describir las normas prudenciales y hablar, por tanto, como si estuviéramos haciendo todo lo posible por conseguir el mayor provecho mientras una Naturaleza personificada estuviera haciendo todo lo posible por lograr que fracasáramos. Sin embargo, esta metáfora es, en realidad, excelente por muchos conceptos; y podemos sacar gran partido de una consideración de este problema en que hagamos una analogía con cómo sería razonable conducirse si estuviéramos jugando a cierto juego teniendo por adversario a la Naturaleza. La lógica de los juegos ha sido objeto de un trabajo muy notable de John von Neumann, que ha elaborado una teoría completa de las normas racionales para jugar en un «juego bipersonal de suma

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

cero» general, que es análogo al problema que nos ocupa [9]. (Un juego de esta índole es aquél en que haya dos jugadores que jueguen uno contra otro y en que la pérdida o la ganancia que experimente cada uno de ellos sea igual respectivamente a la ganancia o la pérdida que experimente el otro.) Von Neumann ha mostrado que todo juego de este tipo, por complicado que sea (por ejemplo, el ajedrez) y por mucho que el azar pueda entrar en él (por ejemplo, el *póker* entre dos), se puede reducir teoréticamente a una «forma normalizada» en la que cada jugador tiene que hacer una jugada y sólo una, y ha de hacerla en completa ignorancia de cómo jugará su adversario; el «resultado» del juego para el jugador *A* es función de dos variables independientes, una de ellas la jugada que hace él mismo y la otra la jugada del jugador *B*, y es la cantidad que recibirá *A* si él y su adversario ejecutan dichas jugadas. Como el juego es «de suma cero» el resultado del juego para el jugador *B* es igual a menos el resultado del mismo para el *A*; y si llamamos «puntuación» al resultado para el jugador *A*, vemos que el objeto de éste al escoger su jugada es maximizar la puntuación, mientras que el de *B* al elegir la suya es minimizarla: la puntuación es una resultante de dos jugadas, una de ellas en manos de *A* y la otra en las de *B*.

Si hay l jugadas posibles para el jugador *A* y m posibles para el *B*, habrá lm puntuaciones posibles (de las que varias pueden ser el mismo número), y cabe representar el juego mediante una tabla rectangular con las lm puntuaciones dispuestas en l filas y m columnas —puntuaciones prefijadas por las reglas del juego—. Entonces puede representarse el juego que le está permitido a *A* por su elección de una fila de la tabla, y el permitido a *B* por la suya de una columna de la misma, elecciones que han de hacerse de modo enteramente independiente; la puntuación del juego será el número que aparezca en el punto de cruce de la fila escogida por *A* y la columna escogida por *B*, y, por tanto, *A* tratará de elegir la fila de modo que maximice la puntuación y *B* de elegir la columna de modo que la minimice. Como dice Von Neumann, la característica de este «juego de la cuerda * especial» es que «no es un juego de la cuerda: los dos jugado-

[9] La solución de VON NEUMANN del juego general bipersonal de suma cero, publicada por primera vez en *Mathematische Annalen*, vol. 100 (1928), págs. 295 y sigs., está expuesta por JOHN VON NEUMANN y OSKAR MORGENSTERN en su *Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton, 1944), caps. II-IV (libro al que me referiré con la sigla *NM)*.

* Se trata del juego en que dos bandos tiran en sentidos opuestos de una cuerda, tratando cada uno de arrastrar al otro hacia su propio terreno.—*N. del T.*

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

res tienen intereses opuestos, pero los medios por los que tienen que defenderlos no están en oposición mutua» [10].

Consideremos, por ejemplo, esta forma rectangular de representación de un juego en el que *A* tenga ocho jugadas posibles (esto es, ocho filas de donde elegir) y *B* dos jugadas posibles (o sea, dos columnas a su elección), y supongamos que las reglas del juego determinen que los números de las jugadas sean los de la tabla VI. Mirando esta tabla resulta evidente (y Von Neumann lo ha demostrado rigurosamente en el caso general de que haya un número finito cualquiera de filas y de columnas) que si *A* elige la fila de acuerdo con la norma de escoger aquélla que contenga el máximo de todos los mínimos de las filas —es decir, si elige la segunda fila, cuyo mínimo, —2, es mayor que todo mínimo de cualquier otra fila—, la puntuación que conseguirá tener no será inferior a este número (en nuestro caso, —2), cualquiera que sea la columna que elija su adversario. En caso de que, por ejemplo, escogiese la primera fila, lograría más si *B* eligiese la primera columna, pero perdería más si *B* eligiese la segunda columna; si supiese que *B* habría de elegir la primera columna obraría sensatamente escogiendo la primera fila (y, en realidad, sería estúpido que escogiese cualquier otra), pero las condiciones del juego impiden que sepa tal cosa, y, por consiguiente, al elegir la jugada de escoger la segunda fila, *A* conseguirá evitar una puntuación inferior a —2, ya que no puede evitar que la puntuación sea menor que en otros casos: así maximizará su ganancia mínima.

TABLA VI

Posibilidades de elección de *A*	Posibilidades de elección de *B*	
	100	— 100
	68	— 2
	— 28	82
	— 100	100
	— 68	2
	28	— 82
	4	— 16
	— 4	16

Presentemos la cosa de otra forma. Las condiciones del juego (esto es, los número de la tabla rectangular) impiden que *A* pierda más de 100

[10] *NM*, § 14.1.3.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

ni gane más de 100, cualesquiera que sean las jugadas que hagan A y B; pero también determinan que si A juega prudencialmente, escogiendo la columna que contiene el máximo de todos los mínimos de fila, no puede perder más de 2. El efecto que produce una norma prudencial de juego es reducir la parte inferior de la gama de sus puntuaciones posibles; también lleva consigo normalmente el efecto de reducir la parte superior, pero ello no puede evitarse si lo que A pretende es maximizar su puntuación cualquiera que sea la manera de jugar de B.

Esta norma prudencial de jugar en un juego bipersonal de suma cero es exactamente la misma, en lo que respecta al método de elección, que la norma prudencial que hemos expuesto para elegir una estrategia mediante la cual se prefiera una hipótesis estadística a otra: esta última norma de elección corresponde a la norma prudencial, para jugar en un juego del tipo indicado, en que el jugador B (correspondiente a la Naturaleza) pueda elegir sólo dos jugadas posibles y el jugador A (que corresponde al científico) puede elegir entre 2^{n+1} jugadas posibles, siendo n el número de la muestra observada. El juego que hemos presentado en la tabla VI corresponde al problema de la elección entre nuestras hipótesis H_1 (con $p_1 = 3/5$) y H_2 (con $p_2 = 3/10$) basándose en la observación de dos casos y siendo $a = b = c = d$, esto es, cuando contamos con ganar la misma cantidad cualquiera que sea la hipótesis que elijamos, con tal de que sea verdadera, y con perder esa misma cantidad si elegimos la hipótesis que sea falsa. En general, podemos tratar todo problema de elección entre m hipótesis estadísticas en alternativa, $H_1, H_2, \ldots, H_m$, sobre la base de la observación de n casos, por analogía con un juego bipersonal de suma cero en el que el jugador A (el científico) pueda elegir entre m^{n+1} jugadas posibles y el jugador B (la Naturaleza) pueda hacerlo entre m jugadas posibles, y podemos emplear cualesquiera métodos matemáticos o resultados de Von Neumann que nos puedan ser útiles.

Sin embargo, le está bien a un filósofo ser cauto con las analogías: para proseguirlas hasta el fondo tiene que ver que no exista diferencia material pertinente que se halle oculta bajo un parecido formal. Ahora bien, existen dos diferencias palmarias entre elegir una hipótesis de acuerdo con unas normas prudenciales y jugar un juego prudencialmente. La primera es más aparente que real: en el juego jugamos por puntos de dinero o de otra índole, mientras que en la elección de hipótesis pretendemos únicamente conseguir unas esperanzas matemáticas; pero tal consecución de un beneficio posible es en sí misma consecución de un beneficio: las esperanzas matemáticas son ellas mis-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

mas un beneficio. Y, en realidad, las esperanzas matemáticas constituyen frecuentemente bienes negociables en el mercado: los billetes de lotería, que son títulos (en sentido legal) de esperanzas matemáticas, se compran y venden, y pueden utilizarse perfectamente como puntos para puestas de juegos, con lo que el resultado del juego correspondiente sería exactamente comparable en este respecto al de una elección entre hipótesis.

Pero la segunda diferencia parece a primera vista ser tan grande que nos impediría utilizar seriamente esta analogía. En un juego bipersonal de suma cero el objeto que persigue el jugador *A* es maximizar la puntuación pese a los esfuerzos que pueda hacer el jugador *B* para minimizarla —los intereses de este último son directamente opuestos a los de aquél, y tratará de batir su estrategia—; y el rasgo más atractivo, *prima facie*, de las normas prudenciales para jugar en semejante juego es que, al seguirlas, *A* puede conseguir siempre una puntuación no inferior a una dada, por mucho que *B* sepa acerca de cómo vaya a jugar *A*. Al presentar de este modo las normas prudenciales parece que las intenciones o lo que sepa *B* son pertinentes en cuanto a cómo deba jugar *A*; y si lo fueran, la analogía entre el juego bipersonal de suma cero y el problema de la elección entre hipótesis estadísticas sería crasamente engañosa, a menos que quisiéramos suponer por parte de la Naturaleza un deseo permanente de batir nuestras finalidades (o, al menos, las de los científicos); y, acaso, que estuviéramos asimismo dispuestos a conceder la posibilidad de que la Naturaleza supiese de antemano qué hipótesis íbamos a elegir y reajustase sus leyes de suerte que batiese nuestras finalidades cuanto le fuera posible. Al parecer, en el artículo en que hizo notar por primera vez el parecido entre su teoría de la inferencia estadística y la teoría de los juegos de Von Neumann, Wald pensaba que era necesario hacer tal suposición [11]. A mi entender esto es un error de comprensión. Para que sea racional el que *A* juegue de acuerdo con las normas pru-

[11] Voy a hacer una cita de su artículo, acomodando algunos de sus términos a los utilizados por mí: «Desde luego, no podemos decir que la Naturaleza quiera [minimizar la puntuación]. Sin embargo, si el [científico] se encuentra en una ignorancia completa con respecto a la elección de la Naturaleza, tal vez no sea irrazonable basar la teoría de una elección adecuada de [una estrategia para decidir entre hipótesis estadísticas] en el supuesto de que la Naturaleza quiera [minimizar la puntuación]. En este supuesto un problema de inferencia estadística se convierte en idéntico a un juego bipersonal de suma cero» *(Annals of Mathematics,* segunda serie, vol. 46 (1945), página 279; las palabras entre paréntesis cuadrados son las que he modificado). [En su libro *Statistical Decision Functions*, pág. 27, Wald ha añadido a un pasaje expuesto en términos parecidos el siguiente párrafo matizador: «incluso si no se está dispuesto a tomar esta actitud, la teoría de los juegos sigue teniendo una importancia

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

denciales es preciso que quiera conseguir una puntuación lo más alta posible y que sea incapaz de saber de antemano cómo jugará su adversario, pero no necesita hacer suposiciones de ninguna clase acerca de las intenciones de su adversario, *B* (si es que tiene alguna), ni de lo que sepa (si es que sabe algo): las normas prudenciales cuentan con que *B* juegue de un modo puramente aleatorio, o con que trate de conseguir que *A* gane, lo mismo que cuentan con que *B* averigüe de antemano cómo va a jugar *A* y elija su jugada de forma que la ganancia de éste sea lo menor posible. Lo que aboga en favor de las normas prudenciales es simplemente el hecho —que depende sólo de las propiedades aritméticas de los máximos y los mínimos— de que si se hace una jugada prudencial (o una de las jugadas prudenciales, en caso de que haya más de una) se logra una puntuación, cualquiera que sea el modo de jugar del adversario, no inferior a la que podría conseguirse mediante una jugada cualquiera no prudencial —cualquiera que sea el modo de jugar del adversario [12].

Planteemos el asunto con precisión. Sea v el máximo de todos los mínimos de fila de la tabla rectangular; entonces, si *A* elige la fila en que esté incluido v —o una de las filas en que esté incluido, si lo está en más de una—, logrará una puntuación no inferior a v cualquiera que sea la columna que *B* elija; y si *A* elige una fila cualquiera que no contenga v, será falso que logre una puntuación no inferior a v cualquiera que sea la columna elegida por *B*: esto es, habrá alguna columna tal que si *B* la elige la puntuación de *A* será inferior a v. Enunciando la cuestión de esta forma es claro que lo que entra en cuestión son meramente las posibilidades que queden a disposición de *B*; y la forma en que este jugador haga una discriminación entre tales posibilidades es algo que no entra en juego al defender la causa de las normas prudenciales.

Así pues, cuando se miran los principios que gobiernan la elección entre las hipótesis estadísticas como equivalentes a los principios del mejor modo que tenga el científico de jugar en un juego contra la Naturaleza, no se atribuye a ésta ni voluntad ni conocimiento si las normas de jugar —como ocurre con las prudenciales— están determinadas por la totalidad de posibilidades a disposición del adver-

fundamental para el problema de las decisiones estadísticas», ya que el aparato matemático de la primera puede transferirse a este último.]

[12] Aun cuando Von Neumann habla en varios lugares de las intenciones y conocimientos del adversario deja completamente en claro que en la forma definitiva de su solución no entra hipótesis alguna en cuanto a la «racionalidad» de aquél: véase *NM*, §§ 15.8.3 y 17.8.2.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

sario; y utilizaremos sin vacilación, por tanto, la analogía del juego jugado por el científico contra la Naturaleza siempre que tal analogía sea útil.

Representación geométrica de las normas prudenciales

Las normas prudenciales para escoger entre las dos hipótesis estadísticas H_1 y H_2 se basan en una asignación previa de valores numéricos a a, b, c y d —que son las pérdidas y ganancias que resultan al elegir una u otra de estas hipótesis según cuál sea verdadera y cuál sea falsa—; y para ver exactamente el modo que tienen estos valores de afectar las estrategias de elección hemos de examinar ahora cómo cambia la estrategia prudencial al cambiar dichos valores. Para hacerlo es conveniente utilizar una representación geométrica sencilla de las estrategias posibles; representación que nos permitirá resolver geométricamente el problema de máximos y mínimos, que presentará, incidentalmente, la ventaja de hacer que podamos descubrir intuitivamente la posibilidad de una modificación de la estrategia prudencial, y mediante la cual en muchos casos seremos aún más independientes de los caprichos de la Naturaleza.

Representemos las ocho estrategias posibles de elección entre H_1 y H_2 —sobre la base de un conjunto de dos observaciones— mediante ocho puntos cuyas coordenadas x e y sean, respectivamente, los valores de x_i y de y_i dados en la tabla V de probabilidades de elección correcta (pág. 230). Todos estos puntos se encuentran dentro del cuadrado unidad de la figura 10 (en la pág. 282): el punto que representa la estrategia T_1 es (1, 0), y constituye el ángulo inferior derecho del cuadrado; el que representa T_2 es (0,84, 0,49), etc.; y en esta figura el punto que representa la estrategia T_i ($i = 1, 2, \ldots, 8$) está señalado con T_i, pues no inducirá a confusión ninguna que utilicemos el mismo símbolo para una estrategia y para el punto que la represente. Como vemos, los seis puntos T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 y T_6 constituyen los vértices de un hexágono convexo cuyos vértices primero y cuarto —T_1 y T_4— se encuentran sobre el ángulo inferior derecho y el superior izquierdo, respectivamente —los seis lados de este hexágono tienen pendiente de izquierda a derecha—, mientras que los otros dos puntos, T_7 y T_8, se encuentran dentro del hexágono. Los ocho

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

puntos están centrados simétricamente alrededor del centro del cuadrado[13].

Tracemos ahora la recta representada por la ecuación

$$(a + d)\, x - d = (b + c)\, y - b,$$

en la que a, b, c y d sean los coeficientes de utilidad (ninguno de los cuales es negativo); a esta ecuación la llamaremos *ecuación de utilidad*, y a la recta correspondiente *línea de utilidad*. Vamos a ver que las normas prudenciales para seleccionar una estrategia están representadas por las relaciones geométricas existentes entre los puntos de las estrategias y la línea de utilidad.

Si a, b, c y d son cero, la ecuación de utilidad se convierte en la identidad $0 = 0$, y no existe, en absoluto, línea de utilidad.

Si $b + c = 0$ (es decir, si $b = 0$ y $c = 0$), pero $a + d$ es positiva, la ecuación de utilidad se reduce a $x = d/(a + d)$ y la línea de utilidad es vertical; si $d = 0$, se trata del lado izquierdo del cuadrado, si $a = 0$ es su lado derecho, y en los demás casos divide al cuadrado en dos regiones.

Si $b + c$ y $a + d$ son positivos, la línea de utilidad tiene una pendiente de derecha a izquierda (ya que su pendiente, $(a + d)/(b + c)$, es positiva), que corta al eje vertical en el punto $y = (b - d)/(b + c)$, el cual se encuentra situado por debajo del ángulo superior derecho —a menos que $c = d = 0$, en cuyo caso pasará por tal ángulo—; también corta dicha línea al eje horizontal en el punto $x = (d - b)/(a + d)$, que se encuentra a la izquierda del ángulo inferior derecho a menos que $a = b = 0$, en cuyo caso pasará por dicho ángulo. Por consiguiente, la línea de utilidad divide el cuadrado en dos regiones, excepto en cualquiera de los casos de que sean $a = b = 0$ o $c = d = 0$.

En la figura 10 se ven las partes situadas sobre el cuadrado, o en su interior, de ocho líneas de utilidad: el lado izquierdo del cuadrado (para $b = c = d = 0$), el lado superior del mismo (para $a = c = d = 0$), su lado derecho (para $a = b = c = 0$), su lado inferior (para $a = b = d = 0$), la diagonal ascendente, U_1 (para $a = c$ y $b = d$), la línea marcada con U_2 (para $a + d = 2(b + c)$ y $b = d$), la marcada con U_3 (para $a + d = 2(b + c) = 4(d - b)$) y la marcada con U_4, que no utilizaremos hasta la pág. 252 y que corresponde a $a + d = 11(b + c)/26 = 55(b - d)/49$.

Para simplificar la exposición prescindiremos por el momento de

[13] No haremos uso de esta última propiedad en nuestro estudio.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

los casos —excepcionales— en que la línea de utilidad sea vertical u horizontal y en que pase por un ángulo del cuadrado sin cortar éste; supondremos, por tanto, o bien que a y c son positivos o bien que b y d lo son, lo cual nos garantizará que la línea de utilidad sea siempre ascendente y divida al cuadrado en dos regiones. Llamaremos *región superior* a la que incluya el ángulo superior izquierdo, y *región inferior* a la que incluya el ángulo inferior derecho (ambas con referencia a la línea de utilidad).

Puesto que la ecuación de utilidad

$$(a + d)\,x - d = (b + c)\,y - b,$$

especifica la línea de utilidad, la región superior contendrá todos los puntos (x, y) del cuadrado para los que

$$(a + d)\,x - d < (b + c)\,y - b,$$

y la inferior todos los puntos (x, y) del mismo para los que

$$(a + d)\,x - d > (b + c)\,y - b.$$

Pero la esperanza matemática que otorga —dada la verdad de H_1— el empleo de la estrategia T_i es

$$X_i = (a + d)\,x - d_i,$$

y la que otorga la estrategia T_i dada la verdad de H_2 es

$$Y_i = (b + c)\,y_i - b_i.$$

De aquí que X_i sea menor que Y_i si y sólo si el punto de la estrategia T_i se encuentra en la región superior, y que X_i sea mayor que Y_i si y sólo si T_i se encuentra en la región inferior. Así pues, la línea de utilidad vale para separar las estrategias para las que la esperanza matemática dada la verdad de H_1 sea menor que la esperanza matemática dada la verdad de H_2, de las estrategias en que ocurra lo contrario, y, por tanto, de cada pareja de esperanzas matemáticas la mínima será X_i en el caso de las estrategias T_i cuyo punto representativo (x_i, y_i) se encuentre en la región superior, y será Y_j en el caso de las estrategias T_j cuyo punto representativo (x_j, y_j) se encuentre en la región inferior. Al dividir el cuadrado en dos regiones por medio de la línea de utilidad hemos dado el primer paso en la aplicación de las normas prudenciales —el de elegir el valor mínimo de cada fila—. (En la figura 10 los puntos representativos de las estrategias T_3, T_4, T_5 y T_8 caen en la región superior y los de las estrategias T_1, T_2, T_6 y T_7 en la inferior, tanto para la línea de utilidad U_1 como para la U_3; mientras que con respecto a la línea U_2 los puntos T_3, T_4 y T_5 se encuentran en la región superior y los T_1, T_2, T_6, T_7 y T_8 en la inferior.)

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

El segundo paso de las normas prudenciales es el de descubrir cuál de estos valores mínimos es el mayor. Dado que

$$(a + d)\, x_i - d > (a + d)\, x_j - d$$

si y sólo si $x_i > x_j$, de las parejas de esperanzas matemáticas correspondientes a estrategias cuyos puntos representativos se encuentren en la región superior, el mayor de sus valores mínimos es $(a + d)$ $x_1 - d$, siendo x_1 la coordenada del punto representativo de una estrategia, (x_1, y_1), que se encuentre más a la derecha en la región superior. Análogamente, puesto que $(b + c)y_i - b > (b + c)y_j - b$ si y sólo si $y_i > y_j$, de los pares de esperanzas matemáticas correspondientes a estrategias cuyos puntos representativos se encuentren en la región inferior, el mayor de sus valores mínimos será $(b + c)y_2 - b$, siendo y_2 la coordenada y del punto representativo de una estrategia, (x_2, y_2), que se encuentre más alto en la región inferior. Por consiguiente, la elección ha quedado restringida a dos puntos representativos de estrategias: (x_1, y_1) en la región superior y (x_2, y_2) en la inferior. (En la figura 10 los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son, respectivamente, T_8 y T_2 tanto para la línea de utilidad U_1 como la U_3, y son, respectivamente, T_3 y T_8 para la U_2.) Bajemos ahora una perpendicular al eje horizontal desde (x_1, y_1), y sea (x_1, y'_1) el punto en que esta vertical corte a la línea de utilidad; entonces,

$$(a + d)\, x_1 - d = (b + c)\, y'_1 - b,$$

y $\quad (a + d)\, x_1 - d > (b + c)\, y_2 - b$

si y sólo si $\quad (b + c)\, y'_1 - b > (b + c)\, y_2 - b.$

Pero $\quad (b + c)\, y'_1 - b > (b + c)\, y_2 - b$

si y sólo si $y'_1 > y_2$. Análogamente,

$$(a + d)\, x_1 - d < (b + c)\, y_2 - b$$

si y sólo si $y'_1 < y_2$. De modo que lo único que tenemos que hacer es comparar la altura del punto correspondiente a una estrategia (x_2, y_2) con respecto al eje horizontal con la altura con respecto al mismo eje del punto (x_1, y'_1), en que la perpendicular bajada desde el punto representativo de una estrategia (x_1, y_1) hasta este eje corte a la línea de utilidad: si el primer punto está más alto que el segundo ha de elegirse la estrategia cuyo punto representativo sea (x_2, y_2), y si está más bajo ha de elegirse la representada por el punto (x_1, y_1). (Aplicando esta técnica a la figura 10 encontramos que, si la línea de utilidad es U_1, hemos de elegir la estrategia T_2 [14], si esta línea es U_2, la

[14] En la figura 10, el punto (0,48, 0,48), en que la perpendicular bajada desde T_8 corta a U_1, es justamente apreciable como un poco más bajo que T_2 (0,84, 0,49).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

estrategia que hay que elegir es la T_3, y si la línea es U_3, la estrategia a elegir es T_2.)

Si los dos puntos, (x_2, y_2) y (x_1, y'_1), están a la misma altura sobre el eje horizontal, se requiere el tercer paso de comparar $(a + d)x_2 - d$ con $(b + c)y_1 - b$. Ello puede hacerse geométricamente, bajando una perpendicular desde (x_2, y_2) al eje horizontal y prolongándola hacia arriba hasta que encuentre a la línea de utilidad en el punto (x_2, y'_2); entonces, como

$$(a + d)\, x_2 - d = (b + c)\, y'_2 - b,$$

$(a + d)x_2 - d$ será mayor o menor que $(b + c)y_1 - b$ según sea y'_2 mayor o menor que y_1 [15].

Hasta ahora no hemos considerado el caso de que el punto correspondiente a una estrategia T_i se encuentre precisamente sobre la línea de utilidad (como ocurre en la figura 10 con T_8, que está en U_4); en caso de que ocurra tal cosa las dos esperanzas matemáticas de esta estrategia serán iguales, y cada una será un mínimo del par que constituyan; mínimo que será mayor que el correspondiente a cualquier otra estrategia si T_i se encuentra a la derecha del punto representativo de una estrategia, T_j, que esté situado más a la derecha de entre todos los que se hallen en la región superior, y más arriba que el punto representativo de una estrategia, T_k, que esté situado más arriba de entre todos los que se hallen en la región inferior. Si se cumplen estas dos condiciones es preciso elegir T_i, y si no se cumplen habrá que adoptar en lugar suyo o T_j o T_k (para elegir entre las cuales puede emplearse el método de bajar la perpendicular).

Estamos ahora en situación de estudiar cuántas asignaciones distintas de valores de utilidad, a, b, c y d, afectan la selección de la estrategia prudencial. Si empezamos con un conjunto de valores de utilidad, lo más sencillo es encontrar el máximo de los mínimos de las parejas de esperanzas matemáticas construyendo y examinando una tabla rectangular de éstas en vez de utilizar el método geométrico. Y aunque cabe modificar este último para que puedan tratarse con él los casos excepcionales que hemos excluido al exponerlo, es más sencillo resolverlos directamente por medio de tablas rectangulares,

---

[15] No se necesita el tercer paso con ninguna de las líneas de utilidad U_1, U_2 ni U_3 de la figura 10. Pero en el caso de que, con U_1, las coordenadas de T_8 hubiesen sido (0,49, 0,58) en lugar de (0,48, 0,58), sí hubiera sido preciso, ya que la perpendicular bajada desde T_8 hubiese cortado a U_1 en el punto (0,49, 0,49), cuya altura sobre el eje horizontal es igual que la de T_2 (0,84, 0,49); y el tercer paso hubiese valido para seleccionar la estrategia T_2, puesto que la perpendicular bajada desde T_2 corta a U_1 en el punto (0,84, 0,84) y $0{,}84 > 0{,}49$.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

ya que las estrategias que se seleccionan entonces no dependen de los valores exactos de las utilidades, sino de que éstas valgan cero o no.

Si construimos las tablas rectangulares correspondientes a estos casos excepcionales encontramos los resultados dados en la tabla VII. En todos estos casos la elección de hipótesis es enteramente independiente del resultado de cualquier observación sobre el conjunto de dos casos (en realidad, de cualquier número de ellos): si los valores de utilidad constituyen uno de los casos excepcionales no tiene objeto que hagamos observación alguna, ya que la elección prudencial de la hipótesis está resuelta de antemano. Ello puede parecer sorprendente, pero la sorpresa se desvanece si atendemos a las estrategias prudenciales apropiadas para los casos excepcionales.

Si $a = b = c = d = 0$, nos es absolutamente indiferente cuál de las hipótesis sea verdadera y cuál sea falsa, y las normas prudenciales no nos proporcionan criterio alguno para preferir una a otra: de modo que no satisfacen la curiosidad ociosa. Tal cosa puede escandalizar a los filósofos intelectualistas, pero está muy de acuerdo con el sano pragmatismo del sentido común. Y en el lenguaje de los juegos se trata de un caso de «si no hay puestas no hay juego».

Si $b = c = 0$, pero al menos uno de los dos valores a y d es positivo, o bien contamos con ganar eligiendo H_1 si ésta es verdadera o con

TABLA VII. *Resumen de casos excepcionales*

Caso excepcional	Posición de la línea de utilidad en el cuadrado	Estrategia prudencial
$a=b=c=d=0$	Sin línea de utilidad	Todas las estrategias son igualmente prudenciales
$a>0,\ b=c=d=0$	Lado izquierdo	T_1, o sea, prefiérase siempre H_1
$b>0,\ a=c=d=0$	Lado superior	T_4, o sea, prefiérase siempre H_2
$c>0,\ a=b=d=0$	Lado inferior	T_4, o sea, prefiérase siempre H_2
$d>0,\ a=b=c=0$	Lado derecho	T_1, o sea, prefiérase siempre H_1
$a>0,\ b>0,\ c=d=0$	Pasa por el ángulo superior izquierdo	T_4, o sea, prefiérase siempre H_2
$c>0,\ d>0,\ a=b=0$	Pasa por el ángulo inferior derecho	T_1, o sea, prefiérase siempre H_1
$a>0,\ d>0,\ b=c=0$	Vertical	T_1, o sea, prefiérase siempre H_1
$b>0,\ c>0,\ a=d=0$	Horizontal	T_4, o sea, prefiérase siempre H_2

perder eligiendo H_2 si ésta es falsa (esto es, dejando de elegir H_1 cuando ésta sea verdadera); mientras que no contamos con ganar ni perder nada eligiendo ni dejando de elegir H_2 en caso de que esta hipótesis sea verdadera. Si H_1 es verdadera tenemos siempre ventajas al elegirla, pero si H_2 es verdadera no sacamos nada con su elección: así, la elección de H_1 es un caso de «si salen caras, ganas, y si salen cruces no pierdes», de suerte que la estrategia prudencial de elegir

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

siempre H_1 está de acuerdo con el sentido común. De modo parecido, si $a = d = 0$, pero al menos uno de los dos valores b y c es positivo, ofrece siempre ventajas la elección de H_2.

Decir que al menos uno de los valores a o d sea positivo equivale a decir que $a + d$ sea positiva; pero es conveniente dar un nombre a esta cantidad, y, en el habla vulgar de la Bolsa, le llamaré el valor de la *opción* si H_1 es verdadera o, brevemente, la *opción de* H_1 *verdadera;* puesto que ello es con lo que cuento beneficiarme al elegir correctamente, y no incorrectamente, si H_1 es verdadera [16]. Con lo que las normas prudenciales de los tres últimos casos pueden expresarse diciendo: si sólo hay una opción positiva elíjase la hipótesis que la tenga, y si ninguna opción es positiva es indiferente lo que se escoja.

Si $c = d = 0$, pero tanto a como b son positivos, no contamos con ganar ni perder nada eligiendo H_2, mientras que eligiendo H_1 contamos con ganar si esta hipótesis es verdadera y con perder si es falsa. En este caso la estrategia prudencial consiste en elegir siempre H_2; ello parece paradójico, pero debe recordarse que la finalidad de las normas prudenciales es la de buscar lo más seguro, y que si se elije siempre H_2 no sufriremos nunca una pérdida.

Análogamente, si $a = b = 0$, pero tanto c como d son siempre positivos, la norma prudencial es la de impedir toda pérdida posible eligiendo siempre H_1.

Con lo cual hemos acabado con todos los casos excepcionales. En los demás, la estrategia prudencial apropiada a una asignación determinada de valores de utilidad depende de cuáles sean exactamente éstos; y el método geométrico nos permitirá ver con la mayor facilidad el modo de variar de la estrategia prudencial oportuna al variar a, b, c y d. Al prescindir de los casos excepcionales suponemos que, o bien tanto a como c son positivos, o bien lo son tanto b como d; lo cual garantiza que la línea de utilidad cortará al cuadrado y no será nunca ni vertical ni horizontal.

Hasta ahora hemos operado con cuatro valores de utilidad que entraban separadametne en la ecuación

$$(a + d)\,x - d = (b + c)\,y - b.$$

Pero ahora que $b + c$ está sujeta a la restricción de ser mayor que cero es conveniente, para interpretar los resultados, que dividamos

[16] Llamaremos a la cantidad $b + c$, análogamente, la *opción de H_2 verdadera.*

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

por esta cantidad y empleemos la ecuación que sigue, equivalente a la anterior,

$$y = \frac{a+d}{b+c}\,x + \frac{b-d}{b+c}.$$

Esta forma de expresión hace ver claramente que al variar a, b, c y d la línea de utilidad y la estrategia prudencial que está determinada por ella dependen sólo de los dos parámetros $(a + d)/(b + c)$ y $(b - d)/$ $/(b + c)$[17]. El primero es la razón existente entre la opción de H_1 verdadera y la de H_2 verdadera, mientras que la segunda es la razón entre $b - d$ y esta última opción; pero $b - d$ es la diferencia entre la pérdida que se experimente por haber elegido incorrectamente H_1 y la que se experimente por haber elegido incorrectamente H_2, de modo que la llamaremos (algo arbitrariamente) la *disparidad de castigos*. Con lo cual la posición de la línea de utilidad depende de dos números, que son las razones entre estas tres cantidades, la opción de H_1 verdadera, la de H_2 verdadera y la disparidad de castigos.

En la figura 10 la línea de utilidad U_1 —la diagonal ascendente del cuadrado— representa el caso en el que las dos opciones son iguales y en que la disparidad de castigos es cero; la estrategia prudencial correspondiente es T_2, o sea, la de preferir H_1 a H_2 si el conjunto observado de dos ejemplares de β contiene o bien uno o bien dos ejemplares de α, pero preferir H_2 a H_1 si el conjunto observado no contiene ejemplares de α. Si repasamos el método de calcular la estrategia prudencial observamos que ésta (T_2) será prudencial para un conjunto de dos observaciones siempre que $p_2 < 1/2 < p_1$ y que $p_1 - 1/2 < 1/2 - p_2$.

Supongamos ahora que a, b, c y d varíen de modo que la razón de la opción de H_1 verdadera a la de H_2 verdadera suba hasta 2 : 1, mientras que la disparidad de castigos permanezca siendo cero. Entonces la línea de utilidad girará a izquierdas alrededor del ángulo inferior izquierdo del cuadrado hasta convertirse en la línea U_2, y la estrategia prudencial que haya de elegirse ahora será T_3, esto es, la de preferir H_1 a H_2 si y sólo si existen dos ejemplares de α en el conjunto observado. El efecto producido por el aumento relativo de la

17 Si la ecuación se hubiese pasado a otras formas equivalentes a ella cuando $b + c > 0$ y $a + d > 0$, por ejemplo, a

$$1 - x = -\frac{b+c}{a+d}\,y + \frac{a+b}{a+d},$$

habría aparecido un par de parámetros diferentes, pero que serían funciones de $(a + d)/(b + c)$ y $(b - d)/(b + c)$.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

opción de H_1 verdadera es el de disminuir el número de ocasiones en que sería prudencial escoger H_1; lo cual puede parecer sorprendente, pero es comprensible, pues un incremento relativo de la opción de H_1 verdadera convierte en relativamente arriesgado preferir H_1 a H_2, y la finalidad de las normas prudenciales es la de evitar los riesgos innecesarios.

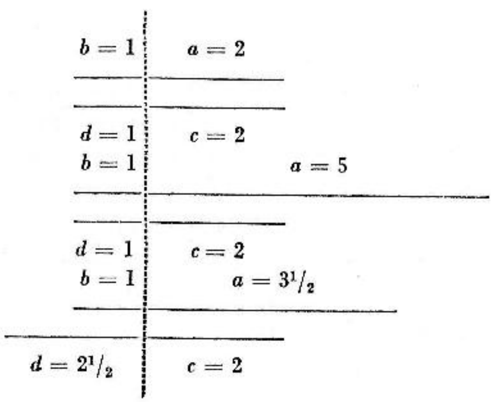
Pasemos a la suposición de que a, b, c y d vuelvan a variar de tal forma que se mantenga en el valor 2 : 1 la razón de la opción de H_1 verdadera a la de H_2 verdadera, pero que la disparidad de castigos decrezca hasta el punto de que su razón a la opción de H_2 verdadera llegue a valer $-\frac{1}{2} : 1$. Entonces, la línea de utilidad, conservándose paralela a sí misma, se desplazará de izquierda a derecha (realizará, pues, un «desplazamiento paralelo») hasta convertirse en la línea U_3, y la estrategia prudencial volverá a ser T_2, es decir, la de preferir H_1 a H_2 a menos que el conjunto observado de dos ejemplares de β no contenga ningún ejemplar de α. En este caso, el aumento de riesgo al crecer H_1, debido al aumento relativo de la opción de H_1 verdadera, queda contrapesado por el incremento del castigo que se padecerá si se elige incorrectamente H_2 comparado con el que sufrirá si se elige incorrectamente H_1.

En el diagrama que sigue pueden verse esquemáticamente las relaciones existentes entre los valores de utilidad en una forma sencilla de estos tres casos; hemos tomado en él para b la unidad de valor y para c el valor $2b$, por lo cual tanto b como $c = 2b$ son constantes en las tres figuras.

U_1. $a + d = b + c$, $b = d$
(que lleva a la estrategia T_2)

U_2. $a + d = 2(b + c)$, $b = d$
(que lleva a la estrategia T_3)

U_3. $a + d = 2(b + c)$,
$b - d = -\frac{1}{2}(b + c)$
(que lleva a la estrategia T_2)



Puesto que cualquier recta de un plano puede transformarse en otra cualquiera del mismo plano combinando (en uno u otro orden) una rotación alrededor de un punto fijo del plano con un desplaza-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

miento paralelo dentro del mismo en una dirección fija, cualquier línea de utilidad puede quedar convertida en cualquier otra por modificación sucesiva de la razón de la opción de H_1 verdadera a la de H_2 verdadera y de la razón de la disparidad de castigos a esta última opción, como hemos hecho en el ejemplo. Lo mismo Wald que los demás estadísticos matemáticos que han empleado en sus trabajos sobre la inferencia estadística lo que yo he llamado valores de utilidad han tenido únicamente en cuenta las pérdidas que se sufrirían al aceptar hipótesis falsas; lo cual equivale, en mi terminología, a suponer $a = c = 0$; y, en la figura 10, a parar sólo mientes en las líneas de utilidad que pasen por el ángulo superior derecho del cuadrado[18]. A mi juicio, esta restricción no produce efectos restrictivos sobre los principios de inferencia estadística que han elaborado, e incluso es sumamente conveniente cuando el número n del conjunto de casos observados es grande, ya que entonces los vértices superiores del polígono se acercan a los lados superior y derecho del cuadrado (en la figura 10 hemos dibujado con línea de puntos cinco lados del polígono correspondiente a $n = 20$); pero al estudiar del modo más general posible un caso sencillísimo, que es lo que estamos haciendo aquí, importa advertir que las líneas de utilidad tienen un grado de libertad mucho mayor de lo que las toleran quienes las constriñen a ser o la diagonal ascendente del cuadrado o las líneas que se obtienen haciendo girar esta diagonal alrededor de sus extremos.

Las estrategias oportunas

Las estrategias prudenciales que eran oportunas cuando las líneas de utilidad eran las que hemos empleado en el ejemplo gráfico han sido las T_2 y T_3. La primera de ellas prescribe que se elija la hipótesis H_1 si y sólo si, o bien se encuentra un ejemplar de α en la muestra binaria, o bien se encuentran dos; y la segunda, que se elija H_1 si y sólo si se encuentran en dicha muestra dos ejemplares de este tipo. Ambas prescriben, pues, la elección de un número comprendido entre 0 y 1 inclusive (1/2 en el caso de T_2, 1 en el deT_3) tal que se elija H_1 si y sólo si la razón en α del conjunto observado no es inferior al mismo; de modo parecido, T_1 prescribe para dicho número el valor 0; y T_4, T_5 y T_6 prescriben la adopción de cierto número —que, respectivamente, vale 0, 1/2 y 1— tal que haya de elegirse H_2

[18] La línea de utilidad se reduce a $-d(1-x) = -b(1-y)$.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

si y sólo si la razón en α no es inferior a él. Por consiguiente, los seis puntos representativos de estrategias que se encuentran sobre el hexágono representan la elección de H_2 o de H_1 (o bien de H_1 o de H_2), según sea la razón en α observada inferior o no a cierto número; de forma que representan elecciones *prima facie* plausibles: pues esperamos basar nuestra elección de una o de otra hipótesis en esta razón observada. Pero estas seis estrategias no son las únicas lógicamente posibles: hay dos más —T_7 y T_8— que no vinculan la elección de una hipótesis con el que la razón observada sea mayor o menor que un número prefijado: la estrategia T_7 nos invita a elegir H_1 en las dos situaciones extremas en que, o bien no haya ejemplares de α en el conjunto de los dos casos, o bien haya dos, y a elegir H_2 en la situación intermedia, en que se encuentre exactamente un ejemplar de α en dicho conjunto; y la estrategia T_8 prescribe la actuación inversa. Ahora bien, estas estrategias resultan a primera vista implausibles; y si las normas prudenciales nos llevaran siempre a seleccionar una de ellas, tal cosa constituiría una poderosa razón para no aceptar las normas prudenciales como método racional de seleccionar las estrategias óptimas.

Es fácil ver que las normas prudenciales no escogerán nunca T_7: pues cada una de las probabilidades de elección correcta propias de esta estrategia (52 por 100 y 42 por 100) es inferior a la correspondiente a la elección correcta respectiva en la estrategia T_2 (84 por 100 y 49 por 100), de manera que no conseguiríamos ninguna ventaja prefiriendo T_7 a T_2; por emplear los términos de Wald, T_2 es «uniformemente mejor» que T_7, de suerte que esta última no es «admisible». Y por razones análogas no es tampoco admisible ninguna de las estrategias cuyos puntos representativos sean los vértices inferiores del hexágono, o sea, ni T_5 ni T_6.

Pero no existe estrategia que sea uniformemente mejor que T_8, es decir, no hay ninguna tal que sus probabilidades de elección correcta sean mayores o iguales que las probabilidades correspondientes de elección correcta de T_8 (48 por 100 y 58 por 100). Por tanto, esta estrategia es admisible, y habrá atribuciones de valores de utilidad que la conviertan en la estrategia prudencial; en realidad, en los ejemplos de líneas de utilidad que hemos puesto se escapa por muy poco de ser seleccionada como tal: si se hace girar la línea de utilidad U_1 —la diagonal ascendente— a izquierdas, alrededor del ángulo inferior izquierdo del cuadrado, un ángulo muy pequeño (menos de dos grados), que es lo que se necesita para que su pendiente suba de 1 a

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

más de $\frac{49}{48}$ (esto es, para que $(a + d)/(b + c)$ pase de 1 a más de $\frac{49}{48}$, permaneciendo b igual a d), la estrategia prudencial deja de ser T_2 y se convierte en T_8; y continúa siendo esta última mientras la línea continúe girando, hasta el momento en que su pendiente se haga mayor que $\frac{58}{36}$ —pues entonces la estrategia prudencial es T_3—. También se producirá un cambio de estrategia parecido, de T_2 a T_3 pasando por T_8, si la línea U_1 (y lo mismo ocurrirá con la U_3) se desplaza paralelamente a sí misma hacia la izquierda.

Hemos trazado la línea escalonada de puntos de la figura 10 para mostrar de qué modo depende la estrategia prescrita por las normas prudenciales de los valores de utilidad, a, b, c y d. Empezaremos por la derecha. Cualquier línea de utilidad que, o bien corte el lado del hexágono que va de $T_1(1, 0)$ a $T_2(0{,}84, 0{,}49)$, o corte la línea de puntos horizontal que parte de T_2 hacia la izquierda —desde este punto hasta el (0,48, 0,49) inclusive—, determina como estrategia prudencial la T_2; cualquier línea de utilidad que corte, o bien la línea vertical de puntos que va de (0,48, 0,49) a $T_8(0{,}48, 0{,}58)$, o bien la línea horizontal de puntos que parte de T_8 —desde este punto hasta el (0,36, 0,58) inclusive—, determina como estrategia prudencial la T_8, y cualquier línea de utilidad que, o bien corte la línea vertical de puntos que corre hacia arriba de (0,36, 0,58) a T_3 (0,36, 0,91), o bien corte el lado del hexágono que une T_3 con T_4 (0, 1), determina como estrategia prudencial la T_3. Mas puesto que toda línea de utilidad que corte el cuadrado y no sea vertical ni horizontal corta la quebrada T_1-T_2-línea escalonada-T_3-T_4 una vez y sólo una, toda asignación de valores de utilidad, a, b, c y d, en que o bien a y c sean positivos o bien b y d lo sean, selecciona una y sólo una de las tres estrategias T_2, T_3 y T_8 [19]. Todo lo cual se sigue de los razonamientos sobre los que se ha establecido el método geométrico de seleccionar estrategias.

Así pues, nos encontramos en la desafortunada situación de que, de acuerdo con las normas prudenciales, una atribución de valores de utilidad que dé lugar a una línea de utilidad que cruce el cuadrado entre los puntos (0,36, 0,58) y (0,48, 0,49) —por ejemplo, U_4— convertirá en prudencial la estrategia de escoger H_2 si no hay ejemplares de α en un conjunto de dos ejemplares de β, de escoger H_1 si se encuentra en este conjunto un ejemplar de α y de escoger H_2 si lo

[19] Todas las estrategias admisibles (esto es, T_1, T_2, T_3, T_4 y T_8) se encuentran sobre esta línea quebrada.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

que se encuentra es dos ejemplares de α. Mas una estrategia que prescriba unas elecciones tan arbitrarias no puede tener pretensiones de ser razonable, y si el seguir unas normas prudenciales prescribe la utilización de una estrategia tan «antojadiza», tanto peor para la pretensión que ostentan tales normas de ser racionales.

Acaso se piense que la dificultad procede de haber elegido un número muy pequeño (a saber, 2) para el número n de casos observados: tal vez T_8 deba su posibilidad de colocarse entre las estrategias admisibles a que los puntos representativos de las estrategias T_2 y T_3 estén tan separados, pues al aumentar n los puntos de estrategias que forman los vértices superiores del polígono se juntan entre sí, con lo que quizá se hagan inadmisibles todas las estrategias antojadizas.

Ahora bien, es cierto que al crecer n estos puntos de la parte de arriba del polígono se encontrarán más cerca unos de otros: así, en la figura 10 hemos marcado, en las proximidades del ángulo superior derecho, los seis puntos representativos de estrategias P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12} y P_{13}, que corresponden a seis estrategias para $n = 20$ (el resto de los puntos representativos de estrategias de la parte alta del polígono están tan arrimadas al lado superior del cuadrado, o a su lado derecho, que son irrepresentables en un diagrama a pequeña escala)[20]. Mas para cualquier n dado existen 2^{n+1} puntos representativos de estrategias, de los cuales habrá $2n + 2$ que se encuentren sobre el polígono de $2n + 2$ lados en el que están incluidos todos aquellos puntos, de forma que habrá $2^{n+1} - (2n + 2)$ puntos que representarán estrategias de antojos; y aun cuando la mayoría de éstas serán inadmisibles, quedarán algunas suficientemente cerca de la parte superior de este polígono para ser admisibles, que determinarán estrategias prudenciales para unos conjuntos apropiados de valores de utilidad. Además, incluso si esta dificultad no surgiese con un valor elevado de n, estamos buscando un procedimiento racional para el caso de que $n = 2$, y sería sumamente sorprendente que las normas prudenciales fueran razonables para alguna o algunas de las líneas de utilidad, pero no para todas; de suerte que, aunque para n grande no existiesen puntos correspondientes a estrategias antojadizas pero admisibles, su existencia con un n pequeño seguiría siendo paradójica.

---

[20] En la nota al pie de la página 267 damos sus probabilidades de elección correcta (es decir, las coordenadas de estos puntos representativos de estrategias).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Introducción de estrategias aleatorizadas

Existe, con todo, una manera enormemente ingeniosa de salir de esta dificultad, gracias a un método que convierte en inadmisibles todas las estrategias antojadizas. Ello se consigue considerando un nuevo género de estrategia posible, género que no habíamos tenido en cuenta al enumerar las ocho estrategias posibles para $n = 2$, que proviene de la teoría de juegos de Von Neumann y que Wald ha empleado en sus trabajos más recientes sobre la inferencia estadística. Mas puesto que yo lo voy a introducir para resolver la paradoja de la estrategia antojadiza —de que no se ocupaban ni Von Neumann ni Wald— lo expondré de modo independiente.

El mejor modo de hacer tal cosa es permitirse soñar despierto un poco. Consideremos una línea de utilidad concreta cualquiera que determine que la estrategia prudencial es T_8; y dado que la paradoja aparece para toda línea de este tipo, adoptaré el caso que haga más sencilla mi exposición, que es la línea U_4, que pasa por T_8 y por el punto R (que está situado en el punto de la línea T_2T_3 en que ésta interseca con la diagonal ascendente, U_1) [21]. Supongamos ahora que existiese una nueva estrategia posible a la que correspondiese el punto R, y llamémosle, como a su punto representativo, R; la pareja de esperanzas matemáticas de esta estrategia, R, estaría constituida por dos valores iguales, como ocurre con T_8, ya que tanto R como T_8 se encuentran sobre la línea de utilidad U_4; y como las dos esperanzas matemáticas de R tendrían que ser mayores que las correspondientes a T_8, R sería «uniformemente mejor» que T_8, y esta última estrategia dejaría de ser admisible. Entonces, la estrategia prudencial determinada por la línea de utilidad se convertiría en esta nueva estrategia, R; y, por tanto, si existiese ésta y no fuera una estrategia antojadiza, la paradoja quedaría resuelta.

Retrocedamos ahora un poco y veamos cómo funciona exactamente una norma prudencial. Cada una de las ocho estrategias antiguas prescribe la elección de una u otra de las hipótesis bajo ciertas condiciones observables, y la que era prudencial era aquélla de entre estas ocho cuya pareja de esperanzas matemáticas incluía el valor máximo de los ocho mínimos de esperanzas matemáticas (uno por pareja de éstas, o sea por estrategia); se seleccionaba tal estrategia

---

21 U_4 está dada por $\dfrac{a+d}{b+c} = \dfrac{11}{26}, \dfrac{b-d}{b+c} = \dfrac{49}{130}$.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

prudencial merced a estar determinada por tales dieciséis esperanzas matemáticas, y derivábamos la defensa de la causa del carácter razonable de las normas prudenciales extrayéndola del carácter razonable de basar nuestras acciones en el principio general de que hemos de intentar la maximización de las esperanzas matemáticas de la utilidad de sus consecuencias; pero este último carácter no reposa en el hecho de que cualquier acción concreta que realicemos de acuerdo con este principio nos vaya a reportar consecuencias que tengan más utilidad que otra acción que se ajuste a otro principio, sino en el hecho estadístico —es decir, en la verdad de la hipótesis estadística— de que si actuamos cierto número de veces de acuerdo con semejante principio general ello nos producirá, a la larga, una utilidad mayor que el mismo número de actuaciones llevadas a cabo siguiendo otro principio distinto. E, igualmente, el carácter razonable de una estrategia que las normas prudenciales hayan elegido debe ser de naturaleza estadística: lo que aboga por elegir T_2 en vez de T_3 como estrategia óptima cuando la línea de utilidad se encuentra por encima de la diagonal U_1 es que si empleamos la estrategia T_2 para ejecutar cierto número de elecciones entre H_1 y H_2, entre H'_1 y H'_2, etc., basándonos en muestras binarias (siendo H_1, H'_1, etc., aserciones de que los valores de las probabilidades de que se ocupan son todos iguales a 3/5, H_2, H'_2, etc., aserciones de que los valores de las probabilidades de que se ocupan son todos iguales a 3/10, y siendo los conjuntos de valores de utilidades para cada pareja H_1 y H_2, H'_1 y H'_2, etcétera, tales que determinen como línea de utilidad la diagonal ascendente), nos conduciremos a la larga de forma más prudente que si empleamos T_3 para realizar cada elección de éstas.

Pero el hecho de que la razón para utilizar una estrategia prudencial sea estadística, y se apoye en el efecto global de emplearla cierto número de veces, deja abierta la posibilidad de que pueda ser razonable *no emplear siempre la misma estrategia, sino unas veces una y otras veces otra.* Supongamos, por ejemplo, que decidamos utilizar en unas ocasiones la estrategia T_2 y en otras la T_3, y que decidamos resolver cuándo hemos de emplear una y cuándo otra barajando bien y sacando una carta de un mazo de dieciocho naipes que contenga once *piques* y siete corazones, y empleando T_2 o T_3, respectivamente, según saquemos *pique* o corazón. Dada la verdad de H_1, la probabilidad de que hagamos una elección correcta con esta estrategia «mixta» se obtiene multiplicando la probabilidad —dada H_1— de una elección correcta con T_2 (que es 0,84) por la probabilidad de sacar *pique* (que

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

vale $\frac{11}{18}$), multiplicando la probabilidad —dada H_1— de una elección correcta con T_3 (0,36) por la de sacar corazón ($\frac{7}{18}$) y sumando estos dos productos; lo cual nos da el resultado 0,6533. Un cálculo análogo nos dará la probabilidad de que elijamos correctamente con esta estrategia mixta dada la verdad de H_2, que es $\frac{11}{18} \cdot 0{,}49 + \frac{7}{18} \cdot 0{,}91 = 0{,}6533$. Y el punto representativo de esta estrategia es el (0,6533, 0,6533), que es el R con que habíamos soñado despiertos, o sea, aquél en que la línea T_2T_3 corta a la diagonal ascendente, U_1. De forma que si nos toleramos la utilización de estrategias mixtas la paradoja queda resuelta: R se convierte en un punto representativo de una estrategia y su presencia hace inadmisible a T_3 como estrategia prudencial.

Von Neumann introdujo en su teoría de los juegos bipersonales de suma cero las estrategias obtenidas combinando las estrategias «básicas» por medio de una «máquina azarosa» apropiada, dispuesta de tal modo que la probabilidad de utilización de cada una de las estrategias básicas en una ocasión cualquiera tuviese por valor un número prefijado, y las llamó «estrategias mixtas» por oposición a las «estrategias puras» de que se componen. Yo seguiré a Wald y a los demás estadísticos matemáticos que las han utilizado y las llamaré, como ellos, *estrategias aleatorizadas*, ya que la aleatorización es la técnica —muy utilizada en los experimentos biológicos— de disponer las cosas deliberadamente de forma que las probabilidades de encontrarnoslas tengan por valores números definidos prefijados *. La noción de dispositivo para elegir una cosa «aleatoriamente» de entre varias es del dominio común: consiste en una disposición tal que haya la misma probabilidad de que elijamos una cosa cualquiera que cualquier otra, lo cual puede lograrse mediante artificios tales como el de barajar y sacar una carta de un mazo de ellas; en cuanto a elegir una cosa de entre otras muchas «aleatorizadamente», se trata de la noción genérica de la cual forma un caso especial la elección «aleatoria» —el caso en que las probabilidades prefijadas en la aleatorización sean todas iguales entre sí—. Y quienquiera haya echado a cara o cruz alguna vez la elección en una alternativa de posibles decisiones —casarse o no, sacar o no el impermeable cuando no esté lloviendo o jugar o no la reina en el *whist*— ha empleado lo que Wald

* Como ya hemos indicado, algunos autores emplean el término «táctica» para lo que el autor llama «estrategia básica», y el de «estrategia» para lo que aquí se designa por «estrategia aleatorizada».—*N. del T.*

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

llama una «función aleatorizada de decisión», aun cuando normalmente *se lo colocará en un aprieto si se le pide que justifique su método* de aleatorización.

Sin embargo, el empleo de una estrategia aleatorizada para elegir entre dos hipótesis estadísticas parece ser un procedimiento extraño y, en lo que a su aspecto se refiere, irracional, pues entraña la elección, en ocasiones, de una hipótesis y, en ocasiones, de otra, acerca de datos iguales (en cuanto a las rasgos pertinentes): si cuando se encuentra uno un ejemplar de α en un conjunto de dos ejemplares de β es de alguna forma apropiado utilizar la estrategia T_2 y escoger H_1, ¿cómo podrá serlo utilizar la estrategia T_3 —y escoger H_2— en otra ocasión en que se encuentre un ejemplar de α en una muestra semejante a la anterior? Para responder a esta pregunta, que le sume a uno en confusiones, es preciso darse cuenta de lo que involucra una estrategia. Emplear la estrategia no aleatorizada (o, como la he llamado, *básica)* T_2 no es escoger una hipótesis en todas las ocasiones, sino escoger H_1 cuando el conjunto de dos ejemplares de β contenga, o bien uno o bien dos ejemplares de α, y escoger H_2 cuando no contenga ejemplares de α: la elección prescrita por una estrategia no es una prescripción universal para todos los casos (excepto con las estrategias extremas), sino una prescripción para elegir hipótesis distintas en condiciones distintas; y lo único que se hace al pasar de las estrategias básicas a las aleatorizadas es complicar estas condiciones. Puesto que la estrategia aleatorizada R está formada a partir de las básicas T_2 y T_3, prescribirán la misma elección de hipótesis que hacen estas últimas en los casos en que concuerdan en sus prescripciones, de modo que únicamente es necesario complicar las condiciones en el único caso en que discrepan: a saber, cuando en el conjunto de los dos ejemplares de β se encuentre exactamente un ejemplar de α. Al desenredar lo que prescribe la estrategia aleatorizada R encontramos que sus prescripciones son las siguientes: cuando el conjunto observado contenga dos ejemplares de α se ha de escoger la hipótesis H_1, cuando no contenga ningún ejemplar de α se ha de escoger la H_2, cuando contenga un ejemplar de α y se saque *pique* de un mazo barajado de naipes que contenga once *piques* y siete corazones se ha de escoger H_1, y cuando contenga un ejemplar de α y se saque corazón de dicho mazo se ha de escoger H_2. Así pues, las prescripciones de R son tan condicionales como lo son las de T_2; la única diferencia consiste en que la condición de encontrar un ejemplar de α se subdivide para R en dos subcondiciones: una de ellas es la conjunción de encontrar un ejemplar de α con el sacar *pique*, y la otra la

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

conjunción de encontrar un ejemplar de α con el sacar corazón. Y, por consiguiente, me parece que no queda involucrado ningún principio novedoso ni irracional en la introducción de estrategias aleatorizadas.

La «máquina azarosa» que he utilizado en mi exposición del procedimiento de aleatorización consiste en sacar una carta de un mazo bien barajado de naipes convenientemente elegidos; pero, como es natural, cualquier otra máquina azarosa debidamente preparada hubiera servido lo mismo —por ejemplo, una ruleta, una perinola o una tabla de «números aleatorios» [22]—: lo único que se exige es que haya un procedimiento para conceder una probabilidad especificada, p', al empleo de una de las estrategias básicas a partir de las cuales se forme la aleatorizada, y para conceder la probabilidad $1 - p'$ al empleo de la otra estrategia. Puede preguntarse si hay necesidad, en absoluto, de emplear semejante máquina: ¿no valdría lo mismo, en nuestro ejemplo, elegir H_1 once veces y H_2 siete veces de cada dieciocho que el conjunto observado de dos ejemplares de β contuviese un ejemplar de α? Ello no serviría para lo que se persigue: pues es esencial que la probabilidad de emplear una de las estrategias básicas, p', sea la misma en todas las ocasiones, y que sea independiente del número de veces que dicha estrategia básica se haya utilizado anteriormente; y asimismo es esencial que p' (la *probabilidad de mezcla*, según voy a llamarla) sea independiente del número de veces que se hayan encontrado las diversas razones en α en los conjuntos observados, ya que de otro modo no podría multiplicársela por la probabilidad de encontrar la razón en α que nos interesa con objeto de llegar a la probabilidad de la conjunción que se precisa para el cálculo de la elección correcta. Sólo es posible garantizar estas dos independencias utilizando una máquina azarosa cuyo funcionamiento carezca de toda relación con la verdad de las hipótesis bajo consideración.

Así pues, las estrategias aleatorizadas para la elección entre hipótesis estadísticas son, pese a su carácter a primera vista peculiar, perfectamente respetables consideradas lógicamente, y no hay razón alguna para no utilizarlas cuando tenga ventajas hacerlo. Y su empleo, aparte de resolver la paradoja de la existencia de estrategias antojadizas, presenta grandes ventajas: en lugar de tener solamente ocho estrategias posibles de juego, al valernos de las aleatorizadas conta-

[22] La «máquina azarosa» no necesita ser una máquina en sentido estricto (esto es, un artefacto) si se tiene a mano algún proceso natural (por ejemplo, la emisión de electrones por una sustancia radiactiva) que proporcione exactamente las probabilidades debidas.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

mos con un número ilimitado de estrategias posibles a nuestra disposición.

En el ejemplo de estrategia aleatorizada dado en las págs. 255 y sig. hemos elegido cuidadosamente las probabilidades de mezcla $\frac{11}{18}$ y $\frac{7}{18}$ para que el punto representativo de esta estrategia cayese sobre la intersección del lado T_2T_3 del hexágono con la diagonal ascendente U_1 [23]; pero eligiendo otra pareja cualquiera de fracciones p' y $1 - p'$ hubiésemos construido otra estrategia aleatorizada con su punto representativo en la línea T_2T_3 [24]; por tanto, eligiendo p' de un modo conveniente cabe construir una estrategia aleatorizada cuyo punto representativo sea un punto cualquiera racional de dicha línea, esto es, cualquier número cuyas coordenadas sean números racionales [25]; y existe un número ilimitado de estos números racionales, puesto que son, en lenguaje matemático, «densos por doquier»; es decir, cualquier punto de la línea tiene un número ilimitado de ellos en cualquier entorno suyo, por pequeño que sea. Como hemos supuesto que los valores de utilidad son números racionales, toda línea de utilidad que corte a la T_2T_3 lo hará en un punto que represente una estrategia aleatorizada posible [26].

De manera exactamente análoga puede formarse una estrategia aleatorizada a partir de las estrategias básicas T_1 y T_2 de tal forma que cualquier punto racional del lado T_1T_2 del hexágono sea su punto representativo, y otra estrategia aleatorizada a partir de las estrategias básicas T_3 y T_4 de forma que su punto representativo sea cualquier punto racional del lado T_3T_4 [27]. Dado que toda línea de utilidad que

---

[23] Estas probabilidades de mezcla son p' y $1 - p'$, estando dada p' por la ecuación $84p' + 36(1 - p') = 49p' + 91(1 - p')$.

[24] $p' = 1 - p' = 1/2$ nos da el punto representativo de una estrategia aleatorizada que se encuentra en la intersección de T_2T_3 con la línea de utilidad U_3.

[25] Es fácil introducir puntos irracionales representativos de estrategias aleatorizadas, si se necesitan, construyendo una cortadura de Dedekind; y se necesitarían si los valores de utilidad fuesen irracionales.

[26] Ello se apoya en el hecho de que todas las esperanzas matemáticas son funciones lineales, de suerte que no llegaremos a dificultades parecidas a la de la raíz cuadrada, que dio lugar al descubrimiento pitagórico de los números irracionales. Acerca de la importante parte desempeñada por la linealidad de la esperanza matemática véase *NM*, § 17.7.2.

[27] Análogamente, todo punto racional de la quebrada $T_4T_5T_6T_1$ puede ser un punto representativo de una estrategia aleatorizada; y podemos construir otros puntos de esta índole combinando tres estrategias básicas (mediante una máquina azarosa que otorgue probabilidades de mezcla prefijadas, p', p'' y $1 - p' - p''$), de tal suerte que todo punto racional dentro del hexágono puede ser un punto representativo de una estrategia aleatorizada; pero puesto que todas las estrategias aleatorizadas correspondientes serían inadmisibles no las necesito en mi argumentación.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

cruce el cuadrado corta la quebrada $T_1T_2T_3T_4$ en un punto y sólo en uno [28], cada una de ellas determinará un punto único representativo de estrategia, que representará una estrategia aleatorizada, a menos que sea o bien T_2 o bien T_3; entonces, todo punto situado por debajo de dicha quebrada se convertirá en inadmisible como punto representativo de una estrategia, y la paradoja de las estrategias antojadizas quedará resuelta: todos los puntos así representativos se encontrarán en la línea $T_1T_2T_3T_4$ y todo punto racional de esta línea será representativo de una estrategia admisible.

Tomemos ahora las normas prudenciales en un sentido más amplio, que comprenda la elección de una estrategia prudencial de entre todas las estrategias posibles, ya sean básicas o aleatorizadas. Si prescindimos de los casos excepcionales en los que o bien no haya estrategia prudencial o bien sea T_1 o T_4, la argumentación geométrica de la página 245 nos hará ver que la estrategia, R_i, cuyo punto representativo sea aquél en que la línea de utilidad U_1 interseque a la quebrada $T_1T_2T_3T_4$ es la estrategia prudencial correspondiente a la atribución de valores de utilidad, a_i, b_i, c_i y d_i, que vale para determinar U_i. En efecto, puesto que toda línea de utilidad (quitando los casos excepcionales) tiene una pendiente de derecha a izquierda y los tres segmentos de la quebrada $T_1T_2T_3T_4$ la tienen de izquierda a derecha, el punto representativo de estrategia R_i se encuentra a la derecha de todo punto de este tipo situado en la región superior de la línea de utilidad del caso, y más arriba de todo punto de este tipo situado en la región inferior de esta misma línea de utilidad; como el punto representativo de estrategia que representa la estrategia prudencial R_i está en la línea de utilidad U_i, la pareja correspondiente de esperanzas matemáticas estará formada por dos valores iguales, y si R_i es una estrategia aleatorizada, cada uno de éstos será mayor que el mínimo de cada una de las parejas de esperanzas matemáticas relativas a las estrategias básicas de que esté ella compuesta. Así pues siguiendo unas normas prudenciales, si empleamos estrategias aleatorizadas, lo menos que podemos ganar cualquiera que sea la manera de comportarse de la Naturaleza no es nunca menor que lo menos que podamos ganar si nos limitamos a estrategias básicas; en realidad, podemos ganar más, excepto en caso de que la estrategia prudencial misma sea una estrategia básica —lo cual ocurre solamente cuando el conjunto de valores de utilidad es uno de los excepcionales o cuando

[28] La proposición inversa no es verdadera: en la figura 10, U_1 y U_4 cortan a T_2T_3 en el punto R.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

la línea de utilidad determinada por él pase o bien por T_2 o bien por T_3.

El método geométrico de descubrir cuál sea la estrategia —aleatorizada o básica— que sea la prudencial para una asignación dada de valores de utilidad se convierte ahora en algo extremadamente sencillo. Consiste simplemente en trazar la línea de utilidad determinada por tal asignación de valores de utilidad y encontrar dónde corta a la línea quebrada $T_1T_2T_3T_4$: si el punto en que la corte, R', es o T_2 o T_3, la estrategia básica respectiva —T_2 o T_3— será la estrategia prudencial; si R' se encuentra entre T_2 y T_3, la estrategia prudencial es una estrategia aleatorizada que se obtiene combinando la utilización de la T_2 —con probabilidad p'— con la de la T_3 —con probabilidad $1 - p'$—, siendo p' la razón de la longitud de $R'T_3$ a la de T_2T_3 (todo lo que tenemos que hacer para habérnoslas con la probabilidad de mezcla, p', es preparar nuestra máquina azarosa (mazo de naipes, perinola, etc.) de manera que nos conceda esa probabilidad); análogamente, si R' se encuentra en el segmento T_1T_2 o en el T_3T_4, se obtiene la estrategia aleatorizada combinando las estrategias T_1 y T_2, o las T_3 y T_4, respectivamente, con probabilidades p' y $1 - p'$, siendo, p', respectivamente, la razón de la longitud de $R'T_2$ a la de T_1T_2 o la razón de la longitud de $R'T_4$ a la de T_3T_4[29].

Por tanto, la ampliación de las normas prudenciales con objeto de que incluyan estrategias aleatorizadas tienen dos grandes virtudes:

1) El hecho de que cualquier punto racional de la línea quebrada $T_1T_2T_3T_4$ pueda considerarse como un punto representativo de una estrategia posible convierte en inadmisibles todas las estrategias cuyos puntos representativos se encuentren por debajo de dicha línea, y resuelve así la paradoja de las estrategias antojadizas (éstas existen, pero no hay atribución alguna de valores de utilidad que haga ninguna de ellas una estrategia prudencial). Por plantear la cuestión positivamente: las estrategias representadas por los cuatro puntos T_1, T_2, T_3 y T_4

[29] Las coordenadas x' e y' del punto R', representativo de la estrategia prudencial, y la probabilidad p' se obtienen algebraicamente resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(a + d)\, x' - d = (b + c)\, y' - b \quad \text{(línea de utilidad)}$$

$$\frac{x_j - x'}{x_j - x_i} = \frac{y_j - y'}{y_j - y_i} = p' \qquad \text{(probabilidad de mezcla)}$$

en las que x_i, y_i, x_j e y_j son las coordenadas de los puntos representativos de las estrategias básicas permitidas más cercanas —por uno y otro lado— a la línea de utilidad. La pareja de esperanzas matemáticas (iguales) correspondientes a R' está formada por $(a + d)x' - d$ y $(b + c)y' - d$.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

son fundamentales en el sentido de que toda estrategia que sea prudencial para alguna atribución de valores de utilidad, o bien es una de ellas o bien es una estrategia aleatorizada obtenida a partir de T_1 y T_2, de T_2 y T_3 o de T_3 y T_4 mediante las oportunas probabilidades de mezcla.

2) Las dos esperanzas matemáticas de toda estrategia prudencial son iguales entre sí y mayores que la mínima de las dos correspondientes a la estrategia que hubiese sido la prudencial si no se hubiera permitido la utilización de estrategias aleatorizadas (a menos, naturalmente, que esta estrategia siguiera siendo prudencial incluso permitiendo las aleatorizadas).

Las estrategias aleatorizadas en la teoría de los juegos

Von Neumann introdujo las estrategias aleatorizadas en su teoría del juego general bipersonal de suma cero para hacer frente a una dificultad que le surgió al buscar una «solución» del juego que fuese, en un sentido indudable, «la mejor manera de jugar»[30]. En un juego en que no se utilicen estrategias aleatorizadas no es evidente que la mejor manera de jugar un jugador, *A*, sea la de seguir la norma prudencial de efectuar su jugada de tal modo que maximice la puntuación mínima que pueda conseguir: es la manera en que logrará sacar el máximo partido cualquiera que sea la jugada que haga su adversario *B* y, por consiguiente, la mejor norma que puede seguir si su adversario sabe de antemano cómo va a jugar y escoge su propia jugada de acuerdo con ello; pero no es evidente que sea la mejor manera de jugar que tenga si es capaz de «descubrir» cuál será la jugada de su adversario en la misma medida —o en mayor— en que éste lo sea de «descubrir» la suya propia[31]. Parece no haber posibilidad de dar una respuesta neta en cuanto a la mejor manera de jugar, ya que cada jugador tomará oportunamente en cuenta todo lo que pueda adivinar, o inferir, acerca de cuál será la jugada de su adversario, y cuanto

---

[30] Véase *NM*, § 14.2.

[31] Hay una importante clase de situaciones —las que Von Neumann llama «juegos estrictamente determinados»— en las que ninguno de los jugadores saca ventaja alguna de descubrir cuál será la jugada de su adversario; en ellos, pues, seguir unas normas prudenciales es en un sentido indudable «el mejor modo de jugar» que tiene cada jugador. Pero los juegos que constituyen los análogos de las elecciones entre hipótesis no están nunca «estrictamente determinados» —en el sentido original de esta expresión en Von Neumann (*NM*, § 14).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

pueda adivinar, o inferir, acerca de lo que éste adivine, o infiera, sobre su propia jugada.

Utilizando estrategias aleatorizadas cada jugador puede quedar a cubierto de que su adversario «descubra» cuál es su jugada: pues el jugador mismo no sabrá cuál va a ser su propia jugada, de forma que es imposible que la revele, ni directa ni indirectamente, a su adversario. Von Neumann ha demostrado de un modo formalizado, sin hacer referencia alguna a lo que sepan o dejen de saber los jugadores, que si se permiten las estrategias aleatorizadas el empleo de una de éstas que esté de acuerdo con las normas prudenciales es, en un sentido indudable, «la mejor manera de jugar» que tiene cada jugador.

Nosotros hemos introducido las estrategias aleatorizadas en la solución de nuestro problema inductivo por una razón muy distinta: no se trata de precavernos frente a que la Naturaleza «descubra» de antemano cuál de las dos hipótesis estadísticas tenemos intención de escoger, pues si personificásemos la Naturaleza hasta tal punto no se ve qué razones podríamos tener para no suponer que asimismo tuviese un conocimiento por anticipado de las probabilidades de mezcla que nuestra máquina azarosa iba a proporcionar; sino que las introducimos, primero, para eliminar de este modo la paradoja de la estrategia antojadiza, y segundo, para aumentar el máximo de las esperanzas matemáticas mínimas. Con el empleo de estrategias aleatorizadas las normas prudenciales pueden mejorar lo que son capaces de ofrecernos sin sacrificar su característico rasgo de prudencia.

Si pensamos en la cuestión al modo de la teoría de los juegos, como un juego contra la Naturaleza, surge inmediatamente la pregunta: ¿Qué ocurre si ésta utiliza también una estrategia aleatorizada? ¿Qué sucede si H_1 es una hipótesis verdadera en los $\frac{7}{15}$ de los casos y lo es H_2 en los $\frac{8}{15}$ de los casos en que elijamos entre ellas a base del número observado de ejemplares de α que haya en un conjunto de ejemplares de β (siendo aquellas fracciones las probabilidades de mezcla con que la Naturaleza tendría que componer H_1 con H_2 para conducirse prudencialmente)?[32]. Esta pregunta, así enunciada, es, desde luego, absurda: una hipótesis general, incluso si es estadística, no puede ser a veces verdadera y a veces falsa. Pero cabe formularla de nuevo preguntando acerca de una tercera hipótesis, H_3, y el mejor

[32] Las probabilidades de mezcla son q' y $1 - q'$, estando dada q' por la ecuación $84q' + 49(1 - q') = 36q' + 91(1 - q')$. Cf. las probabilidades de mezcla, p' y $1 - p'$, de la nota al pie de la página 259.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

modo de expresión en este caso hace referencia al modelo de una bolsa. Supongamos que en una bolsa grande haya quince bolsas pequeñas, cada una con diez bolas, y que en siete de las bolsas pequeñas seis de las bolas sean negras y cuatro blancas, mientras que en cada una de las ocho restantes bolsas pequeñas haya tres bolas negras y siete blancas. La hipótesis H_3 será aquélla según la cual las probabilidades de que se encuentren 0, 1 ó 2 ejemplares de α en un conjunto de dos ejemplares de β son las mismas que las probabilidades de que se extraigan 0, 1 ó 2 bolas negras cuando, primero, se extraiga una de las bolsas pequeñas de la bolsa grande y, segundo, se extraigan dos bolas de dicha bolsa pequeña (con reposición de la primera bola antes de extraer la segunda). Esta hipótesis H_3, que acabamos de especificar, es una hipótesis estadística irreprochable en sí misma, pero que había quedado eliminada por las condiciones de nuestro problema, de acuerdo con las cuales la hipótesis verdadera tenía que ser o H_1 o H_2, con exclusión de toda tercera probabilidad; y, por tanto, podemos decir, en el lenguaje de los juegos, que si bien el científico no hace trampa al emplear una estrategia aleatorizada, formada por composición de dos o más estrategias básicas, la Naturaleza haría trampa (esto es, no seguiría las reglas del juego) si compusiera aleatorizadamente entre sí las hipótesis H_1 y H_2 para llegar a una tercera, H_3.

El hecho de que las condiciones del problema que nos hemos planteado sólo permitan tener en cuenta dos hipótesis no nos impide que imaginemos mezclas hipotéticas de ambas para facilitarnos el cálculo de las estrategias prudenciales: entonces, las probabilidades de mezcla de dichas hipótesis serán conceptos teoréticos de un sistema deductivo en cuyas consecuencias deducidas no aparecerán tales conceptos. Así, Wald ha considerado conveniente la introducción de distribuciones probabilitarias hipotéticas de sus parámetros probabilitarios (distribuciones probabilitarias que corresponden a las probabilidades de mezcla de nuestras hipótesis estadísticas) para demostrar la existencia de las estrategias minimax, ya que con ellas podía demostrar que la estrategia de este tipo minimizaba el riesgo correspondiente a la mezcla menos favorable de las hipótesis [33].

Desde el punto de vista de la teoría de los juegos, la situación es

---

[33] *Annals of Mathematics*, segunda serie, vol. 46 (1945), pág. 267. En el artículo inicial WALD no dejó lugar a dudas en cuanto a que había introducido en su trabajo las distribuciones probabilitarias hipotéticas (que a veces llama «distribuciones probabilitarias *a priori*») no por otra razón que la de «que, simplemente, resultan ser útiles para deducir ciertos teoremas y para el cálculo del mejor sistema de zonas de aceptación» [*Annals of Mathematical Statistics*, vol. 10 (1939), pág. 302].

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

tal —según parece— que el considerar que la Naturaleza mezcle aleatorizadamente sus hipótesis puede ser un método excelente para descubrir cómo haya que habérselas con ella cuando no lo hace. Mas para el científico la mezcla aleatorizada de sus estrategias básicas constituye una técnica mediante la cual incrementa perceptiblemente sus esperanzas matemáticas: al utilizar deliberadamente probabilidades artificiales puede mejorar sus perspectivas de discriminar entre las probabilidades naturales que se le presenten.

Excepto en el caso en que se limite a dos el número de jugadas a disposición de cada jugador [34], Von Neumann no logró encontrar un método para calcular las probabilidades de mezcla mediante las cuales hayan de componerse las estrategias básicas para formar la estrategia aleatorizada prudencial. Mi método geométrico equivale a uno de la teoría de los juegos con el que se calculen las probabilidades de mezcla si se limitan las posibilidades de uno de los jugadores, *B*, a no más de dos jugadas básicas y al otro, *A*, se le concede cualquier número finito de jugadas de este tipo. Y la importante propiedad especial de este caso —que corresponde a la elección entre dos hipótesis— es que si *A* emplea la estrategia aleatorizada que sea la prudencial logrará una puntuación igual cualquiera que sea la jugada que haga *B*, de las dos que están a su disposición [35].

Efecto de un aumento del número de casos

Hemos estudiado con un detalle considerable la norma prudencial que hace preferir la hipótesis H_1 a la H_2 cuando los datos de que se dispone para la observación están constituidos por el número de ejemplares de α que haya en un conjunto de dos ejemplares de β, y hemos encontrado (excepto para los casos excepcionales en punto a la asignación de valores de utilidad) que la estrategia prudencial está re-

[34] *NM*, § 18.2.

[35] Sería improcedente exponer ahora detalladamente la generalización directa de mi método geométrico que se precisa para aplicarlo al caso general del juego bipersonal de suma cero en el que un jugador esté limitado a sólo dos jugadas. En este caso general, las probabilidades de mezcla para la estrategia prudencial de *A* están determinadas por la intersección de la diagonal ascendente con uno de los lados admisibles del polígono de los puntos representativos de estrategias (en caso de que todos los lados admisibles se encuentren en su totalidad por encima o por debajo de esta diagonal el juego está «estrictamente determinado» en el sentido original de Von Neumann), y las correspondientes a la estrategia prudencial de *B* lo están por el ángulo comprendido entre dicha diagonal ascendente y el lado a que nos hemos referido del polígono.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

presentada, en nuestro diagrama, por el punto en que la línea de utilidad corte a una línea quebrada, formada por tres segmentos, que va del ángulo superior izquierdo del cuadrado al inferior derecho del mismo. ¿Qué ocurrirá si los datos a nuestra disposición corresponden a una muestra formada por más de dos ejemplares de β?

Aun cuando hemos elegido antes un número de casos, n, pequeñísimo (dos), con objeto de simplificar la exposición, no hay nada de la argumentación general que dependa del valor de n. Luego podemos decir, en general, que la norma prudencial para preferir H_1 a H_2 sobre la base de la observación de cierto número de ejemplares de α * en una muestra de n miembros de β consiste (excepto para los casos excepcionales en cuanto a la asignación de valores de utilidad, que pueden tratarse exactamente igual que antes) en escoger la estrategia —que será la «prudencial»— representada por el punto en que la línea de utilidad corte a la línea (dotada de $n + 1$ segmentos) que se forma uniendo en sucesión los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{n+2}, y_{n+2}), siendo (x_j, y_j) el punto representativo de la estrategia básica por la que se elija H_1 si $s = j - 1, j, j + 1, ..., n$ y se elija H_2 si $s = 0, 1, 2, ..., j - 2$, y siendo x_j e y_j las probabilidades —dadas, respectivamente, la verdad de H_1 y la verdad de H_2— de elección correcta mediante dicha estrategia básica. (El cálculo de estas parejas de probabilidades es mero asunto de cálculos aritméticos complicados.) A menos que la línea de utilidad pase por uno de los puntos representativos de estrategias T_2, T_3, ..., T_{n-1}, la estrategia prudencial será una estrategia aleatorizada, formada a partir de las dos estrategias básicas cuyos puntos representativos se hallen más cerca, por uno y otro lado, del representativo de la estrategia prudencial aleatorizada. Por lo demás, la pareja de esperanzas matemáticas correspondiente a la estrategia prudencial, R_i, está formada por los dos valores iguales $(a + d)x_i - d$ y $(b + c)y_i - b$. (Todo lo anterior se sigue de un razonamiento parecido al empleado para el caso de $n = 2$).

Si se dibuja la línea formada por $n + 1$ segmentos que hemos citado (todos cuyos puntos racionales representan estrategias permitidas) para $n = 2, 3, 4, ...$, se observa que cada quebrada se encuentra por encima de las que la preceden en esta sucesión. Cerca del ángulo superior derecho de la figura 10 pueden verse cinco líneas punteadas, que enlazan seis puntos, los cuales representan seis de las veintidós estrategias básicas para $n = 20$: a saber, P_8 a P_{13} [36] (los representati-

* Número que el autor simboliza con s.—*N. del T.*

[36] Calculando las coordenadas de estos seis puntos representativos de estrategias mediante la tabla de distribución binomial dada por M. G. KENDALL en su *The Ad-*

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

vos de las restantes están demasiado próximos al lado superior o al lado derecho del cuadrado para que se los pueda representar debidamente en esa figura). La estrategia prudencial apropiada para la línea de utilidad constituida por la diagonal ascendente, U_1, será una estrategia aleatorizada compuesta mediante P_{10} y P_{11} —valiéndose de las probabilidades de mezcla oportunas— que estará representada por el punto de intersección de U_1 con $P_{10}P_{11}$; y como este punto se encuentra sobre la diagonal U_1 más arriba que R —que es el punto representativo de la estrategia prudencial para $n = 2$—, su pareja de esperanzas matemáticas (que son iguales) será mayor que la pareja de esperanzas matemáticas (iguales) correspondientes a la estrategia R: al aumentar n desde dos hasta veinte se produce un aumento de tales esperanzas matemáticas.

Hasta el momento nos hemos limitado al caso de que la hipótesis H_1 afirme que la probabilidad de que un ejemplar de β sea ejemplar de α tiene el valor $p_1 = 3/5$, y de que la H_2 afirme que esta probabilidad tiene el valor $p_2 = 3/10$; pero también hemos adoptado estas cifras meramente a título de ejemplo y para simplificar los cálculos aritméticos: no hay nada en nuestra argumentación que precise otra cosa sino que se cumpla $0 < p_2 < p_1 < 1$, de modo que podemos aplicarla íntegramente al caso general. Si p_1 y p_2 están muy cerca (esto es, si $p_1 - p_2$ es una cantidad pequeña) puede demostrarse que la línea formada por $n + 1$ segmentos estará por debajo de la misma cuando p_1 y p_2 estén más separadas (permaneciendo constante n); por tanto, para un n y una línea de utilidad dados, la pareja de esperanzas matemáticas de la estrategia prudencial será menor de lo que hubiera sido si $p_1 - p_2$ hubiese sido mayor.

---

vanced Theory of Statistics, vol. I (Londres, 1943), pág. 119, se obtiene lo siguiente:

Estrategia		Probabilidad de elección correcta dada H_1 (x)	Probabilidad de elección correcta dada H_2 (y)
P_8.	(H_1 para $s = 7, 8, \ldots, 20$; H_2 para $s = 0, 1, \ldots, 6$)	0.9935	0.6079
P_9.	(H_1 para $s = 8, 9, \ldots, 20$; H_2 para $s = 0, 1, \ldots, 7$)	0.9789	0.7722
P_{10}.	(H_1 para $s = 9, 10, \ldots, 20$; H_2 para $s = 0, 1, \ldots, 8$)	0.9434	0.8866
P_{11}.	(H_1 para $s = 10, 11, \ldots, 20$); H_2 para $s = 0, 1, \ldots, 9$)	0.8724	0.9520
P_{12}.	(H_1 para $s = 11, 12, \ldots, 20$; H_2 para $s = 0, 1, \ldots, 10$)	0.7553	0.9828
P_{13}.	(H_1 para $s = 12, 13, \ldots, 20$; H_2 para $s = 0, 1, \ldots, 11$)	0.5956	0.9948

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Veamos ahora lo que sucede con las normas prudenciales para elegir entre dos hipótesis estadísticas cualesquiera, H_{p1} y H_{p2}, que aseveren, respectivamente, que la probabilidad de que un ejemplar de β sea ejemplar de α es p_1 y es p_2 (siendo $0 < p_2 < p_1 < 1$), cuando el número de ejemplares de β observados, n, en que se ha de basar la elección, crece sin fin y sin límite. Puede demostrarse que, al crecer n de este modo, el punto P en que la línea formada por $n + 1$ segmentos corta a la diagonal ascendente se acerca más y más al ángulo superior derecho del cuadrado; esto es, que sus coordenadas x e y, que son iguales, tienden a 1 al crecer n más allá de todo límite [87]; por consiguiente, las partes de dicha línea —la formada por $n + 1$ segmentos— situadas por encima de la diagonal ascendente se acercan cada vez más al lado superior del cuadrado, y las situadas por debajo al lado derecho del mismo.

Supongamos que, o bien tanto a como c sean positivos, o bien lo sean tanto b como d, de suerte que la línea de utilidad, $(a + d)x - d = (b + c)y - b$, corte al cuadrado, pero sin ser ni una vertical ni una horizontal. En caso de que corte el lado superior de éste (lo cual ocurrirá si $a > c$), la pareja de esperanzas matemáticas iguales correspondiente a la estrategia prudencial apropiada a dicha línea de utilidad tenderá a c al aumentar n más allá de todo límite; si la línea de utilidad corta al lado derecho del cuadrado (lo cual ocurrirá si $c > a$), la pareja de esperanzas matemáticas iguales correspondiente a la estrategia prudencial apropiada a esta línea de utilidad tenderá a a al crecer n sin fin y sin límite; y si la línea de utilidad pasa por el ángulo superior derecho del cuadrado (como sucederá si $a = c$), la pareja de esperanzas matemáticas iguales tenderá al valor común a a y c.

La interpretación que hay que dar de este resultado es la siguiente. Al crecer el número del conjunto de casos observados, n, más allá de todo límite, la pareja de esperanzas matemáticas iguales que se al-

---

87 Al aumentar n sin fin y sin límite, la probabilidad, dada H_{p1}, de elección correcta (que llamaremos x) tiende a

$$F_x(n) = \sqrt{\frac{n}{2\pi p_1(1-p_1)}}\int_{f(n)}^{\infty} \exp\left[-\frac{n(z-p_1)^2}{2p_1(1-p_1)}\right]dz;$$

y la probabilidad, dada H_{p2}, de elección correcta (que llamaremos y) tiende a

$$F_y(n) = \sqrt{\frac{n}{2\pi p_2(1-p_2)}}\int_{-\infty}^{f(n)} \exp\left[-\frac{n(z-p_2)^2}{2p_2(1-p_2)}\right]dz;$$

siendo $f(n)$ un número —dependiente de n— tal que $F_x(n) = F_y(n)$. Puesto que $p_2 < p_1$, para todo n, $p_2 < f(n) < p_1$, y tanto $F_x(n)$ como $F_y(n)$ tienden a 1 al crecer n más allá de todo límite.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

canza siguiendo las normas prudenciales para la selección de la estrategia para la elección entre las dos hipótesis H_{p1} y H_{p2} tiende al mínimos de los dos valores a y c, esto es, al mínimo de las dos ganancias que se obtendrían eligiendo H_{p1} cuando esta hipótesis sea verdadera y eligiendo H_{p2} cuando ésta sea la hipótesis verdadera; si el mínimo de los dos valores a y c es positivo también lo es el otro, y el resultado a que se llegue es absolutamente independiente de los valores de b y de d; pero si es cero es necesario que tanto b como d tengan un valor positivo (con objeto de conseguir que la línea de utilidad corte al cuadrado y no sea ni vertical ni horizontal) —mas el resultado a que se llegue es independiente de cuáles sean los valores positivos de b y de d.

Este resultando me parece tener el máximo interés. Lo he expuesto apoyándome en el empleo de estrategias aleatorizadas porque en este caso el punto representativo de la estrategia prudencial se encuentra en la línea de utilidad y se desplaza a lo largo de ella hacia arriba y hacia la derecha al aumentar n, pero sigue siendo igualmente válido si no se utilizan estas estrategias. En efecto, según va creciendo n, las dos estrategias básicas más próximas —por uno y otro lado— a la línea de utilidad (que son aquéllas entre las que ha de hacerse la selección en el segundo paso del procedimiento prudencial no aleatorizado, que explicamos en la página 244) se acercan más y más a ésta; y las cuatro esperanzas matemáticas —un par de ellas por cada una de estas estrategias básicas— se acercan mutuamente, de suerte que el valor límite al que las cuatro se van aproximando al aumentar n sin fin y sin límite es el representado por el punto de la línea de utilidad en que ésta corte a la línea de unión de los dos puntos representativos de dichas estrategias básicas. Ahora bien, este valor es el de la pareja de esperanzas matemáticas iguales a que se hubiese llegado en caso de emplear estrategias aleatorizadas, de manera que, ya se permita o no la utilización de este tipo de estrategias, se obtiene el resultado de que, al emplear unas normas prudenciales basándose en un conjunto de n observaciones, tanto la esperanza matemática de que H_{p1} sea verdadera como la de que H_{p2} lo sea tienden al mínimo de los dos valores a y c cuando n aumenta más allá de todo límite, y ello independientemente de los valores que tengan b y d (con la única salvedad de que estos dos han de ser positivos en caso de que el mínimo de los dos valores a y c sea cero)[38].

---

[38] Lo que pedía la introducción de estrategias aleatorizadas era el hecho de que los puntos representativos de estrategias, T_1, T_2, ..., T_{n+2}, son puntos aislados en la quebrada $T_1T_2...T_{n+2}$. Si se utilizasen probabilidades continuas de modo que

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Hablar del comportamiento de una pareja de esperanzas matemáticas cuando n crece más allá de todo límite es una manera cómoda de hablar de sus valores cuando n sea un número cualquiera, todo lo grande que queramos. Esta manera de expresarse, sin embargo, puede confundir al lector desprevenido, ya que podría llevarle a suponer que, tras haber elegido una u otra de las hipótesis de acuerdo con las normas prudenciales y basándonos en el número observado de ejemplares de α en una muestra de n casos de β, aumentaríamos el número de dicha muestra a $n + 1$ y veríamos cómo quedaba afectada nuestra elección de hipótesis por el aumento de nuestros conocimientos proporcionado por la nueva observación; pero tal cosa constituye un problema de mayor complicación matemática que el que nos ocupa, y no lo estudiaremos aquí, ya que no suscita problemas lógicos nuevos[39]. Lo que en este capítulo nos interesa es exclusivamente lo que los estadísticos llaman «muestras fijas», y cuando hablamos del efecto producido por el aumento del número, n, de un conjunto de casos, no estamos comparando cierta propiedad de este conjunto con la misma propiedad de un conjunto de casos más grande que lo incluya, sino que lo que comparamos es cierta propiedad de aquel conjunto con la misma de otro conjunto mayor, pero aislado o por sí; es decir, ha de considerarse que cada conjunto de este género es independiente de cualquier otro conjunto que tengamos en cuenta: la probabilidad de que haya s ejemplares de α en una muestra de n miembros de β es independiente de esta misma probabilidad en cualquiera otra muestra de β: no hay probabilidades «vinculadas entre sí». Por tanto, hablar de un aumento del número n en el conjunto es meramente una forma breve de decir que atendemos a un conjunto independiente dotado de un número mayor de casos; y, por consiguiente, cabe expresar el resultado que hemos asentado diciendo que cuanto mayor sea el conjunto de casos examinados mediante el cual haya de llevarse a cabo la elección entre las hipótesis tanto más se acercará la pareja de esperanzas matemáticas iguales correspondiente a la estrategia alea-

---

los puntos representativos de las estrategias básicas quedasen distribuidos de una manera continua a lo largo de una línea (ordinariamente una curva) que uniera los ángulos superior izquierdo e inferior derecho del cuadrado, no sería tan preciso emplear las estrategias aleatorizadas. (En este libro no estudiamos las probabilidades continuas.)

[39] La ingeniosa técnica de Wald del «análisis secuencial» constituye un método para tratar este problema. Este autor la expuso en su *Sequential Analysis* (Nueva York, 1947) y en *Econométrica*, vol. 15 (1947), págs. 279 y sigs., amplió su norma minimax general para incluirla en ella. (Véase también su *Statistical Decision Functions.*)

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

torizada que sea prudencial al beneficio mínimo que se consiga mediante una elección correcta de las hipótesis.

Es posible destacar de varias maneras lo que este importante resultado significa. Una de ellas es comparar las esperanzas matemáticas propias de la estrategia prudencial —basada sobre un conjunto de n observaciones— con las propias de las dos estrategias extremas de elegir H_{p1} o H_{p2}, respectivamente, cualquiera que sea la razón en α que revele la observación; de este modo llegamos a la siguiente tabla comparativa, en la que ϵ_n es un número muy pequeño que tiende a cero al aumentar n sin fin y sin límite y en la que min$[a, c]$ denota el mínimo de los valores de a y de c:

	Esperanza matemática dada H_{p1}	Esperanza matemática dada H_{p2}
Estrategia T_1 (elíjase siempre H_{p1})	a	$-b$
Estrategia prudencial	$\min[a, c] - \varepsilon_n$	$\min[a, c] - \varepsilon_n$
Estrategia T_{n+2} (elíjase siempre H_{p2})	$-d$	c

Puesto que la estrategia T_1, que elige H_{p1} cualesquiera que sean los datos de que dispongamos, tiene, dada la verdad de esta hipótesis, la máxima esperanza matemática entre todas las estrategias posibles, y puesto que T_{n+2}, que elige H_{p2} cualesquiera que sean los datos de que dispongamos, tiene, dada la verdad de esta hipótesis, la máxima esperanza matemática entre todas las estrategias posibles, emplear la estrategia prudencial cuando n es muy grande es garantizarnos que tendremos una pareja de esperanzas matemáticas que se aproximará al mínimo de los máximos de las esperanzas matemáticas dadas las verdades de las hipótesis respectivas. Por tanto, al seguir la norma de tratar de maximizar —con respecto a todas las estrategias— el mínimo del par de esperanzas matemáticas de cada estrategia, cuando n es muy grande conseguimos casi exactamente el mínimo de los dos valores siguientes: el máximo de las esperanzas matemáticas dada la verdad de H_{p1} y el máximo de las mismas dada la verdad de H_{p2} [40].

Si $a = c$, esto es, si se consigue la misma ganancia eligiendo cualquiera de las dos hipótesis, con tal de que se elija la verdadera, cuando n sea grande la estrategia prudencial nos dará una pareja de esperanzas matemáticas que se acercará a dicha ganancia. Y si $a = c = 0$, que es el caso tenido en cuenta por Wald, la estrategia prudencial nos pro-

[40] Si parece que este resultado es demasiado bello para ser verdad, y que el científico no puede gozar de tales privilegios en su juego con la Naturaleza, debe recordarse que en las condiciones de nuestro problema, mientras que ésta está limitada a dos jugadas posibles, el científico tiene el gran privilegio de contar con $2^n + ^2$ a su disposición, incluso si no emplea estrategias aleatorizadas.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

porciona una pareja de esperanzas matemáticas cercana a cero: en el lenguaje de Wald, el máximo riesgo, que es lo que la estrategia prudencial minimiza, tiende a cero al crecer n sin fin y sin límite.

En todos los casos, conforme n aumenta los valores de b y de d —es decir, las pérdidas que se hayan de sufrir cuando se elija H_{p1} siendo ésta hipótesis falsa y cuando se elija H_{p2} siendo esta hipótesis falsa, respectivamente— entran cada vez menos en las esperanzas matemáticas correspondientes a la estrategia prudencial. Por consiguiente, otro modo de expresar el resultado que nos interesa es el de decir que cuando n es muy grande las esperanzas matemáticas para la estrategia prudencial son aproximadamente independientes de b y de d: estos últimos valores son sumamente pertinentes para determinar cuál sea la estrategia prudencial mediante la que hayamos de escoger entre las hipótesis, pero apenas intervienen en los valores de las esperanzas matemáticas que nos otorgue dicha estrategia. O sea, lo que contamos con ganar empleando la estrategia prudencial cuando n es muy grande depende muy poco de lo que contemos con perder si la hipótesis que escojamos de acuerdo con esta estrategia fuese falsa. Lo que sí afectan los valores de b y d es el punto de la línea quebrada $P_1P_2\ldots$ $\ldots P_{n-2}$ en que ésta corte a la línea de utilidad y, por tanto, cuál sea la estrategia prudencial que precise escogerse; en el caso de Wald, en que $a = c = 0$, esta estrategia queda enteramente fijada por la razón entre d y b, que determina la pendiente de la línea de utilidad

$$-d(1-x) = -b(1-y)$$

que pasa por el ángulo superior derecho del cuadrado.

Este comportamiento de la estrategia prudencial al aumentar el número, n, de observaciones sobre que se base es una poderosa razón suplementaria para aceptar las normas prudenciales como normas racionales para escoger entre hipótesis estadísticas: la estrategia que las normas prudenciales seleccionan depende de la posición de la línea de utilidad con respecto al cuadrado y, por tanto, de las relaciones existentes entre los valores de las utilidades. Si se objeta que ello produce el efecto de hacer que la elección de las hipótesis —sobre la base del número observado de ejemplares de α en una muestra de β— dependa de consideraciones de valor, extralógicas, y, por tanto, el de convertir la lógica inductiva en subsidiaria de la economía, la hedonística o la ética, puede responderse que sin duda alguna es preferible hacer que dicha elección dependa de las ventajas o desventajas que se consigan creyendo una hipótesis verdadera —las cuales, por difíciles que sean de medir, son, en todo caso, genuinos y verdaderos

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

factores de nuestra vida— que hacerla pender de nociones tan oscuras como la de las probabilidades previas de las hipótesis. Y en mi opinión, el teorema según el cual, al aumentar n la pareja de esperanzas matemáticas para la estrategia prudencial tiende al valor mínimo de las ganancias que se hayan de conseguir aceptando la hipótesis que sea verdadera —primero una y luego la otra—, y ello con independencia de las pérdidas que se hayan de sufrir aceptando la hipótesis que sea falsa —primero una y luego la otra—, constituye un teorema sobre valores límites que hace ver las ventajas que pueden conseguirse aumentando el número de casos examinados mucho mejor de lo que lo haría ningún intento de ajustar a los hechos un cálculo que emplee símbolos para probabilidades que no se hayan de interpretar apoyándose en frecuencias observables.

Intervalos fiduciales

Acabo de defender la causa de la consideración de las normas prudenciales como el mejor principio para decidir entre hipótesis estadísticas valiéndome de un estudio detallado de cómo funciona este principio en un caso muy sencillo. Estaría fuera de lugar que me metiese en los complejos desarrollos matemáticos que se necesitan para aplicarlo a casos de inferencia estadística más complicados que el de la elección entre dos hipótesis estadísticas; pero, con objeto de mostrar de qué modo están relacionadas las normas prudenciales con otras formas de aquella inferencia, voy a indicar muy brevemente sus relaciones con la técnica de los *intervalos fiduciales* para la estimación de intervalos.

Podemos introducir como sigue este ingenioso método, ideado por Jerzy Neyman[41]. Supongamos que volvemos a trazar las elipses de probabilidad del capítulo quinto convirtiéndolas en ciertas figuras cerradas (llamémoslas *cuasi elipses)* tales que, para un número de muestra, n, fijo, la probabilidad de que el punto muestral (r, p) —siendo la coordenada r la razón en α de la muestra de n miembros y la p el parámetro de una hipótesis estadística— caiga fuera de una de ellas sea k, y que valores diferentes de k determinen cuasi elipses diferentes. Entonces, la única diferencia entre estas últimas y las elipses de probabilidad del capítulo citado es que, mientras que la probabilidad

[41] *Philosophical Transactions of the Royal Society*, serie A, vol. 236 (1937), páginas 333 y sigs.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

de que el punto muestral (r, p) caiga fuera de la elipse de probabilidad es inferior a k, la de que caiga fuera de la cuasi elipse ha de ser exactamente k[42]. Las cuasi elipses forman un sistema de encajamiento sucesivo que converge hacia la diagonal $r = p$, exactamente del

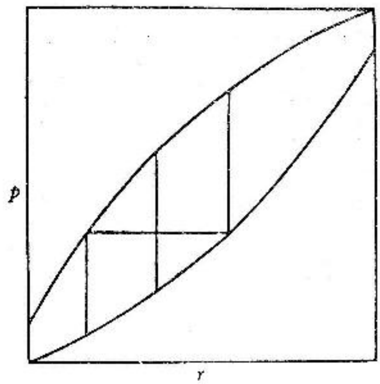


Fig. 9.

mismo modo que ocurría con las elipses dichas, y podríamos haber hecho toda la exposición del capítulo quinto acerca de estas cuasi elipses en vez de hacerla acerca de las elipses, si no se hubiesen necesitado unos ejercicios matemáticos mucho más difíciles para ello. Y en el capítulo sexto podríamos haber utilizado las cuasi elipses como método de representar los intervalos de no rechazamiento para los distintos valores de p: hubiéramos considerado que estas figuras cortaban las longitudes apropiadas de las líneas que, trazadas horizontalmente a su través, representarían los distintos valores de p.

La idea de Neyman, brillantísima por su misma sencillez, consiste en considerar secciones *verticales* de estas cuasi elipses, en lugar de secciones horizontales, y estudiar qué es lo que queda representado por las longitudes interceptadas en estas líneas verticales por una cuasi elipse; lo cual equivale a transformar la ecuación de esta figura, pasándola de $r = f_1(p)$ —para la línea inferior— y $r = f_2(p)$ —para

---

[42] Hablando estrictamente, el finito número de valores que r puede adoptar para un n y un k dados hará imposible que dibujemos una figura *convexa* tal que, para todos los valores de p, la probabilidad de que el punto muestral caiga fuera de dicha figura valga *exactamente* k. (Véase C. J. CLOPPER y E. S. PEARSON, *Biometrika*, volumen 26 (1934), pág. 405, en donde se presenta una figura correcta, con lados en diente de sierra.) Puesto que cuando n es muy grande la figura dentada del caso se acerca a una convexa cuyas líneas superior e inferior son ascendentes desdeñaremos esta sutileza matemática (lo mismo que hicimos con la mencionada en la nota al pie de la página 192) en el estudio que sigue.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

la superior— a las formas respectivas $p = g_1(r)$ y $p = g_2(r)$ [43]. Puesto que la proposición según la cual el punto muestral (r, p) cae dentro de una cuasi elipse concreta, Q, equivale lógicamente a la proposición de que el intervalo vertical $[g_1(r), g_2(r)]$ incluye el valor p para todo p, la probabilidad de que este intervalo incluya el valor p es igual a la probabilidad de que el punto muestral caiga dentro de la cuasi elipse Q, probabilidad que vale $1 - k$, siendo k el valor que determine la elipse Q; de aquí que, cualquiera que sea el valor, p, del parámetro probabilitario, la probabilidad de que p esté incluido en el intervalo $[g_1(r), g_2(r)]$ es $1 - k$, siendo r la razón en α de una muestra de n ejemplares de β (véase la figura 9).

Ello es, desde luego, un teorema del sistema deductivo probabilitario puro; y cabe aplicarlo al problema inductivo de la estimación por medio de un intervalo de un parámetro probabilitario, p, adoptando como estrategia la de elegir como intervalo que incluya el parámetro probabilitario el intervalo vertical $[g_1(r), g_2(r)]$, siendo r la razón en α del conjunto observado de n ejemplares de β. Esta estrategia prescribe la elección de los parámetros probabilitarios como sigue: dada una razón en α observada, r, constrúyase el intervalo vertical $[g_1(r), g_2(r)]$ y admítase que el parámetro probabilitario esté incluido en él. Esta estrategia, que no estima la posición del parámetro probabilitario como la de algo situado en un punto determinado, sino como la de algo situado dentro de cierto intervalo, constituye la estrategia neymaniana del «intervalo fiducial»; y su justificación de ella consiste en que la probabilidad de que asignemos correctamente un parámetro probabilitario, p, a un intervalo fiducial $[g_1(r), g_2(r)]$ —en caso de que este intervalo incluya de hecho aquél— es $1 - k$ (que puede hacerse tan próxima como queramos a 1 para una y la misma cuasi elipse sin más que tomar n suficientemente grande), de modo que, cuando se emplee gran número de veces la estrategia del intervalo fiducial (basada en muestras con valores distintos de la razón en α), la proporción de asignaciones correctas del parámetro probabilitario al intervalo fiducial que lo incluya valdrá a la larga $1 - k$.

Podemos retrotraer esta estrategia de intervalos fiduciales a la estrategia prudencial para la elección entre hipótesis si tomamos cada una de éstas como la proposición que afirme que el parámetro probabilitario p está incluido en el intervalo $[g_1(r), g_2(r)]$, siendo r uno

---

[43] Esta transformación siempre es posible, ya que tanto $f_1(p)$ como $f_2(p)$ son funciones crecientes de p, con $f_1(p) > f_2(p)$ para $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

de los valores posibles de la razón en α de la muestra de n miembros. Como existen $n + 1$ valores posibles de este género, existen $n + 1$ hipótesis de éstas, que no son necesariamente excluyentes, ya que puede muy bien ocurrir que haya dos o más valores de r que determinen intervalos $[g_1(r), g_2(r)]$ imbricados o solapados de suerte que un parámetro probabilitario p concreto pueda quedar incluido en todos ellos. Por tanto, la estrategia de los intervalos fiduciales no es, hablando propiamente, estrategia alguna para la elección entre hipótesis que se encuentren en alternativa —esto es, para aceptar una de ellas y rechazar las demás—, sino para aceptar una hipótesis sin aceptar ni rechazar ninguna de las demás posibles que sean lógicamente compatibles con ella [44]; pero, asumiendo que la cantidad que vaya uno a ganar al aceptar una de estas hipótesis cuando sea verdadera sea la misma que cuente con ganar aceptando otra hipótesis cualquiera cuando ésta sea verdadera, y si la cantidad b que cuento con perder si acepto una hipótesis siendo falsa es la misma que he de perder si me ocurre análogamente con otra hipótesis cualquiera, la esperanza matemática, dado que el parámetro probabilitario, p, se encuentre dentro del intervalo fiducial, $[g_1(r), g_2(r)]$, determinado por la razón en α observada, r, es

$$a(1 - k) - bk = a - (a + b)\,k.$$

Esta esperanza matemática correspondiente a la estrategia de intervalos fiduciales es la misma cualquiera que sea el valor del parámetro probabilitario, p; y, por consiguiente, esta estrategia comparte con las estrategias prudenciales que hemos examinado en este capítulo una importante característica: la de proporcionarnos una esperanza matemática única e independiente de los caprichos de la Naturaleza. El que este valor único sea o no un máximo de los mínimos de las esperanzas matemáticas correspondientes a otras estrategias depende de cuál sea el conjunto de estrategias que se tome como conjunto en alternativa de estrategias excluyentes y exhaustivas: si se trata de las de aceptar hipótesis diferentes a partir del conjunto de $n + 1$ hipótesis de intervalo fiducial correspondiente a una razón en α concreta observada, r —por ejemplo, en lugar de aceptar, de acuerdo con la estrategia de intervalos fiduciales, la hipótesis de que p se encuentre incluido en el intervalo $[g_1(r), g_2(r)]$, aceptar la de que p se encuentre incluido en el intervalo $[g_1(r'), g_2(r')]$, o la de que se encuentre incluido en el $[g_1(r''), g_2(r'')]$, o ..., siendo $r, r', r'', \ldots$ valores posibles

[44] Si los intervalos $[g_1(r_1), g_2(r_1)]$ y $[g_1 r_2), g_2(r_2)]$ no están imbricados ni son tangentes es lógicamente imposible que p esté incluido en ambos.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

de la razón en α tales que no haya imbricación entre los miembros de ninguna pareja de estos intervalos—, la estrategia de intervalos fiduciales es, sin duda, la prudencial de entre todas estas estrategias en alternativa.

Habíamos definido los intervalos fiduciales con «coeficiente fiducial» $1 - k$ como secciones verticales de una cuasi elipse tal que la probabilidad de que el punto muestral, (r, p), cayera fuera de ella fuese k. Pero no existe una elipse única dotada de esta propiedad: hay un gran número de funciones distintas, g_1 y g_2, tales que la probabilidad de que el intervalo $[g_1(r), g_2(r)]$ incluya p sea $1 - k$. Los estadísticos matemáticos han sugerido varias condiciones suplementarias para que las satisfagan los intervalos fiduciales «óptimos», y Wald ha hecho ver que cierto intervalo en torno de la estimación máximo-verosímil es un intervalo fiducial que posee una importante propiedad de los óptimos [45]. Así pues, si aceptamos las normas prudenciales como las más racionales, podemos justificar la utilización de intervalos fiduciales por medio de consideraciones prudenciales, y justificar la estrategia máximo-verosímil para la estimación puntual en virtud de poner a nuestro alcance un tipo especialmente conveniente de intervalo fiducial; lo cual parece proporcionar un fundamento racional al método de la verosimilitud máxima de que éste carece cuando se señalan inconexamente sus notables propiedades, y que, a mi entender, es una justificación mucho más satisfactoria que la apoyada en una adscripción de probabilidades previas iguales a todas las hipótesis posibles.

Conclusión

Hemos dedicado tanto espacio a desarrollar la teoría de las normas prudenciales para preferir una hipótesis estadística a otra porque esta teoría es novedosa e importante, y porque hasta ahora no la había expuesto ningún lógico filosófico. Y he preferido dedicar mi atención a defenderla que a discutir y criticar teorías basadas en nociones no empíricas de la probabilidad (Jeffreys, Keynes, Carnap) porque, si bien han sufrido críticas destructoras (por ejemplo, por Kneale), su gran fuerza reside en su pretensión de responder a una pregunta que las teorías empíricas de la probabilidad no son capaces de contestar:

[45] La de ser un «intervalo fiducial asesgado asintóticamente mínimo»: *On the Principles of Statistical Inference*, cap. V. [Véase la versión castellana citada.— *N. del T.*]

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

la de cuál sea la razón para elegir entre hipótesis estadísticas. Los teóricos no empíricos están enteramente en lo cierto al reconocer que un análisis apoyado en las frecuencias observables no basta por sí para justificar que prefiramos una hipótesis a otra, y que el solo hecho de que una frecuencia observada sea la más probable, dada la verdad de una hipótesis determinada, no es razón para que aceptemos esta hipótesis en lugar de otra. La tesis que defiendo en este capítulo tiene el mérito de reconocer francamente que está involucrada otra consideración además de la de los valores de las frecuencias observadas; consideración que halla en las ventajas y desventajas relativas de actuar en la creencia de una hipótesis estadística en los casos respectivos de que sea verdadera y de que sea falsa.

El hecho de que cualquier teoría de la inferencia estadística tenga que tomar en cuenta la importancia relativa de caer en el error de rechazar una hipótesis que sea verdadera, y en el de aceptar una que sea falsa, ha venido teniendo aceptación general entre los matemáticos estadísticos desde que Neyman y Pearson distinguieron estos dos tipos de error en 1933; pero lo que no se ha reconocido con tanta claridad es que existe, asimismo, un elemento de evaluación en el significado de los enunciados probabilitarios mismos, y que decir que es «prácticamente seguro» que los próximos mil nacimientos que se produzcan en Cambridge incluirán al menos el de un niño entraña una tasación de tipo hedonístico o ético. En el último capítulo hemos subrayado la arbitrariedad —desde un punto de vista lógico— del valor de k que se emplea en la regla k de rechazamiento que determina el significado de los enunciados probabilitarios; y si se acepta la tesis de dicho capítulo como estudio correcto de la forma en que se otorga significado dentro de una ciencia a los enunciados probabilitarios, y, por tanto, de la manera en que funcionan las hipótesis estadísticas en los sistemas deductivos científicos, una teoría de la inferencia estadística en que aparezcan elementos extralógicos se convierte en un desarrollo natural de aquella tesis: si no pueden excluirse las consideraciones éticas en la definición de la probabilidad, difícilmente podrá prescindirse de ellas en las razones que tengamos para preferir un enunciado probabilitario a otro.

Puede ocurrir muy bien que un filósofo que esté dispuesto a admitir elementos éticos en la lógica inductiva se sienta inclinado a objetar contra el carácter privado de las nociones evaluativas que se precisan, ya que la estrategia que sea la prudencial para la asignación de valores a las «utilidades» hecha por una persona puede no ser la prudencial con una asignación diferente, propia de otra persona. Pero,

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

como sucede con la definición de la probabilidad, también con la inferencia estadística el aumento del número de casos tiende a disminuir las diferencias basadas en la atribución de valores de utilidad diferentes: en el último capítulo vimos que una regla k de rechazamiento basada en un valor cualquiera determinado, k_1, de k equivale a una regla de esta misma índole basada en cualquier otro valor determinado de k, k_2, por pequeño que sea, con tal de que el conjunto de casos sobre el que haya de funcionar esta última regla sea suficientemente grande; y en el presente capítulo hemos visto que, «en el infinito», la esperanza matemática que se tiene al elegir una hipótesis en vez de otra de acuerdo con las normas prudenciales es independiente de la asignación de las pérdidas que se hayan de sufrir en caso de elección errónea. En cuanto a la forma de variar la elección real cuando el número de casos aumente más allá de todo límite, se trata de una cuestión matemáticamente muy complicada, que no podemos estudiar aquí; Wald ha hecho ver que «en el infinito» pueden justificarse diversos procedimientos estadísticos mediante consideraciones prudenciales independientes de la asignación que se haga de valores de utilidad [46].

Debe advertirse, sin embargo, que este carácter privado no es peculiar y propio de la teoría de la inferencia estadística por la que hemos abogado aquí: lógicos como Jeffreys y Keynes, que emplean una teoría no empírica de la probabilidad, tienen que asignar unas *probabilidades previas* a las distintas hipótesis posibles en su estudio de la inferencia estadística; y estas asignaciones, por mucho que se apoyen frecuentemente en juicios de equiprobabilidad, son tan privadas de cada persona como las asignaciones nuestras de utilidades. Como ocurre con algunas de nuestras estrategias prudenciales, la variación existente entre aquellas asignaciones privadas va haciéndose cada vez menos operante al ir aumentando el número del conjunto de casos observados, de modo que «en el infinito» los valores de las probabilidades previas atribuidas a las hipótesis en alternativa dejan enteramente de ser pertinentes; pero la demostración de que ocurra esto «en el límite» presupone que sean pertinentes en la serie de la cual éste constituya el límite, de modo que el hecho de que la teoría prudencial expuesta en este capítulo se valga de tasaciones de utilidad que puedan variar de una persona a otra no constituye argumento con-

---

[46] *On the Principles of Statistical Inference*, pág. 46 [versión castellana citada, página 38].

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

tra esta teoría en cuanto contrapuesta a otra que asimismo se valga de asignaciones, igualmente personales, de probabilidades previas.

Si nos despegamos un poco de nuestro problema parece no haber razón para que nos sorprendamos de que la lógica inductiva quede envuelta en consideraciones de evaluación. En efecto, en una cadena deductiva de razonamientos la conclusión es una consecuencia lógica de las premisas, y una persona que crea éstas y que reconozca la relación lógica existente entre ellas y la conclusión puede presentar dicha relación en consecuencia lógica como razón para creer la proposición que constituya la conclusión —en lugar de cualquier otra proposición posible al mismo respecto—; mas en el caso de la inferencia estadística, en el que las premisas son proposiciones acerca de razones de clase observables y en que el resultado de la inferencia ha de ser la elección de una hipótesis dentro de un conjunto de ellas en alternativa, ninguna de éstas es consecuencia lógica de las premisas, de modo que una persona que crea estas últimas * no puede señalar una relación de consecuencia lógica como razón para elegir una hipótesis determinada en vez de otra. Esta persona podrá presentar relaciones lógicas entre enunciados probabilitarios, según hemos hecho en este capítulo, según hacen lógicos como Jeffreys y Keynes al emplear la «probabilidad inversa» y según hacen los estadísticos que utilizan la «verosimilitud máxima»; pero tales relaciones, aun siendo sumamente pertinentes en lo que respecta a la elección de hipótesis, no son en sí mismas suficientes para justificar tal elección de la misma forma en que la relación de consecuencia lógica es suficiente para justificar la elección de una conclusión deductiva. ¿Qué otra cosa podemos emplear para

* A lo largo de todo este capítulo (véanse especialmente las págs. 222 y 226). el autor alude sin muchas explicaciones a la actitud de «creer» [*believing*] proposiciones —o enunciados, según el caso—, lo cual, al parecer, constituye a sus ojos el modo normal (eficaz, operante, real) de relación con ellas —o ellos, respectivamente— en la ciencia. Y en el capítulo siguiente, en particular desde la pág. 285 en adelante, se apoya explícitamente para la construcción de su teoría en el concepto de «creencia razonable» [*reasonable belief*], que en cuestiones epistemológicas parece fuera de lugar. Adviértase, para disipar un exceso de extrañeza, que Braithwaite opone —implícitamente— *creencia* a *certeza* (y admite sólo la primera en virtud de que —véanse las págs. 30 a 37— las hipótesis científicas no pueden demostrarse definitivamente), en vez de hacerlo a *ideas*, como tendería, tal vez, a pensar el lector en castellano, influido por el deslinde orteguiano. Acaso convenga recordar el lejano antecedente platónico de la «opinión verdadera» (ἀληθής δόξα), o el algo más próximo —en el tiempo y en la precisión— de la «creencia verdadera» [*ware geloof*], que hacia 1660 introduce Spinoza con su *Breve Tratado* [*Korte Verhaendeling vate God, de Mensch en deszelfs Welstand*], parte II, capítulos 1, 2 y 4. Por otra parte, Bertrand Russell ha utilizado también la palabra «creencia» en un sentido análogo al de Braithwaite.— *N. del T.*

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

guiarnos en la elección? Jeffreys y Keynes proponen como guía juicios de probabilidades previas, que no están sujetas a contrastación empírica; y lo que proponemos en este capítulo es utilizar como guía las ventajas y desventajas relativas que se obtengan al actuar en la creencia de las diferentes hipótesis posibles, combinándolas con las probabilidades (en un sentido empírico basado en las frecuencias) para formar «esperanzas matemáticas». Estas últimas, pese a su nombre, son las propiedades estadísticas de las medias a la larga correspondientes a un gran número de casos, y su empleo para guiarnos en nuestra manera de actuar no es sólo el fundamento de las apuestas de los juegos de azar, sino de todas las formas de los seguros: aplicar las esperanzas matemáticas como guía de nuestra elección de creencias es aplicar los criterios habituales a las acciones que proceden de las creencias. No es necesario definir éstas exclusivamente apoyándonos en las acciones a que darán lugar [47] para estar dispuestos a adoptar un rasgo de estas últimas como guía en la elección de aquéllas: el basar la preferencia por una hipótesis científica —frente a las otras posibles al mismo respecto— en preferencias entre los resultados de modos diversos de actuación no es emplear criterio nuevo alguno que no esté ya involucrado en los principios de nuestra vida de actividad; la conducta inductiva está sujeta a las mismas normas teleológicas que cualquier otra conducta, y parece que estaría menos de acuerdo, tanto con el principio del empirismo como con el de la moderación *, el justificar la elección entre hipótesis científicas atribuyendo a éstas unas probabilidades previas no empíricas que el utilizar los mismos criterios de evaluación que para los modos de actuar que empleamos cotidianamente en la vida normal.

---

[47] Como hizo ALEXANDER BAIN. En *Proceedings of the Aristotelian Society* (n. s., vol. 33 (1932-33), págs. 129 y sigs., he discutido esta tesis de la creencia como una «propensión a actuar».

* En la introducción de nuevos entes explicativos: es la versión de la famosa «navaja de Occam» que ha dado en la página 84.—*N. del T.*

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

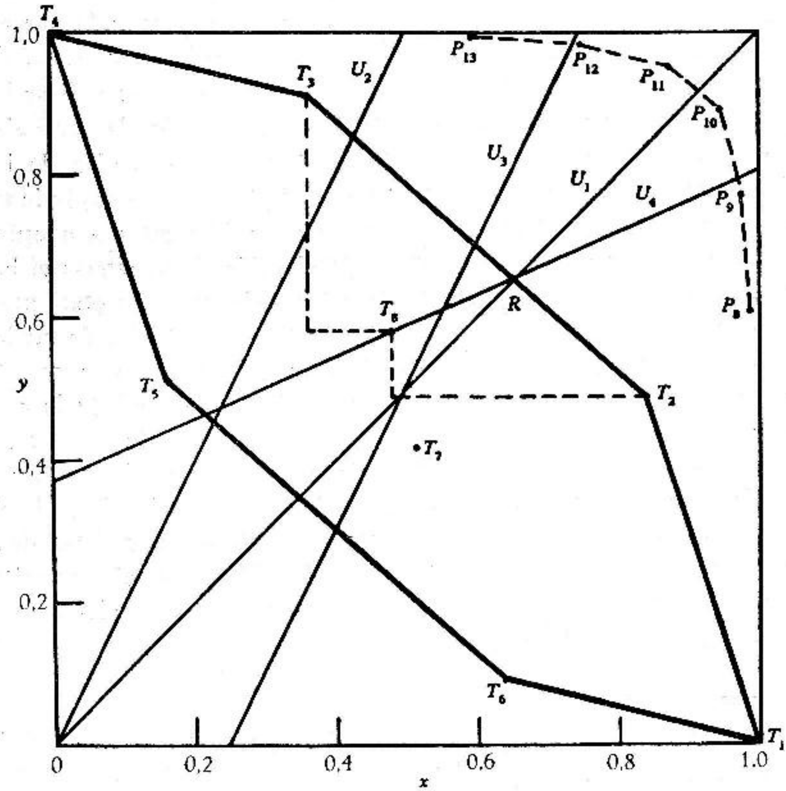


Fig. 10.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

La justificación de la inducción

Hasta el momento no hemos atacado seriamente en este libro la cuestión de la lógica de la confirmación de las hipótesis científicas: los primeros capítulos se han dedicado a insistir en que las hipótesis científicas entran en nuestro pensamiento en virtud del lugar que ocupan en los sistemas deductivos científicos, cuyas proposiciones de nivel ínfimo son generalizaciones directamente confrontables con la experiencia. Si la experiencia que servía para esta confrontación resultaba ser contraria a una de las proposiciones del nivel más bajo, ésta y todas las de nivel superior de que fuese consecuencia lógica habían de rechazarse; si, como sucede normalmente, la proposición de nivel ínfimo rechazada era consecuencia de la conyunción de diversas proposiciones de nivel superior, al menos una de éstas tenía que ser rechazada, aun cuando la experiencia refutadora de la proposición de bajo nivel no indicaría cuál tendría que ser, entre las de nivel superior afectadas. El criterio empírico de rechazamiento de las hipótesis científicas es tan fundamental, que es sumamente conveniente considerar que el significado de las cláusulas universales que expresen generalizaciones empíricas está determinado por las experiencias que las refutarían [1]; y, en consecuencia, los significados de los términos teoréticos que aparezcan en las hipótesis de nivel superior de un sistema científico —las cuales, como hemos visto, están determinadas (aun cuando dentro de cierta «elección arbitraria») por las de nivel ínfimo que sean consecuencias suyas— estarán determinados, en último término (dentro de la misma «elección arbitraria»), por los criterios empíricos que se tengan para rechazar el sistema en su totalidad. Y en el estudio y debate de los enunciados probabilitarios que nos ha ocupado en los tres últimos capítulos hemos destacado el papel de los enunciados de esta índole en una ciencia, señalando que son

[1] Véase más arriba, en la página 175 y su nota.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

hipótesis que funcionan de un modo muy particular en un sistema deductivo científico; particularidad que se debe al hecho de que no son rechazables por la experiencia más que provisionalmente, nunca de un modo definitivo: cuando otras experiencias ulteriores revocan un rechazamiento provisional ello no implica que la experiencia nos ordene aceptar la hipótesis estadística del caso, sino que lo que nos manda es, negativamente, no rechazar aquel enunciado probabilitario a la luz de tales datos. Y el que éstos basten o no para que aceptemos positivamente la hipótesis estadística en cuestión es otro asunto; a menos, naturalmente, de que estemos razonando en el supuesto de que sea preciso o bien aceptar o bien rechazar toda hipótesis. En el último capítulo hemos adoptado deliberadamente un supuesto que incluía aquel otro, al debatir las normas para la elección entre hipótesis estadísticas en el caso más sencillo: en el que no había más candidatos que dos hipótesis, de suerte que rechazar una era aceptar la otra. Pero hasta este momento, en parte alguna hemos estudiado por sí mismas las normas que regulan la aceptación de las hipótesis científicas; y tal estudio y debate no puede postponerse más.

Nos engañaríamos si confundiéramos no rechazamiento con aceptación, ya que nos veríamos conducidos a suponer que un estudio del rechazamiento y una definición de los términos involucrados en ella por medio del concepto de la rechazabilidad habrían incluido implícitamente un tratamiento de la cuestión de la aceptación. Y podemos caer en otro error más sutil: el de que, cuando haya un número limitado de hipótesis del mismo tipo mutuamente excluyentes y en competencia (por ejemplo, la de que el número de electrones de la órbita exterior de cierto átomo sea igual o menor que 10 y la de que dicho número sea mayor que 10; la de que la probabilidad de que cierta perra chica salga cara al caer sea menor que 2/5, la de que sea igual o mayor que 2/5 y menor que 3/4 y la de que sea mayor de 3/4), el rechazamiento de todas estas hipótesis excepto una exija la aceptación de ésta —con olvido de que puede no ser válida ninguna hipótesis de tal tipo o, verdaderamente, de que el fenómeno en cuestión puede no encontrarse sujeto a ley alguna—. Pero si reflexionamos acerca de la cuestión quedará claro que todo empleo del rechazamiento de hipótesis para apoyar la aceptación de una hipótesis de la misma alternativa no rechazada tiene que operar sobre el supuesto de que alguna de las que componen ésta ha de ser la verdadera ley de la Naturaleza. Por tanto, los criterios para rechazar y para no rechazar las hipótesis científicas sólo nos proporcionan criterios parciales para la aceptación de las mismas (parciales en la medida en que los crite-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

rios de rechazamiento no las rechacen); y el que esté permitido *aceptar* una hipótesis que no esté rechazada por la experiencia es una cuestión ulterior que exige, para su respuesta, que nos refiramos a otros criterios, independientes de los de rechazamiento empírico, que, directa o indirectamente, determinan el significado de la cláusula que exprese tal hipótesis.

La confirmación de una hipótesis científica

Los enunciados que expresan hipótesis científicas nos llegan con un significado bien definido, dado por la clase de las observaciones que los refutarían, o que refutarían su conyunción con otras hipótesis científicas. Por consiguiente, el problema filosófico de la confirmación de una hipótesis científica es independiente del de la determinación del significado del enunciado que la exprese; pero no lo es del problema de determinar el significado de «creencia razonable» de una hipótesis científica, así como tampoco del significado de «inferencia inductiva válida» a partir de unos datos empíricos como premisas para llegar como conclusión a una hipótesis científica: pues no llegamos al estudio de cómo conseguimos tener una creencia razonable de una hipótesis científica por medio de una inferencia inductiva válida sabiendo ya lo que queremos decir con aquello de creencia «razonable» y de inferencia «válida»; al enunciar las condiciones que justifiquen las inferencias daremos, *ipso facto*, criterios que determinen el significado de las expresiones «inferencia válida» y «creencia razonable» en el caso de una hipótesis asentada inductivamente.

Ello se debe a que la inducción no es una forma de inferencia demostrativa como la deducción [2]. En ésta el carácter razonable de la creencia de las premisas hace algo así como derramarse y otorgar carácter razonable a la creencia de la conclusión, debido a que ésta es consecuencia lógica de aquéllas y no puede ser falsa mientras las premisas sean verdaderas: las circunstancias empíricas en las que las premisas serán colectivamente verdaderas quedan incluidas en las cir-

[2] Utilizaremos la palabra «inducción» constantemente en el sentido en que la emplean los filósofos para comprender la inferencia de una generalización empírica a partir de ejemplos o casos suyos y la de una hipótesis científica a partir de datos empíricos en su favor, y no —en el sentido aristotélico de los tratados de lógica— para comprender una inferencia que pueda ser demostrativa en virtud de tener una premisa mayor que, en conyunción con sus casos o ejemplos, entrañe una generalización como conclusión.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

cunstancias en que la conclusión lo será; de modo que una creencia de que las circunstancias sean tales que hagan verdaderas a las premisas entraña, de modo implícito si no es explícitamente, la creencia de que las circunstancias son tales que hacen verdadera a la conclusión: si la primera creencia es razonable la última también lo será [3].

En la inferencia inductiva no existe semejante rebosamiento de carácter razonable, lo cual se debe a que no hay imposibilidad lógica de que las premisas sean verdaderas y la conclusión inductiva sea falsa: las circunstancias que hagan verdaderas a las premisas no están incluidas en las que hagan verdadera a la conclusión; y, en realidad, cuando la inducción es la inferencia de una generalización a partir de sus casos o ejemplos, o del conjunto de las hipótesis de nivel supremo de una teoría científica a partir de ejemplos o casos de las generalizaciones que constituyan las hipótesis de nivel ínfimo de la misma, lo que ocurre es lo contrario: las premisas de la inducción son las consecuencias lógicas de su conclusión. Así pues, la creencia de las premisas no involucra en modo alguno creencia de la conclusión (excepto en cuanto causa psicológica), y el carácter razonable de la creencia de la conclusión inductiva requiere una justificación mayor que la de citar el carácter razonable de la creencia de las premisas.

Entre los lógicos ha sido tradicional tratar de justificar la inducción asimilándola a la deducción, asimilación que se ha intentado de dos maneras. Una de ellas consiste en suponer que en toda inducción existe una premisa mayor que se ha omitido, y cuyo reconocimiento explícito convertiría la inferencia en deductiva; pero no se ha propuesto premisa mayor plausible que convierta la conclusión inductiva en consecuencia lógica del conjunto de las premisas. Por ello se ha intentado seguir otro camino: el de suponer que la conclusión de una inducción no es la hipótesis científica misma, sino una proposición que asignaría un número a ésta en relación con los datos disponibles —número que mediría la «probabilidad» en el sentido de la aceptabilidad de Kneale o del grado de confirmación de Carnap—, así como el de suponer que la argumentación entendida de esta forma sea una deducción dentro de un sistema deductivo de enunciados probabilitarios (en dicho sentido de la probabilidad). El gran mérito de la obra de Keynes es el de haber mostrado de modo concluyente que este se-

---

[3] Hay otro sentido de creencia razonable —sentido subjetivo— de la conclusión de una inferencia: éste depende de una creencia en que la conclusión se sigue de las premisas, en vez de depender de que la conclusión se siga en ellas. Este sentido tendrá importancia más adelante, en este mismo capítulo, cuando lleguemos al debate sobre la circularidad de la justificación de la inducción.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

gundo modo de asimilar la inducción a la deducción no se puede defender a menos que se lo combine con el primero[4]: todo sistema deductivo de enunciados probabilitarios proporcionará la probabilidad de una hipótesis inductiva, sobre la base de su confirmación por un conjunto de casos (su «probabilidad subsiguiente»), sólo como producto aritmético uno de cuyos factores sea su probabilidad antes de habérsela sometido a confrontación con la experiencia (su «probabilidad previa»), y se necesita una premisa mayor que garantice que esta probabilidad previa sea mayor que cero. Por tanto, la justificación de la inducción propuesta por la moderna escuela asimiladora (J. M. Keynes, H. Jeffreys, C. D. Broad) exige tanto una teoría de la probabilidad perfectamente desarrollada en el sentido del grado de confirmación como una premisa mayor suprema que se halle a la cabeza de cada una de las inferencias inductivas.

Pero semejante premisa mayor cimera, ya se encuentre en la forma milleana de un principio de uniformidad de la Naturaleza, ya en la de Keynes de uno de variedad independiente limitada, tiene que ser una proposición lógicamente contingente para poder cumplir la función que se exige de ella; y el que sea razonable creer en semejante proposición sólo puede estar justificado por una inferencia inductiva. La objeción abrumadora que puede hacerse a la asimilación de la inducción a la deducción es que exigiría que creyésemos en una premisa mayor empírica generalísima, creencia cuyo carácter razonable tendría que justificarse mediante otro argumento inductivo[5].

La inducción como empleo de normas inductivas

La tentativa de justificar la inducción como si fuese una casi deducción se basaba en el principio filosófico de que la manera debida de descubrir una justificación de una inferencia inductiva determinada era la de examinarla minuciosamente, esperando descubrir en ella

---

[4] J. M. Keynes, *A Treatise on Probability* (Londres, 1921), parte III.

[5] Se han hecho intentos de escapar a esta objeción llamando «postulado» a la premisa mayor, con lo cual se quiere decir una proposición que ni se puede saber directamente ni es inferible —ni deductiva ni inductivamente— de proposiciones que sepamos directamente, sino una cuya verdad tenga que *postularse* para justificar otros conocimientos o una creencia razonable. Sin embargo, cuando a una generalización empírica se le llama postulado ello no la hace dejar de ser tan generalización empírica como era antes, ni el bautizar con un nombre nuevo a una proposición es método nuevo alguno de llegar a saberla [esto es, a saber que sea verdadera, lo mismo que hay que entender más arriba en esta misma nota *(T.)*].

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

alguna premisa mayor adecuada y «elíptica», o algunos pasos intermedios de la argumentación que, distinguidos con toda claridad, decidiesen la cuestión de la validez. Este es el procedimiento correcto que hay que emplear para asentar la validez de una inferencia deductiva: en ella, cuando intuitivamente no es patente que la conclusión sea consecuencia lógica de las premisas, es necesario, o bien revelar la existencia de una suposición elíptica o introducir pasos intermedios en la deducción (o ambas cosas), para llegar a convencerse de su validez; pero este enfoque ha llevado a un punto muerto en el caso de la inducción. Separémonos, por tanto, de la inferencia inductiva particular cuya validez queramos asentar y, en lugar de examinarla minuciosamente, comparemos sus rasgos generales con los de otras inferencias inductivas que se presuman válidas; entonces queda claro que todas las inducciones cuya validez queremos asentar son inferencias en las que la conclusión se extrae de las premisas de acuerdo con alguno de unos pocos principios inductivos de inferencia.

Estos principios son los que se debaten en los libros sobre lógica inductiva y sobre metodología científica; y, aunque cabe clasificarlos de varias maneras diferentes, se distribuyen en dos tipos principales, según que se apoyen sobre el volumen de datos favorables o sobre su variedad. En primer lugar están los principios de inducción por enumeración simple, de acuerdo con los cuales se ha de considerar bien asentada una hipótesis si no está refutada por la experiencia y está confirmada por no menos de n casos positivos (los distintos valores de n adoptados dan lugar a los distintos principios de enumeración simple). Después tenemos los principios de eliminación, según los cuales ha de admitirse que una hipótesis esté bien asentada si, no habiendo sido refutada por la experiencia, las otras hipótesis posibles han quedado refutadas —en esta clase se encuentran el método de concordancias y el de diferencias de Mill—; una inferencia inductiva que procediese de acuerdo con un principio eliminativo podría ser considerada como una deducción con una premisa mayor suprimida que aseverase que es verdadera una de las hipótesis del conjunto de ellas de que formen parte la que ha quedado confirmada y las demás posibles, refutadas. Si justificamos la inducción de este modo será preciso que consideremos que la premisa mayor se ha asentado por una inducción previa por enumeración simple; pero, en realidad, estamos dispuestos a utilizar principios de inducción eliminativos en casos en que no lo estamos a considerar bien asentada —ni siquiera plausible— la proposición según la cual las hipótesis posibles están limitadas a ser aquéllas de las que sepamos que estén o confirmadas o re-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

futadas por la experiencia. Utilizamos los principios eliminativos según los cuales se considera bien asentada una hipótesis cuando no solamente no está refutada por la experiencia, sino que ha quedado refutado cierto número de otras posibilidades; y los distintos principios de esta índole corresponden a las distintas maneras de elegir dicho número de otras posibilidades en alternativa.

Los demás métodos inductivos de los tratados siguen uno u otro tipo de principio, de éstos que hemos dado, o una combinación de un principio de un tipo con otro del otro o con un principio deductivo. Así, un método de asentar una hipótesis «funcional» de nivel superior consiste en una inducción por enumeración simple en la que las leyes de nivel inferior se consideran «casos» de aquélla; y el método hipotético-deductivo consiste en deducir la hipótesis en cuestión de otras de nivel superior que se hayan asentado inductivamente. Y los distintos métodos que se emplean para establecer una hipótesis estadística que asevere que cierto parámetro probabilitario tiene un valor determinado combinan principios inductivos de ambos tipos.

Podemos expresar los distintos principios inductivos apoyándonos en la construcción de sistemas deductivos científicos, que en este libro hemos colocado a la cabeza de su panorama del método científico: los principios simplemente enumerativos nos permiten aceptar un sistema cuyas hipótesis de nivel ínfimo estén confirmadas frecuentemente y no hayan sido refutadas nunca, y los eliminativos nos permiten aceptar un sistema cuyas hipótesis de nivel ínfimo no hayan sido refutadas por la experiencia, mientras que sí lo hayan sido las correspondientes a otros sistemas posibles en alternativa con aquél.

Llamaremos «normas inductivas» a las que se sigan para asentar hipótesis generales de acuerdo con principios inductivos de inferencia sobre la base de datos empíricos; todas tienen el rasgo común de exigir una base de experiencia para construir sobre ella, y en ello difieren de otras muchas normas no inductivas empleadas para asentar hipótesis generales —por ejemplo, la de deducirlas de premisas metafísicas—. No entra en las funciones de este libro la de estudiar en detalle las distintas normas inductivas y sus relaciones mutuas, que pueden exponerse de varios modos diferentes: basta para nuestros propósitos que nos demos cuenta de que existe un número limitado de normas inductivas que los hombres de ciencia emplean explícitamente para asentar hipótesis basadas en observaciones, o que podrían emplearse para defender frente a las críticas las hipótesis que hubieren pretendido asentar. La primera tesis de este capítulo es que la justificación de toda inferencia inductiva ha de hacerse apoyándose en el

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

principio de inferencia inductiva que se utiliza en la inducción y no en relación alguna de consecuencia lógica que mediase entre la hipótesis científica que sea conclusión de la inferencia y las premisas —ni siquiera incluyendo entre éstas una premisa mayor «elíptica».

Muchos filósofos contemporáneos, reaccionando contra la tentativa de la tradición lógica de asimilar la inducción a la deducción, se contentan con detenerse en este punto y mirar el hecho de que sea preciso llevar a cabo toda inferencia inductiva de acuerdo con un principio reconocido de inferencia como si constituyese una justificación completa de la inducción; algunos apoyarían esta tesis citando el uso por parte de los científicos —al haber de las hipótesis inductivas—: de expresiones tales como «asentada» y «bien fundamentada»: cuando un hombre de ciencia dice que los datos de que se dispone son suficientes para *asentar* una hipótesis científica, lo que quiere decir es que dichos datos son tales que aquella hipótesis podría inferirse de ellos de acuerdo con alguno de los principios reconocidos de inferencia inductiva; lo que le interesa es la idoneidad de tales datos para semejante fin, pues ello es lo que entraría en litigio si otro hombre de ciencia pusiese en tela de juicio lo «bien fundamentado» de la hipótesis; no se preocupa por la idoneidad del principio de inferencia, ya que da por sentado que constituirá un fundamento común tanto para él como para cualquier otro científico.

Si piensa únicamente en las consideraciones que son oportunas para un científico, el filósofo tiene toda la razón al tomar la cuestión acerca de si una inferencia inductiva es válida o no, y la de si es razonable o no la creencia en una hipótesis científica que aquélla nos proporcione, como la cuestión acerca de si los datos empíricos de que dispongamos son tales que sea posible o no llegar a dicha hipótesis a partir de ellos cuando se sigan los «reglas de proceder» reconocidas. Pero un filósofo no puede evitar la respuesta —de una u otra forma— a la pregunta sobre cuál sea la justificación que haya para utilizar semejantes reglas de proceder reconocidas para realizar inferencias inductivas; y si descarta esta cuestión deja a la vez de ser un filósofo.

Es cierto que puede decir, con Félix Kaufmann, que semejante pregunta carece de sentido, por «no haber una justificación última de estas reglas [las del proceder científico]: no podemos ir más allá de ellas en la discriminación entre decisiones científicas correctas e incorrectas» [6]. Pero decir esto es convertir en elíptico todo enunciado que

[6] *Methodology of the Social Sciences* (Nueva York, 1944), pág. 230; véase también el cap. IV [versión castellana del original alemán (Viena, 1935), del que la

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

atribuya validez a la inferencia inductiva: se le da una referencia ineliminable a las reglas de proceder empleadas y se prohibe toda comparación entre la validez de una inferencia que se haya llevado a cabo basándose en una de estas reglas y la de otra que se haya basado en otra regla. Ahora bien, con frecuencia lo que queremos es elegir entre reglas de proceder diferentes en el estudio de uno y el mismo problema científico —en el último capítulo hemos visto un ejemplo de tal situación, cuando preferíamos un procedimiento a otros posibles para elegir entre hipótesis estadísticas, preferencia que se basaba en razones que, ya fuesen o no convincentes para el lector, sin duda no eran arbitrarias—; incluso Kaufmann admite que podemos justificar el cambio de reglas de proceder refiriéndonos a «reglas de segundo orden»: «al preguntar si una regla para el modo de proceder es correcta o no, presuponemos reglas de segundo orden, etc.» [7]; pero el «etc.» de este autor entraña una regresión infinita, por la cual se justifica una inferencia inductiva apoyándose en una regla de proceder de primer orden, justificada por una de segundo orden, justificada, a su vez, ... Al parecer, Kaufmann ha evitado proponer una «justificación última», que tanto le desagrada, sirviéndonos algo que resulta ser una carencia total de justificación.

En realidad, ciertos filósofos de espíritu tenaz han dado una respuesta a la cuestión de cómo se justifique el uso de los principios reconocidos de inferencia: es la de que tales principios están *reconocidos,* esto es, son los que emplean los científicos de reputación de hoy en día. Pero, aparte del hecho de que la conformidad con la mayoría de la opinión en cuestiones de comportamiento intelectual no posee una justificación última mayor que una conformidad parecida en cuanto al comportamiento moral, este criterio sobre la validez de una inferencia —o sea, el de que ésta se haga de acuerdo con un principio empleado por científicos reputados— no sirve de nada cuando distintos científicos prestigiosos están en desacuerdo en cuanto al principio correcto a emplear para llevar a cabo una inferencia desde los mismos datos empíricos y, en consecuencia, también lo están en cuanto a la conclusión inductiva que pueda deducirse pertinentemente de tales datos; lo cual ha sucedido muy frecuentemente en otros tiempos, y ocurre en los actuales tanto con lo que respecta a las sutilezas involucradas en las selección de los principios a emplear para la «inferencia estadística» cuanto en la división permanente de opiniones —par-

---

edición americana es resumen: *Metodología de las ciencias sociales,* México, Fondo de Cultura Económica, 1946, págs. 61 y sig., 157, 197, 234 y sigs., 372 y sig., 391]

[7] *Op. cit.,* pág. 233 [versión castellana citada, últimas páginas dichas].

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

ticularmente manifiesta en las ciencias biológicas— entre quienes prefieren las inferencias llevadas a cabo directamente a partir de los datos observados, siguiendo principios de enumeración simple y de eliminación, y quienes aprecian más las inferencias que se realizan indirectamente, por el método hipotético-deductivo.

Así pues, no podemos considerar que el consenso de los científicos de fama sea un criterio fundamental satisfactorio acerca de lo idóneo de la utilización de un principio determinado de inferencia inductiva. No obstante lo cual, el hecho de que haya tal comunidad de consenso en cuanto a los principios que sea oportuno emplear para asentar las hipótesis científicas se encuentra en el camino de la búsqueda de justificación; pues ¿por qué hay tal comunidad de consenso? Con seguridad que no ha surgido de una mera imitación de unos hombres de ciencia por otros: debe de haber alguna razón detrás de todo ello.

Cuando formulamos de este modo tal pregunta la respuesta es obvia: el porqué de la utilización de ciertas normas inductivas por los científicos reside en su valor predictivo, en su éxito al proponer hipótesis de las que puedan deducirse consecuencias contrastables por la experiencia que resulten ser verdaderas. Y esto es lo que justifica que sigamos una norma inductiva particular, Π, por la cual realicemos inferencias, a partir de datos observados, en virtud de un principio de inferencia particular, π: es decir, que al seguir esta norma encontremos hipótesis que, de hecho, lleguen a ser confirmadas por la experiencia, y no refutadas por ella. Son buenas normas inductivas las que realizan lo que pedimos de ellas, y nos permiten predecir el futuro y, parcialmente, dominarlo. Lo que justifica una inferencia inductiva cualquiera hecha a partir de datos empíricos conocidos, esto es, el criterio de «validez» de la inferencia, y el del «carácter razonable» de la creencia en la hipótesis que constituya su conclusión inductiva, reside en que el principio de acuerdo con el cual se haya llevado a cabo la inferencia sea tal que las normas que especifiquen su utilización tengan una característica que llamaré «fiabilidad predictiva», y que C. S. Peirce llamó en una ocasión «virtud productiva de verdad».

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

La justificación prediccionista

C. S. Peirce fue quien primero propuso explícitamente una justificación de la inducción, en 1877-78 [8], justificación que en el último cuarto de siglo ha conseguido muchas adhesiones entre los lógicos. Vamos a expresarla de un modo más preciso de como se ha hecho hasta ahora, con objeto de poderla estudiar bien.

¿Qué queremos decir al hablar de unas normas como de algo «predictivamente diable»? En 1878, Peirce presentó un criterio de tal cosa a base de la proporción de inferencias que lleven a conclusiones verdaderas —proporción con respecto a todas las inferencias, a partir de premisas verdaderas, que estén comprendidas por dichas normas—; él encontraba el germen de esta doctrina en Locke, el cual, habiendo hablado de la persona que asiente a un teorema matemático por la autoridad del matemático, sin tomarse «la molestia de atender a la demostración», continuaba diciendo: «en este caso, su asentimiento se funda en la probabilidad de la cosa, pues la demostración es tal que en la mayoría de los casos lleva consigo la verdad» [9]. Peirce adopta este empleo de «probabilidad» de Locke como criterio de validez inductiva: «para una inteligencia lógica, toda argumentación se concibe siempre como miembro de un *genus* de argumentaciones construidas todas de la misma manera y tales que cuando las premisas sean hechos reales sus conclusiones también lo sean. Si la argumentación es demostrativa ocurre siempre de este modo, y si sólo es probable, en la mayoría de los casos. Como dice Locke, la argumentación es '*tal que* en la mayoría de los casos lleva consigo la verdad'» [10]; y, en el artículo siguiente de esta serie, dice que en el caso de las inferencias sintéticas (inducciones), frente a lo que sucede con las inferencias analíticas (deducciones), «sólo sabemos el grado de veracidad de nuestra manera de proceder. Como todo conocimiento procede de la inferencia sintética, hemos de inferir igualmente que toda la certidum-

---

[8] «Illustrations of the Logic of Science», conjunto de seis artículos que apareció en *Popular Science Monthly* y ha sido reimpreso en *Chance Love and Logic* (Londres, 1923) y en *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, vols. 2, 5 y 6 (Cambridge, Mass., 1932-35). *The Philosophy of Peirce*, ed. por J. Buchler (Londres, 1940), contiene íntegros los artículos primero, segundo y cuarto, la mayor parte del tercero y algo del quinto. Citaremos estas obras con las siglas respectivas de *CLL*, *CP* y *PP*.

[9] John Locke, *An Essay concerning Human Understanding* [versión castellana: *Ensayo sobre el entendimiento humano*, México, Fondo de Cultura Económica, 1956], libro IV, cap. 15, § 1.

[10] *CLL*, pág. 67; *CP*, § 2.649; *PP*, pág. 158.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

bre humana consiste meramente en que sepamos que los procesos por los que se hayan derivado nuestros conocimientos son tales que en la mayoría de los casos tienen que haber conducido a conclusiones verdaderas»[11].

Estoy convencido de que esta presentación de la de Peirce de la veracidad de la inferencia inductiva como criterio de su validez está bien encaminada, en cuanto que hace depender la validez inductiva de cierto hecho objetivo acerca de los principios de acuerdo con los cuales se lleva a cabo la inferencia. Pero convertir esta dependencia en una de la proporción de inferencias —comprendidas por la norma— que conduzcan a conclusiones verdaderas es plantearla de una forma que en dos sentidos distintos no es adecuada para nuestra finalidad.

En primer lugar, puesto que la conclusión de una inducción es una hipótesis general, en ningún momento quedará demostrada de modo concluyente: puede quedar asentada por la inducción, desde luego, pero ello no impedirá que se la refute posteriormente si aparecen datos en contrario. Es de desear que nuestro criterio sea tal que haya datos conocidos que demuestren de manera concluyente que se cumplía al menos en algunas de las inducciones que se hayan llevado a cabo con anterioridad[12]; el que el mismo criterio se cumpla asimismo en algunas de las inducciones que se lleven a cabo en el futuro es una proposición que, como es natural, no cabe demostrar, sino que únicamente cabe asentarla por razones inductivas; pero queremos que el conocimiento de que se haya cumplido anteriormente sea independiente de consideraciones inductivas; lo cual puede conseguirse si sustituimos las «conclusiones verdaderas» del criterio de Peirce por «conclusiones que hasta el momento se hayan visto confirmadas por la experiencia y nunca refutadas por ella».

Para expresarlo con mayor exactitud, el criterio de fiabilidad de las normas inductivas, Π, será del siguiente tenor: en cualquier momento t, más de la mitad de las hipótesis que se hayan asentado en virtud de Π con anterioridad a t tendrán la doble propiedad de, 1)

---

[11] *CLL*, pág. 105; *CP*, § 2.693; *PP*, pág. 188.

[12] Los participios pasados de mi segunda cita de Peirce pueden indicar que estaba pensando en este tipo de consideración; y la razón por la que no haya tratado este punto explícitamente acaso sea la de que pretendiera que su criterio comprendiese inferencias con conclusiones no generales, y, por tanto, pretendiera también, tomando como clase de referencia todas las inferencias posibles de este género, vincular la «probabilidad» de LOCKE-PEIRCE con un enfoque de la probabilidad de sucesos a base de una frecuencia límite. Véanse *CLL*, pág. 68, *CP*, §§ 2.650 y sig., y *PP*, página 159.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

no haber quedado refutadas empíricamente en ningún instante entre el momento de haber sido asentadas y *t*, y 2) haber quedado confirmadas empíricamente al menos una vez entre el momento en que hubieren quedado asentadas y *t*.

Pero este criterio todavía no es satisfactorio. Lo que buscamos y queremos es un criterio tal que podamos tener bastante confianza de que se haya cumplido en las inducciones llevadas a cabo con anterioridad al emplear algunas —al menos— de las normas inductivas científicas reputadas. Mas, ¿podemos estar seguros, con respecto a ninguna de estas normas, de que más de la mitad de las hipótesis asentadas en virtud de ella hayan quedado confirmadas empíricamente y no hayan sido empíricamente refutadas desde que se las asentó? Muy apresurado sería el historiador que se atreviese a mantener semejante proposición: para hacerla de algún modo plausible sería necesario reducir la clase de referencia, desde la de todas las inferencias hechas en el pasado y comprendidas por la norma en cuestión a la de todas las hechas por algún científico prestigioso después de haber probado éste gran cantidad de otras hipótesis posibles y haber quedado éstas refutadas por la experiencia; pues uno de los hechos más conocidos de la historia de la ciencia —tan notorio como el de su éxito predictivo— es que el descubrimiento científico (esto es, el que quede bien asentada una hipótesis científica) es en gran medida una cuestión de paciencia y perseverancia en la invención, y que hay poquísimos campos en los que el científico espere que pueda sobrevivir a la confrontación con la experiencia la primera hipótesis que se le ocurra para comprender los datos conocidos. Mas, incluso después de haber perfilado así lo que habíamos dicho, podremos carecer de datos históricos suficientes para justificar la aserción de que la mayoría de las hipótesis inventadas por los científicos tras muchas decepciones estén confirmadas y no refutadas; y, sobre ello, la limitación de la clase de referencia para que sólo incluya estas hipótesis es excesivamente arbitraria para utilizarla como criterio satisfactorio de la fiabilidad de unas normas inductivas.

Para escapar a esta dificultad hemos de abandonar en el criterio de Peirce, según creo, el requisito de que la *mayoría* de las hipótesis asentadas empleando las normas inductivas tenían que estar confirmadas y no refutadas: en su lugar exigiremos solamente que *muchas* de ellas estén confirmadas y no refutadas; sin embargo, puesto que este requisito se satisfaría si hubiese un buen grupo de hipótesis asentadas antiguamente y dotadas de esta propiedad a la vez que no lo cumpliesen las hipótesis recién establecidas, es necesario exigir que

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

haya muchas hipótesis confirmadas y no refutadas entre todas las asentadas en cualquier período de tiempo a partir de una fecha fijada cualquiera. Con lo que el criterio adopta una forma algo complicada:

En cualquier momento, t, posterior a un momento dado, t_0, y en cada intervalo temporal de una duración prefijada de años, d, situado en el intervalo $[t_0, t]$, es cierto que muchas de las hipótesis asentadas en virtud de las normas II durante el intervalo de d años tendrán la doble propiedad de, 1) no haber quedado refutadas empíricamente (salvo que no haya hipótesis de esta clase) en ningún momento desde aquél en que se las hubiere asentado y t, y 2) haber quedado confirmadas empíricamente al menos una vez entre el momento de haber sido asentadas y t.

En este criterio se encuentran tres elementos arbitrarios. El primero es el instante fijo t_0, para el cual podemos tomar, a nuestro gusto, la fecha de la astronomía babilónica, la de Arquímedes o la de Galileo, y que introducimos para que los datos aportados por la Historia puedan basiar para asentar la verdad de este criterio cuando se lo aplique a normas inductivas reputadas; el segundo es la longitud que fijemos para el intervalo d, que puede ser, por ejemplo, de uno o de diez años; en cuanto al tercero, consiste en el significado de la vaga palabra «muchas». El elemento segundo y el tercero están relacionados entre sí, pues cuanto más breve sea el intervalo tanto menor habrá de ser el número mínimo comprendido por «muchas», con objeto de que podamos saber que, confinado el criterio a épocas anteriores, se cumplía por las normas inductivas reputadas.

Hay también un elemento implícito arbitrario en la clase de las personas que empleen dichas normas y para las que esté asentada la verdad del criterio en tiempos pasados: podemos considerar que esta clase sea la de todos los seres humanos, la de los dotados de instrucción científica, o cualquiera otra clase limitada de personas; y los demás elementos arbitrarios habrán de reajustarse para que sean apropiados a la clase correspondiente.

Para ahorrar palabras, llamemos norma *eficaz* a toda norma que satisfaga este criterio (en la que se hayan asignado valores adecuados a los elementos arbitrarios), y llamemos asimismo norma *anteriormente eficaz* a cualquiera que satisfaga un criterio igual al anterior, pero en el que se haya sustituido «en cualquier momento, t», por «en cualquier momento, t, no posterior al presente y». Es un hecho histórico que las normas inductivas de prestigio científico son anteriormente eficaces, y es una hipótesis general que, además, son eficaces.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Una norma II puede dejar de ser eficaz en el futuro de dos modos distintos. Uno consiste en que haya una cantidad suficiente de hipótesis asentadas en algún período anterior en virtud de II, que queden refutadas, con lo que la afirmación de que no se refutarán queda contradicha; y la otra es que, aun permaneciendo confirmadas y no refutadas dichas hipótesis antiguamente asentadas, haya un número suficientemente grande de hipótesis que se establezcan en el futuro en virtud de II que resulten refutadas, con lo que la afirmación de que muchas de ellas no se refutarán quedará contradicha. Esto es, una norma inductiva puede fallar en el futuro bien porque sus éxitos anteriores resulten ser fracasos a fin de cuentas o porque deje de tener otros éxitos en el futuro.

La posibilidad de refutación futura disipa la sospecha, que podría abrigarse en otro caso, de que, al planear un criterio de eficacia de modo que sepamos actualmente que las normas inductivas prestigiosas son anteriormente eficaces, hayamos hecho que la eficacia de una norma fuese consecuencia lógica de su eficacia anterior, de suerte que, sin duda alguna, las normas inductivas reputadas habrían de ser en el futuro tan eficaces como habían sido en el pasado. Mas, aun cuando la palabra «muchas» es muy vaga, si ninguna hipótesis antiguamente asentada, o si ninguna que llegase a asentarse, permaneciese sin refutar en el futuro, quedaría empíricamente descubierto, por los hechos futuros, que la norma inductiva no era eficaz; de modo que la eficacia de una norma inductiva es una proposición empírica, que no se sigue de la eficacia anterior de dicha norma.

Si en el futuro se encuentra que una norma inductiva, II, no es eficaz, ello no implica que en todo momento sea irrazonable creer una hipótesis cuya única razón de credibilidad sea el haber sido asentada en virtud de la norma II: no será razonable creerla en el sentido de «razonable» para el cual el criterio está constituido por la eficacia de la norma, pero muy bien puede ser razonable de otro modo. O, más bien, la verdad es que si una norma II que actualmente sea anteriormente eficaz resulta en el futuro perder esta propiedad —con lo que ya no será eficaz—, en realidad no sabremos qué decir con respecto al carácter razonable o no de la creencia en las hipótesis asentadas con ayuda de tal norma. Pues si el cesar de ser eficaz de II no se debiera a haberse refutado las hipótesis asentadas anteriormente en su virtud, sino a la refutación de nuevas hipótesis que se asienten por medio de ella, nos sentiríamos inclinados a decir que era todavía razonable creer las hipótesis antiguas, pero que no lo era creer las nuevas establecidas por su mediación; situación que podría expresarse dicien-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

do que la antigua norma inductiva antes fructífera había hecho cuanto podía en la tarea de sonsacar a la Naturaleza sus secretos, pero que se había desgastado y que era preciso descubrir y aplicar normas nuevas; y no aparecería, pues, como un fracaso de una norma particular, sino más bien como agotamiento de su campo de aplicación fructuosa. Por otra parte, estaríamos también inclinados a decir que el fallo de dicha norma inductiva en cuanto a suministrarnos nuevas hipótesis no refutadas hacía ver que su utilización anterior había sido injustificada, y que sus supuestos éxitos pasados habían sido simplemente coincidencias afortunadas. Y no tenemos manera satisfactoria de elegir entre estas dos consideraciones opuestas. (También habría tendencias parecidamente opuestas con respecto a lo que habría de decirse si la falta de eficacia de II se debiera a la refutación de las hipótesis asentadas anteriormente en virtud suya, mientras continuase proporcionándonos en el futuro hipótesis confirmadas.)

En caso de que la norma inductiva fracasase simultáneamente en ambos aspectos, de modo que ni las hipótesis antiguas ni las nuevas asentadas por su medio permaneciesen sin refutación, nos sentiríamos fuertemente inclinados a decir que sería positivamente irrazonable creer tales hipótesis; mas supongamos que todas las normas inductivas fracasasen simultáneamente: entonces no sería razonable, desde luego, creer ninguna hipótesis inductiva ni en el sentido que empleaba el criterio de eficacia, ni en los sentidos modificados que hemos descrito en el parágrafo anterior; pero acaso podríamos llamarlo «razonable» en un nuevo sentido de esta palabra. Pues su sentido cuando se la aplica a la creencia de conclusiones inductivas es distinto del que tiene cuando se la aplica a la creencia de proposiciones lógicamente necesarias, y el primero —que se refiere a la utilización de normas de inferencia inductiva— se ha formado justamente porque se ha encontrado que tales normas habían sido anteriormente eficaces; si se descubriera que no eran eficaces se eliminaría el motivo para aplicar el epíteto «razonable» a creencias de hipótesis asentadas por medio de dichas normas, pero podría encontrarse otro uso al mismo epíteto aplicado a las hipótesis inductivas, y también un fundamento racional para semejante uso. Mas es fútil especular sobre las creencias inductivas que llamaríamos «razonables» y sobre las que llamaríamos «irrazonables» si todas nuestras normas inductivas actuales demostrasen ser ineficaces; pues nuestro lenguaje está apoyado en el supuesto de su eficacia, y si todas se convirtiesen en ineficaces careceríamos de criterio para aplicar dicho término.

Podemos expresar esta situación —aunque de modo insuficiente—

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

diciendo que el criterio que hemos estado exponiendo acerca de la validez de las inferencias inductivas y del carácter razonable de la creencia en su conclusión, esto es, el de la eficacia de la norma inductiva que entre en cuestión, es un criterio *suficiente*, pero no *necesario*. Y el porqué de su carácter inadecuado estriba en que esta forma de hablar presupone la existencia de un criterio necesario del carácter razonable de las creencias en hipótesis inductivas; lo cual equivaldría a que fuese un criterio suficiente del carácter irrazonable de las hipótesis —y sería muy aventurado suponer que este último criterio estuviese dado por la falta de eficacia de la norma inductiva del caso.

En este capítulo mantenemos la tesis de que la eficacia de la norma inductiva correspondiente es una condición suficiente para que se pueda aplicar el adjetivo «válida» a una inferencia inductiva a partir de datos conocidos, y para que quepa aplicar el de «razonable» a la creencia de la conclusión de semejante inferencia; pero si esta condición falla —a saber, la eficacia de la norma inductiva—, no hemos de emplear este fracaso como condición suficiente de la aplicación del adjetivo «no válida» a dicha inferencia, ni de la del adjetivo «irrazonable» a la creencia de su conclusión: si esta situación llega a presentarse puede que utilicemos algún criterio nuevo en que hoy no pensamos. Los libros de lógica han tenido en cuenta casi siempre únicamente definiciones de los términos que se cumplan cualesquiera que sean los hechos; aquí nos ocupamos de una definición parcial —en forma de un criterio suficiente— cuya aplicabilidad dependa de la verdad de una situación de hecho empírica: si la norma II es eficaz, su uso para inferir una conclusión inductiva a partir de datos empíricos convierte la inferencia en «válida» y la creencia de ella en «razonable»; pero si no es eficaz nos callamos. Para justificar la inducción se requiere un criterio de validez de las inferencias inductivas, pero no se requiere criterio alguno de no validez de estas inferencias.

Debilidad del criterio de eficacia

Hemos abandonado el criterio de Locke-Peirce de veracidad de una inferencia —a base de que estén confirmadas la mayoría de las inferencias de cierto tipo— a favor de otro que sustituye «la mayoría de los casos» de aquel criterio por «muchos casos». Este nuevo criterio constituye una condición mucho más débil que la de Locke-Peirce; y cabe que se lo critique por ser demasiado débil, incluso

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

tras de haberlo reforzado hasta convertirlo en el requisito de que haya muchas hipótesis asentadas durante todo intervalo temporal de duración prefijada a partir de cierta fecha fija del pasado que estén confirmadas y no refutadas. Crítica que podría formularse diciendo que, aunque pueden definirse de este modo «válida» y «razonable», si se quiere hacerlo así, esta definición hace que los conceptos sean tan débiles que carezcan de valor pragmático: lo que se quiere, se dirá, es emplear de tal modo el adjetivo «razonable» que su aplicación a la creencia haga referencia a su aplicación a la acción, de suerte que sea razonable llevar a cabo una acción de la que sea razonable creer que constituye medio para un fin que se pretenda alcanzar; pero si todo lo que puede decirse en favor del empleo de una norma inductiva es que predice frecuentemente con éxito, ¿acaso constituye esto justificación para basar las acciones en creencias alcanzadas mediante esta norma? Otras normas mediante las que se llegue a ciertas creencias podrían tener más éxito predictivo, y en este caso sería mejor, sin duda alguna, emplearlas en vez de las normas inductivas; o, en cualquier caso, preferirlas a éstas en caso de que los resultados obtenidos con unas y con otras se encuentren en conflicto entre sí.

La respuesta a esta crítica reside en que el porqué de que sea posible proponer plausiblemente una condición tan débil como la eficacia (especificada como hemos hecho en este capítulo) para la validez de las inferencias inductivas consiste en que no hay norma para asentar hipótesis científicas que sea eficaz, incluso en este sentido tan débil, fuera de las normas inductivas de prestigio científico. No se trata de que estas últimas tengan competidores en la carrera de la fiabilidad predictiva, de forma que sería irrazonable preferirlas a menos que pudiésemos estar tranquilos en cuanto a lo veloces que sean en tal carrera: las normas no inductivas ni echan a andar. No hay normas generales, aparte de las inductivas, acerca de las cuales tengamos buenas razones para creer en su eficacia anterior, esto es, que en cualquier intervalo de tiempo de duración fija —a partir de cierta fecha anterior prefijada— hayan asentado muchas hipótesis que hayan quedado confirmadas y no refutadas (siendo iguales dichos intervalos y aquella fecha que los empleados al especificar el criterio de eficacia, según el cual no cabe duda de que las normas inductivas científicas reputadas han sido anteriormente eficaces).

Algunos lógicos de la escuela de Peirce (por ejemplo, William Kneale)[13] dicen que no existe ningún otro modo —al menos, siste-

---

[13] *Probability and Induction*, págs. 234, 235 y 259.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

mático— de intentar la consecución de predicciones verdaderas que siguiendo una norma inductiva. A mi juicio, esto es pasarse: podemos *intentar* hacer predicciones verdaderas siguiendo la norma de consultar a un adivino elegido de una forma predeterminada, la de respirar hondamente seguido por una asociación libre, o cualquier otra norma sistemática no inductiva que se nos ocurra imaginar. Pero la experiencia nos ha enseñado que ninguna de estas formas nos hará tener éxito, que ninguna de ellas es anteriormente eficaz, y que, por tanto, ninguna es eficaz: así pues, lo que aboga por el empleo de las normas inductivas reconocidas no es el hecho negativo de que no haya ningún otro método sistemático de *intentarlo*, sino este otro, también negativo, de que no hay ningún otro método de *tener éxito* cuando se pretenden hacer predicciones verdaderas, combinado con el hecho positivo de que sea frecuente tener éxito siguiendo normas inductivas. Es preciso leer la justificación del empleo de las normas inductivas dentro del contexto de que sabemos que otras normas predictivas son ineficaces.

Puede objetarse a esta argumentación que implica el supuesto de que las normas inductivas que gocen actualmente de buena reputación entre los hombres de ciencia sean las únicas que sería razonable jamás considerar eficaces. Pero no es así. El que la norma II sea eficaz es una hipótesis inductiva que ha de asentarse por inducción, siguiendo un principio de enumeración simple basado en su eficacia anterior; y una norma que no se haya probado nunca puede someterse a contraste en cuanto a su capacidad de proporcionarnos hipótesis confirmadas y no refutadas: si muchas de éstas se confirman y no se refutan, satisfará el criterio de eficacia anterior, y cabrá justificar su introducción en nuestro repertorio inductivo para asentar hipótesis diciendo que hemos asentado su eficacia de acuerdo con una norma inductiva eficaz de enumeración simple. Supongamos, por ejemplo, que yo empiezo por no aceptar hipótesis que se apoyen en la energía con que las asevere el sabio *M*, pero que, acaso por curiosidad, tomo nota de las que asevere a lo largo de cierto período; si muchas de ellas se confirman y no se refutan durante el mismo período, la norma inductiva de enumeración simple puede hacer que sea razonable en mi caso creer las hipótesis que asevere *M* por la simple razón de haber sido aseveradas por él; y habré llegado de este modo a un procedimiento predictivo nuevo, que valdrá mientras dure. El decir que, de hecho, actualmente no se conoce norma predictiva alguna que sea anteriormente eficaz excepto las normas inductivas no implica que no se puedan descubrir normas de esta índole. Y, en realidad, de este

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

modo se han descubierto las normas inductivas de eliminación y la de asentar leyes funcionales —esta última hace sólo unos trescientos cincuenta años—, cuyo empleo está justificado por su eficacia, asentada en cada caso por medio de una norma de enumeración simple. De modo análogo puede esta última norma asentar en el futuro la eficacia de nuevas normas predictivas; y, si ello acontece, éstas entrarán en competencia con las normas inductivas actuales bien reputadas, y nos veremos obligados a elegir cuál norma hemos de emplear en caso de que lleven a resultados que entren en conflicto. Pero hoy no hay competición alguna.

La pretendida circularidad de la justificación prediccionista de la inducción

Podemos expresar sin gran precisión la tesis de este capítulo diciendo que lo que justifica la inferencia inductiva consiste en el hecho de que unas normas que nos hagan pasar, de acuerdo con un principio inductivo, de creencias verdaderas a creencias en hipótesis generales, nos permiten frecuentemente aceptar hipótesis que están confirmadas por la experiencia, y no refutadas por ella. Muchos filósofos piensan que esta tesis implica un círculo vicioso en la manera de considerar el asunto. Su argumentación es como sigue: según la tesis prediccionista, la razón para creer una conclusión inductiva consta de dos premisas, una los datos en favor de la conclusión apropiados al principio inductivo que sea, y la otra la proposición según la cual la norma de realizar inferencias de acuerdo con tal principio inductivo es una norma eficaz; y el carácter razonable de la creencia de la conclusión se debería al carácter razonable de la creencia de cada una de estas premisas; pero —se dice— la segunda premisa es, a su vez, una hipótesis general, y el carácter razonable de la creencia en ella sólo podría asentarse mediante otro razonamiento inductivo; mas esta segunda inducción exigiría como premisa por su parte, análogamente, la proposición según la cual la norma de llevar a cabo inferencias de acuerdo con el principio inductivo allí empleado es eficaz; premisa que sería una hipótesis general, que precisaría ser justificada mediante una tercera argumentación inductiva. Así pues, o bien habrá una regresión infinita, con una serie infinita de normas inductivas tales que para asentar la eficacia de cada una se necesitaría asentar la de la norma siguiente, o llegaremos, subiendo en esta sucesión de

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

normas inductivas, a una tal que para asentar su eficacia se requiera que esté asentada su propia eficacia.

Puesto que la razón que podría darse de la eficacia de una norma inductiva cualquiera, exceptuando la de la inducción por enumeración simple, sería que con frecuencia había sido con anterioridad predictivamente fiable, esto es, que había demostrado ser anteriormente eficaz, para asentar la eficacia de otra norma cualquiera se precisaría asentar la de la norma inductiva de enumeración simple. (En lo que respecta a esta argumentación es innecesario distinguir entre diversas normas de enumeración simple, y por ello nos referiremos a ellas en singular, llamándolas norma de inducción por enumeración simple.) Por consiguiente, para asentar la eficacia de esta última se requeriría que se tomase como premisa su propia eficacia; con lo cual en este dilema nos empitonaría el cuerno de la circularidad. Si nos cuidamos de emplear la palabra «presuposición» podemos expresar el argumento dirigido contra la justificación prediccionista diciendo que, según ésta, la validez de toda inferencia inductiva *presupone* la de la inducción por enumeración simple, y que la validez de esta última *presupone* su propia validez; lo cual, se alega, constituye un círculo vicioso en la justificación de la inducción.

Antes de tratar de responder a esta imputación de circularidad viciosa permítase al prediccionista que replique con un *tu quoque:* la acusación de circularidad no se enfrenta solamente con la justificación prediccionista de la inducción, sino igualmente con cualquier presentación de la validez de la inducción que la haga depender de una premisa que sólo pueda asentarse inductivamente. La tentativa de Keynes de justificar la inducción por medio de una teoría probabilitaria entra en esta clase: en la teoría keynesiana la confirmación inductiva sirve solamente para aumentar la probabilidad de las hipótesis multiplicándola por otra probabilidad, de suerte que la hipótesis que tenga una «probabilidad previa» igual a cero tendrá también una «probabilidad subsiguiente» de valor cero, por muchos datos que haya a su favor; y la única manera que hay de garantizar que toda hipótesis tenga una probabilidad previa mayor que cero es asignar cierta probabilidad mayor que cero a una proposición que limite el número de hipótesis posibles (por ejemplo, el principio keynesiano de variedad independiente limitada) [14]; pero semejante proposición es, a su vez, una hipótesis empírica, que pide una justificación inductiva: de modo que la justificación que da Keynes de la inducción

[14] J. M. Keynes, *A Treatise on Probability*, cap. XXII.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

constituye un círculo vicioso —a menos que se corte el círculo por el impropio expediente de «postular» la hipótesis empírica de que se tiene menester.

Sin embargo, el hecho de que muchas otras justificaciones de la inducción intentadas presenten el flanco a la acusación de circularidad viciosa no exime al prediccionista de tratar de mostrar que este cargo no gravita contra su presentación. Hemos de intentar ahora este alegato defensivo.

La primera jugada o paso de esta oración de descargo es que la proposición «presupuesta» en la justificación prediccionista de las inferencias inductivas no funciona en ésta como premisa adicional: la inferencia inductiva que lleva a la proposición de que la inducción por enumeración simple constituye una norma eficaz no emplea esta misma proposición como premisa, y por ello no es circular en el sentido —de una *petitio principii*— de pretender que infiera una conclusión de un conjunto de premisas entre las que se halle la misma conclusión.

Este punto es tan importante que conviene presentarlo con la mayor precisión posible. Nos estamos ocupando del tipo de circularidad —si es que hay alguna— que esté involucrado en el asentar la validez de la inducción por enumeración simple valiéndose de una inducción por enumeración simple. Mediante unos cuantos símbolos abreviaremos el estudio.

Sea Π la norma inductiva de adjuntar la creencia de una hipótesis h a la creencia de un conjunto de proposiciones que constituyan colectivamente unos datos en π a favor de h (esto es, unos datos adecuados para inferir h de acuerdo con el principio de inferencia π, que será el de inducción por enumeración simple) [15].

Sea e la proposición de que la norma Π es eficaz.

Pues bien; decir que la verdad de e justifica el empleo de la norma inductiva Π, no es decir que el principio π, de inducción por enumeración simple, exija que se adjunte e, como premisa adicional, a los datos a favor —adecuados, por lo demás—: si ello ocurriese, para inferir e por medio del principio π se necesitaría la inclusión de e entre las premisas que creyésemos; y entonces la pretendida inferencia no sería inferencia de clase ninguna, no digamos una inferencia válida, ya que sería proclamar que se asentaba la creencia de una proposición que era ya una de las premisas que se creía. Mas,

[15] Hasta ahora he usado en este capítulo la letra mayúscula griega Π para denotar una norma inductiva cualquiera; pero desde ahora en adelante esta definición restringirá su empleo a la denotación de la norma inductiva de enumeración simple.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

puesto que *e* no funciona en la argumentación como premisa que haya de ser creída juntamente con las demás premisas, el razonamiento —por medio del principio π— que pasa de los datos en π a favor de *e* a *e* no comete la falacia de la *petitio principii*, sino que se trata de una inferencia genuina, en la que se adquiere la creencia de una nueva proposición que antes no se creía.

La circularidad del argumento tiene un carácter más alambicado: se trata de la que está entrañada en que se justifique el empleo de un principio de inferencia por la verdad de una proposición que pueda únicamente asentarse empleando dicho mismo principio. Para expresar la cuestión con los símbolos hemos utilizado lo siguiente:

La verdad de *e* justifica el empleo de la norma II; es decir, para toda *h*, la verdad de *e* justifica que adjuntemos la creencia de *h* a la creencia razonable en los datos en π favorables a *h*.

De aquí se sigue, sustituyendo *h* por *e*: la verdad de *e* justifica que adjuntemos la creencia de *e* a la creencia razonable en datos en π a favor de *e*. Dicho de otro modo: si *e* es verdadera, está justificado que adjuntemos la creencia de *e* a la creencia razonable en los datos en π a favor de *e*.

No voy a negar que en este enunciado se encuentra cierta circularidad, pero se trata de un tipo peculiar de ella cuyo carácter vicioso no es evidente, en modo alguno: no se comete en él la falacia de la *petitio principii*, como habría ocurrido en caso de que hubiéramos dicho que, *si se creyese* o *razonablemente*, estaría justificado que adjuntásemos la creencia de *e* al *corpus* de creencias razonables de la persona que sustente aquella creencia; pues en nuestro enunciado la condición suficiente para que adjuntemos la creencia de *e* no es que creamos una premisa, sino que una proposición empírica sea verdadera, y la circularidad peculiar de que hemos hablado consiste en que la *verdad* de la conclusión de una inferencia es una condición suficiente para la validez de la inferencia. Llamemos «circularidad eficaz» a la de este tipo, ya que en los casos en que estamos interesados la condición suficiente es la eficacia de la norma inferencial; entonces nos hallamos ante la cuestión de si la presencia de una circularidad eficaz convierte en no válida una inferencia, o ante la de si impide que una inferencia sea, en realidad, una inferencia genuina.

En este momento merece la pena advertir que hay inferencias deductivas en las que la proposición que constituye exactamente la conclusión misma de la inferencia es condición suficiente para la efica-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

cia del principio de inferencia[16]; pero en este caso la proposición que es condición para la eficacia de dicho principio —deductivo— de inferencia tiene que ser una proposición lógicamente necesaria, y aunque —en el caso que estamos considerando— se supone que esta última está asentada por deducción a partir de otras proposiciones lógicamente necesarias, dentro de un sistema puramente deductivo que emplee como principio de inferencia uno cuya condición de eficacia sea aquella proposición lógicamente necesaria misma, ésta, sin embargo, podría asentarse siempre de una forma que no entrañase dicha eficacia: pues no existe un orden necesario en la deducción mutua de las proposiciones lógicamente necesarias. En cambio, en nuestro caso inductivo la proposición que afirma la eficacia de la norma de la inducción por enumeración simple es una proposición lógicamente contingente, que no puede ser asentada de otra manera que utilizando la norma de la inducción por enumeración simple.

Vayamos ahora al punto de la «circularidad eficaz». ¿Qué hay de malo en que la eficacia de una norma de inferencia justifique la inferencia que conduce —como conclusión— a dicha eficacia?; ¿qué hay de malo en llegar a la creencia de una proposición por medio de una inferencia que se siga de acuerdo con un principio cuya validez como principio de inferencia esté atestiguada por la misma proposición que constituya la conclusión de la inferencia? Para responder a estas preguntas es necesario que paremos mientes en lo que queremos decir exactamente al hablar de «inferencia» y de que una inferencia sea «válida».

Condiciones de una inferencia válida y del carácter razonable de una creencia inferida

La inferencia es el paso del pensamiento de la creencia —o de la creencia racional— de un conjunto de proposiciones, llamadas colectivamente *premisa* de la inferencia, a la de una proposición llamada *conclusión* de la misma, estando relacionadas premisa y conclusión por un principio de inferencia. La cuestión de la validez de los pro-

---

[16] Tenemos un ejemplo de tal cosa en la deducción, dentro de un sistema deductivo, de la proposición $(p(p \supset q)) \supset q$ a partir de las dos proposiciones

$$(p(p \supset q)) \equiv pq, \qquad ((p(p \supset q)) \equiv pq) \supset ((p(p \supset q)) \supset q)$$

utilizando un principio de separación «implicativo», de cuya eficacia es condición la verdad necesaria de $(p(p \supset q)) \supset q$.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

cesos de inferencia es la misma que la de la justificación que tenga adjuntar la creencia de la conclusión al conjunto de creencias razonables de una persona (su «*corpus* racional»), en el caso de que la premisa de la inferencia forme parte de su *corpus* racional, o que la de la justificación que tenga asociar la creencia de la conclusión con la creencia de la premisa —en caso de que esta última no forme parte de dicho *corpus*— de tal modo que la creencia de aquélla esté inferencialmente apoyada por la creencia de ésta. Y, a la inversa, la cuestión del carácter racional de cualquier creencia es el mismo —excepto en el caso en que dicho carácter consista en que se sepa directamente que la proposición creída es verdadera— que la de la validez de una inferencia por medio de la cual pudiera apoyarse tal creencia [17].

Pueden darse diversos tipos de criterios de la validez de inferencias, o del carácter razonable de una creencia apoyable por medio de una inferencia. Para evitar complicaciones debidas a diferencias de matiz en el sentido de las palabras consideradas, estudiaremos en primera instancia estos posibles conjuntos de criterios bajo forma de una clasificación abstracta.

Las dos proposiciones pertinentes al caso son la premisa de la inferencia, p, y la proposición, r, que asevere la eficacia de la norma inferencial que emplee el principio de inferencia de que se trate para pasar de la premisa p a la conclusión q. Y se obtienen los posibles criterios de validez de una inferencia que vaya de p a q, atendiendo a las combinaciones posibles de la creencia —o de la creencia racional— de p con la verdad de r o con la creencia —o la creencia racional— de r. (No tomaremos en consideración las combinaciones posibles con la verdad de p, ya que la verdad de la premisa no es pertinente en lo que respecta a la validez de una inferencia que se haga a partir de ella, aunque sí lo es en cuanto a la cuestión de si una inferencia que lleve a una conclusión constituye o no una *demostración* de ésta [18].)

Hay diez posibilidades en lo que respecta a los criterios suficientes de validez de la inferencia realizada por una persona B, que pase de la premisa p a la conclusión q de acuerdo con un principio de in-

[17] Y no «esté apoyada», ya que una creencia puede ser razonable si quien la crea la apoyaría mediante una inferencia si el carácter razonable de tal creencia se pusiera en duda, aunque de hecho no haya llegado a ella por medio de una inferencia.

[18] En esta cuestión estoy en desacuerdo con W. E. Johnson, a cuyo estudio en su *Logic, Part II* (Cambridge, 1922), cap. I, debe mucho el modo en que trato la validez de la inferencia.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

ferencia tal que la eficacia de su utilización esté aseverada por la proposición r [19]:

I. B cree p y cree r;
II. B cree p y cree razonablemente r;
III. B cree p, y r es verdadera;
IV. B cree p y cree r, y r es verdadera;
V. B cree p y cree razonablemente r, y r es verdadera;

VI. B cree razonablemente p y cree r;
VII. B cree razonablemente p y cree razonablemente r;
VIII. B cree razonablemente p, y r es verdadera;
IX. B cree razonablemente p y cree r, y r es verdadera;
X. B cree razonablemente p y cree razonablemente r, y r es verdadera.

Los criterios VI-X son posibles criterios de validez de las inferencias que se consideren justificables cuando se adjunte la creencia de q al conjunto de creencias razonables de B, mientras que los I-V lo son de la validez de las inferencias que se consideren justificables cuando hagan que la creencia de q acompañe a la creencia de p que tenga B; y hasta cierto punto es una cuestión de gusto cuál de los cinco criterios de cada caso se escoja como *el* criterio de validez de la inferencia: las expresiones «inferencia válida» y «creencia razonable» no están suficientemente fijadas por el uso ordinario para que pueda excluirse desde el comienzo ninguna de estas posibilidades.

Pero algunas de ellas convertirían en circulares ciertas inferencias, y será menester excluirlas en beneficio de la causa de éstas: de otro modo se las haría no válidas, no por no satisfacer ninguno de los criterios, sino por entrañar un círculo vicioso. Las inferencias que dejarían de tener validez por razón de su circularidad serían las que satisficieran cualesquiera de las condiciones

I-X, en caso de que la creencia de p por B incluyese su creencia de q,

I, II, IV, V, VII y X, en caso de la creencia de r por B incluyese su creencia de q.

Importa advertir que la creencia de r por parte de B puede incluir la creencia de q sin que por ello se hagan circulares las inferencias que satisfagan las condiciones VI a IX, ya que estas inferencias

[19] Al decir que son criterios suficientes dejamos a salvo la posibilidad de un círculo vicioso, para cuyo debate es preliminar esta clasificación.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

pretenden adjuntar q al conjunto de creencias razonables de B, y el hecho de que q sea ya una proposición creída por B no invalida una inferencia que proponga pasar q del grupo de las *creencias* de B al de sus *creencias razonables* [20].

Volvámonos ahora al caso de la inferencia inductiva. En este caso suponemos que se cree razonablemente p, formada con los datos en favor de la hipótesis inductiva, q; de suerte que el criterio de la validez de la interferencia será una de las posibilidades VI-X. Supongamos que la conclusión de la inferencia, q, es la proposición que afirma la eficacia de una norma de inducción por enumeración simple, y que la inferencia se lleva a cabo siguiendo una inducción por enumeración simple; entonces la inferencia no será válida, debido a circularidad, sólo en caso de que se admita que su condición de validez es o VII o X: pues únicamente en estos dos casos la creencia razonable de B en la conclusión de la inferencia formará parte de su creencia razonable en la eficacia de la norma inferencial. Por tanto, si se adopta uno cualquiera de los otros tres criterios posibles de validez de inferencias —esto es, el VI, el VIII o el IX— no habrá circularidad de ninguna clase al inferirse una conclusión que afirme la eficacia de la norma inferencial.

Habiendo reducido a tres el número de posibilidades, podemos muy bien darles nombres específicos. Llamemos a las inferencias (que conduzcan a una creencia razonable de la conclusión) «subjetivamente válidas» si satisfacen la condición VI (es decir, si VI es condición suficiente de su validez), «objetivamente válidas» si satisfacen la condición VIII y «tanto subjetiva como objetivamente válidas» si satisfacen la IX. (La justificación del empleo de la norma de la inducción por enumeración simple que se apoya en su eficacia —según hemos hecho— utiliza el criterio VIII, de validez objetiva, para la inferencia que lleva a la hipótesis de su eficacia.) Por tanto, la inferencia que lleve a cabo una persona B será objetivamente válida en cuanto que B crea razonablemente los datos en favor de la hipótesis y en cuanto que la hipótesis que justifique el principio de inferencia sea verdadera; y no forma parte de la condición para la validez (la «validez objetiva») de la inducción cuestión alguna acerca de su creencia, razonable o no, de la hipótesis misma.

Puede tenerse la sensación, sin embargo, de que no baste semejante validez objetiva, y de que una inferencia no pueda ser propia-

---

[20] Algunas interpretaciones de la inferencia la limitarían a ser el paso del pensamiento que condujera a creer una proposición antes no creída; pero esto parece involucrar una definición de inferencia de estrechez poco deseable.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

mente válida a menos que quien infiera tenga de alguna forma conocimiento del principio de acuerdo con el cual esté realizando la inferencia, y de lo apropiado que sea para este fin. Mas el que se considere suficiente o no la validez objetiva depende de si la validez de la inferencia se mira, como si dijéramos, desde fuera o desde dentro. Cuando se la mira desde fuera la persona que hace la inferencia es como una máquina de razonar. Primeramente es preciso introducir en ella un conjunto de proposiciones que formen, todas juntas, los datos en π a favor de *e*, con lo que tomará la «posición» correspondiente a tener una creencia razonable de tales datos; y luego se la pone en marcha de acuerdo con su propio principio de funcionamiento, con lo que adquirirá una nueva posición, correspondiente a una creencia razonable de *e*. Es evidente que no hay nada que objetar a que la máquina llegue a una nueva posición que corresponda a tener creencia razonable de una proposición que asevere cierta propiedad general de su propio método de funcionamiento: desde el punto de vista exterior la máquina está haciendo «inferencias válidas» si funciona de acuerdo con el «principio de inferencia» propio de su funcionamiento a partir de una posición «razonable», y puede ocurrir perfectamente que llegue de este modo a una posición que corresponda a haber «inferido válidamente» una proposición que asevere cierta propiedad general del «principio de inferencia» mediante el cual funcione.

Análogamente, y desde un punto de vista exterior, puede considerarse que una persona esté haciendo inferencias válidas a partir de premisas creídas razonablemente si su norma de inferencia es eficaz, de un modo totalmente independiente de que crea, o sepa, o no crea, o no sepa que es eficaz; y en este caso no hay círculo vicioso alguno en que llegue, mediante un proceso válido de inferencia, a la conclusión de que la norma de emplear el principio de inferencia de acuerdo con el cual esté realizando su inferencia es eficaz.

Una inferencia será válida en el sentido de ser *objetivamente válida* (según hemos explicado antes) si parte de premisas creídas razonablemente y llega a una conclusión de acuerdo con una norma de inferencia que sea realmente eficaz, ya sepa o crea o no que lo es quien infiera, e, incluso, aunque no pare siquiera mientes en la cuestión de su eficacia: esto es, la persona que infiera estará actuando como una máquina que funcione de acuerdo con ciertos principios, sin tener conocimiento de ellos; no la consideramos enteramente como una máquina, ya que suponemos que parte de una creencia razonable de las premisas y acaba con una creencia razonable de la conclusión,

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

pero suponemos que el proceso mediante el cual pasa de su creencia razonable inicial a su creencia razonable final no requiere su participación cognoscitiva. (Proceso que cabe mirar como muy análogo al de asociación libre que entra en la suma de una columna de números: quien la lleve a cabo habrá pensado conscientemente en el número escrito en la parte alta de la página, y pensará asimismo conscientemente en el que sea preciso escribir en la parte baja, pero no lo hará así con las relaciones aritméticas que justifiquen su calcular a partir de uno hasta llegar al otro. Y el resultado de un cálculo que se obtenga de esta manera automática puede muy bien ser un enunciado que asevere la eficacia del método de cálculo.)

Pero si la máquina se vuelve consciente de su modo de funcionar, y lo somete a crítica, no se satisfará con un criterio de validez de la inferencia que dependa de la eficacia de su propio funcionamiento, sino que pedirá una condición —ya sea como una posibilidad distinta o como algo suplementario— que afirme su creencia en su eficacia. Esto es, desde el interior los criterios VI y IX parecerán ser más apropiados para la validez de las inferencias que el criterio VIII, que nos otorga una «validez objetiva»; y puesto que en el IX se reúnen las condiciones de los criterios VI y VIII, el que necesita que lo sometamos a consideración es el VI. Este sustituye el requisito de que se dé, de hecho, la eficacia de la norma de inducción por enumeración simple por el de que quien piense la inducción crea en tal eficacia: en los términos que hemos empleado, adscribe una «validez subjetiva», en lugar de «objetiva», a la inferencia que lleva a la conclusión de que la norma es eficaz. Mas aun cuando la creencia en la eficacia de esta norma constituye una de las condiciones de la validez subjetiva de una inferencia que conduzca a una creencia razonable en tal eficacia (como hemos visto), este hecho no convierte la inferencia *ipso facto* en circular, ya que quien esté pensando pasa de la mera creencia en su eficacia a una creencia razonable en ella: está algo así como desplazándola, dentro del grupo de sus creencias, hasta llevarla a la privilegiada posición de encontrarse dentro del *corpus* de sus creencias razonables.

Así pues, al crítico que encuentre inadecuado el criterio de la validez objetiva, por no dar lugar a que el que piense tenga conciencia del principio de acuerdo con el cual esté haciendo la inferencia, le podemos presentar en lugar suyo, y sin temor a ningún círculo vicioso, o bien el criterio de validez subjetiva o el de validez subjetiva y objetiva. Y en ninguno de estos tres criterios de validez de aquella inferencia se presenta circularidad viciosa alguna.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Podemos suscitar en este punto, sin embargo, la cuestión acerca de si los criterios VI y VIII son, en absoluto, criterios adecuados de validez de la inferencia inductiva, en ningún sentido idóneo de validez. El objetante puede decir perfectamente que para que una inferencia proporcione una nueva creencia razonable es necesario que quien infiera no meramente *crea* que la norma representada por el principio de inferencia es eficaz, sino que *crea razonablemente* esta proposición; y puede señalar que hemos exigido que se tenga una creencia razonable de la premisa, y no sólo una creencia de ella, para que podamos llegar a una creencia razonable de la conclusión.

A primera vista esta objeción parece muy poderosa; para llegar por inferencia a una creencia razonable, dice, tenemos que tener creencias razonables a lo largo de todo el proceso: hay que creer razonablemente la norma de inferencia no menos que la premisa. Pero puede responderse que semejante requisito invalidaría la mayoría de las inferencias, tanto deductivas como inductivas, que se llevan a cabo realmente en el curso de los razonamientos: pues sólo admitiría deducciones en que la proposición que diese autenticidad al principio de inferencia empleado fuese patentemente verdadera, o fuese manifiesto que se tratase de una consecuencia lógica (en una cadena demostrativa lo suficientemente corta para su captación de una sola ojeada) de una proposición patentemente verdadera; y cualesquiera otras formas de llegar a una creencia en la eficacia de la norma deductiva —por ejemplo, recurso a alguna autoridad o recuerdo de haber quedado anteriormente satisfecho en punto a su verdad— entrañaría pasos inductivos, y no permitiría, por tanto, que la creencia fuese «razonable», ya que la inferencia mediante la cual se habría obtenido, o sobre la que estaría basada, no satisfaría estas condiciones tan estrictas de validez. Por tanto, al insistir en que sólo es válida una inferencia y sólo es razonable la creencia de la conclusión de una inferencia si la creencia de quien infiera es también una creencia razonable, excluirá gran número de inferencias —y de creencias— que normalmente se considerarían válidas —y razonables, respectivamente.

El objetante puede decir en este momento, desde luego, que no le importa la aplicación que se haga de los términos «válida» y «razonable» en nuestro lenguaje cotidiano, tan descuidado, y que lo que le compete es el uso purificado de los mismos una vez que quien los utilice haya quedado purgado en virtud de un tratamiento completo de duda metodológica: en un sentido purificado puede rehusar la admisión como inferencias válidas de aquéllas en que no se crea razonablemente en la eficacia de la norma de inferencia —incluso aunque

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

tal cosa eliminase la mayoría de las llamadas «válidas»—. Pero es difícil ver a qué va todo esto. Es de presumir que el objetante quería atacar la justificación de la inducción por enumeración simple apoyándose en la eficacia de esta norma, y que sus objeciones se fundaban en que semejante intento de justificación constituía un círculo; hemos replicado a ello que tal forma de justificarla no presentaría flanco a la crítica en caso de que el criterio de validez de las inferencias no exija que se crea razonablemente en la eficacia de la norma de inferencia, sino solamente o bien el hecho de dicha eficacia o la creencia en su eficacia; y manteníamos que la creencia razonable en su eficacia no forma parte esencial del criterio de validez de los tipos de procesos de pensamiento que normalmente se consideran inferencias válidas. Si el objetor está decidido de antemano a negarse a admitir como inferencia válida cualquiera en que no se crea razonablemente en la eficacia de la norma citada, sus inferencias válidas inductivas adolecerán ineluctablemente de circularidad (a menos, ciertamente, que tome el desesperado recurso de considerar la eficacia de tal norma como verdad lógicamente necesaria); pero tal circularidad viciosa será su propia obra.

Comparación con los distintos sentidos de «estar bien» *

Aclara mucho las cosas comparar los sentidos en que he llamado a las inferencias «objetivamente válidas», «subjetivamente válidas» y «tanto objetiva como subjetivamente válidas» con los distintos sentidos en que se dice de una acción que está «bien».

Lo mismo si sostenemos que el estar bien de una acción consiste en ajustarse a cierta situación, que si defendemos que se trata de poseer cierta característica, de producir efectos que tengan esta característica o de cierta mezcla e infusión de ambas cosas, en cualquier caso cabe distinguir dos sentidos de estar bien: uno, objetivo, cuando la acción se ajuste de hecho a la situación, tenga de hecho tal caracterís-

---

* El autor emplea las palabras *rightness* y *right*, que literalmente significan «rectitud» y «recto», respectivamente, pero que no parece conveniente traducir por éstas, pues en ellas asoma demasiado el sentido moral en cuanto se prescinde del geométrico (como evidentemente ocurre en este contexto); *right* se dice de lo que es conveniente o bueno para algo, apropiado, correcto (pero no en sentido de los modales), idóneo, lo que está bien dicho o hecho (recuérdese la expresión *all right* = está bien, todo va bien); tiene un significado ambiguo, que no explicita necesariamente el aspecto moral, pero no lo excluye; subjetivamente es *quod decet vel opportet*, objetivamente τὸ ἀγαθόν.—*N. del T.*

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

tica o produzca efectos que la tengan (bien sean enteramente independientes o no las acciones que estén bien en este sentido de que el agente crea o no que están bien); el otro sentido es subjetivo, en cuanto que lo que determina el estar bien de la acción es que el agente crea o no que se ajusta ésta a la situación, que tiene la característica dicha o que produce efectos dotados de tal característica —es decir, de que el agente crea o no que la acción está bien en el primer sentido (el objetivo) de esta palabra—. Y podemos dar un tercer sentido de estar bien: si se dice que una acción está bien cuando lo esté tanto objetiva como subjetivamente [21].

Puede compararse el sentido objetivo de estar bien de las acciones con el sentido objetivo de validez de las inferencias —aquél según el cual la norma de inferencia es realmente eficaz— y su sentido subjetivo con el sentido subjetivo de lo mismo —el que alude a que se crea que la norma de inferencia es eficaz—; en cuanto al tercer sentido —compuesto— de estar bien, puede comparárselo con el sentido de validez tanto objetiva como subjetiva de las inferencias. Y, de un modo análogo, los sentidos de creencia razonable en proposiciones que o se hayan extraído por medio de una inferencia o se defenderían frente a las críticas mencionando una inferencia mediante la cual podrían haberse extraído, serán asimismo comparables: compararemos las creencias objetivamente razonables, asociadas a inferencias objetivamente válidas, con las acciones que objetivamente estén bien, las subjetivamente razonables, asociadas a inferencias subjetivamente válidas, con las acciones que subjetivamente lo estén, y haremos una comparación análoga en el caso de las creencias tanto objetiva como subjetivamente razonables.

A mi parecer, estas comparaciones nos ilustran sobre la cuestión por lo siguiente. Cualquiera que sea el sentido de estar bien que sea apropiado para describir otras situaciones morales, casi nadie discute que el sentido apropiado a la imputación de alabanza o censura moral es el subjetivo: esto es, no se considera que una persona merezca censura por llevar a cabo una acción que esté mal objetivamente con tal de que creyera —en el momento de ejecutarla— que objetivamente

[21] Pueden hacerse otras distinciones ulteriores en el caso de que la acción esté bien subjetivamente sin estarlo objetivamente: distingamos, pues, según se deba la creencia errónea del agente en cuanto a si la acción está objetivamente bien o no a encontrarse en un error acerca de alguna cuestión de hecho (referente a la naturaleza de la situación o a los efectos que la acción haya de tener) o acerca de su valoración moral. Pero estas distinciones no son oportunas para los propósitos que llevamos en nuestra comparación.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

estaba bien; ni se la piensa digna de alabanza por realizar una acción que esté bien objetivamente si creía que objetivamente estaba mal.

Ahora bien, decir de una persona que es razonable por sustentar una creencia *q* —o que su creencia de *q* es razonable— es formular un juicio que en muchos contextos o bien es un juicio moral o se parece muchísimo a él: lo es si se considera que sustentar razonablemente creencias es uno de los modos de la bondad moral de una persona; y guarda una estrechísima relación con semejante clase de juicios si se mira tal cosa no como una manifestación, de suyo, de la bondad moral, sino como un síntoma positivo de la misma en los hombres. En cualquier caso, decir de una persona que es irrazonable al tener cierta creencia, *q*, es formar —o implicar— una crítica moral hipotética de ella; pues es implicar que sería moralmente mejor si no fuese irrazonable sustentar tal creencia. No se implica con esto que debiera sustentarla no irrazonablemente, pues puede no estar en su mano la alternativa de o sustentarla razonablemente o abandonarla; pero, ya estén en su mano estas posibilidades o no, el hecho de que tenga tal creencia irrazonablemente la hace peor que si no la tuviese así.

En cualquier contexto en que se adscriba esta implicación moral al carácter razonable de algo, y en la medida en que este carácter de las creencias de una persona provenga de un proceso válido de inferencia, tiene que depender no de la eficacia real de la norma de inferencia, sino de la creencia de la persona en dicha eficacia: pues en otro caso podríamos considerar digna de censura una persona por sustentar una hipótesis que haya inferido a partir de unos datos creídos razonablemente y siguiendo unas normas inductivas que, si bien tal persona creía que eran eficaces, en realidad no lo eran; y se la consideraría digna de alabanza por sustentar una creencia inductiva que haya inferido por medio de unas normas realmente eficaces, si bien ella no creyera que lo eran. Semejantes juicios serían contrarios a nuestro sentido moral tal y como se manifiesta en el modo de usar el lenguaje moral, que tiene por más apropiados los epítetos de «desafortunada» y «afortunada» que los de «digna de censura» y «digna de alabanza» para aplicarlos en estos dos casos. Así pues, en los contextos en que se asocia el carácter razonable de algo con el merecer alabanza alguien, y el carácter irrazonable de algo con el merecer censura alguien (que son los más frecuentes), se habrá de adoptar lo que hemos llamado sentido subjetivo del carácter razonable, del mismo modo que lo que se ha asociado con el merecer alabanza es el sentido subjetivo de estar bien.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Esta comparación con lo que esté bien subjetivamente apoya más todavía la tesis de que la condición suficiente del carácter subjetivamente razonable de una creencia fundamentada inductivamente es simplemente —en cuanto a la eficacia de la norma inductiva correspondiente— la creencia de que esta norma sea eficaz, sin que haya que añadir que tal creencia sea, además, razonable. Pues pensamos que una persona actúa bien si ejecuta acción que crea que objetivamente está bien, independientemente de que esta creencia suya sea razonable o no; si a nuestro entender tal creencia es irrazonable y podría —por ejemplo, merced a un estudio más diligente de los hechos concernientes a la situación— haber evitado sustentarla y haber adquirido en su lugar otra creencia distinta y razonable, podemos censurarla por su pecado de omisión pasado de no haber tomado las medidas debidas para llegar a una creencia más razonable; pero no la censuramos por actuar en vista de su creencia actual, bien sea razonable o no lo sea. Análogamente, deberíamos considerar razonable a una persona que siga unas normas inductivas que crea son eficaces, independientemente de la cuestión de que su creencia sea razonable o deje de serlo. Por tanto, y en el sentido de carácter razonable que cabe comparar con el de estar bien subjetivamente, lo que constituye una condición de la validez (en sentido subjetivo) de las inferencias inductivas y del carácter razonable (en sentido subjetivo) de la creencia en las conclusiones inductivas es la creencia en la eficacia de las normas inductivas, ya esté bien fundamentada esta creencia o no lo esté.

Mas, ¿no podemos llevar más adelante esta comparación con el estar bien subjetivo, de suerte que el carácter razonable de la creencia de la premisa sea tan carente de importancia para el carácter razonable de la creencia de la conclusión inductiva como lo es el de la creencia en la eficacia de las normas inductivas? Si así ocurriese, el criterio de carácter razonable de las creencias inductivas sería el I, es decir, el de que quien piense la inferencia inductiva crea tanto la premisa de ésta como que las normas inductivas son eficaces; y podría argüirse, en defensa de este criterio, que una persona puede hacer frente a las críticas que se le dirijan por sustentar una creencia inductiva diciendo que creía en los datos de los que ha sacado su creencia de *q* siguiendo unas normas inductivas en cuya eficacia creía, sin considerar necesario mantener que su creencia en tales datos era razonable. Pero ésta no me parece una buena defensa. Si vamos a defender el carácter razonable de una creencia apelando a que se la haya inferido —o se la pueda inferir— de otras creencias, estas últimas tienen que sustentarse razonablemente: el proceso de obtención de nuevas creen-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

cias razonables por inferencia es el de adjuntar nuevas creencias al grupo de creencias razonables de quien piense tales inferencias (a su *corpus* racional) sobre la base de algunas de las que ya pertenezcan a este *corpus;* y si las creencias a las que se adjunte la nueva —en virtud de la inferencia— se encuentran comprendidas en el grupo de las creencias de la persona del caso pero no en su *corpus* racional, la inferencia puede ser perfectamente válida en el sentido de que apoye su creencia de q de modo justificable, pero no le justificará para incluir q en dicho *corpus.*

Por consiguiente, la situación del criterio para la creencia razonable de las conclusiones inductivas es muy diversa según se mire al papel desempeñado por la creencia de la premisa de la inducción y al correspondiente a la eficacia de la norma inductiva que se siga: la primera creencia tiene que ser razonable, para que la inferencia pueda construir sobre cimientos estables, mientras que lo que se exige a la segunda proposición —la de que la norma inductiva es eficaz— es que se la crea (cuando se trate del sentido subjetivo de razonable) o que sea verdadera (en el caso del sentido objetivo de razonable). Ni en el sentido subjetivo, ni en el objetivo, ni el en que resulta de su combinación, constituye la creencia razonable en la eficacia de la norma requisito alguno para que una creencia a la que se haya llegado a partir de una premisa creída razonablemente y en virtud de dicha norma sea una creencia razonable.

Espero que el resultado de este debate sea el de proclamar la tesis de que existen tres criterios idóneos, que dan lugar a tres sentidos idóneos de la «validez» de las inferencias inductivas llevadas a cabo por la persona B, así como tres sentidos correspondientes del «carácter razonable» de la creencia por B de las conclusiones a que haya llegado por una inferencia inductiva —o que podrían basarse en ella—. Los tres criterios concuerdan en exigir que la premisa de la inferencia —los datos inductivos— sea creída razonablemente por B, y también lo hacen en punto a exigir algo referente a la eficacia de la norma inductiva que se siga; pero difieren con respecto a lo que sea este algo. El criterio objetivo requiere que la proposición que asevere la eficacia de dicha norma inductiva sea verdadera; el subjetivo, que tal proposición sea creída por B; y el criterio tanto objetivo como subjetivo exige, por un lado, que la norma inductiva del caso sea realmente eficaz, y por otro, que B crea en esta eficacia. Vamos a estudiar de nuevo la acusación de circularidad viciosa a la luz de esta triple distinción.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

NUEVO EXAMEN DE LA CIRCULARIDAD

Las condiciones para que sea subjetivamente válido que una persona infiera *e* (la proposición según la cual la norma, II, de inducción por medio del principio de enumeración simple, π, es eficaz) a partir de datos en π a favor de *e*, y, correlativamente, para que la creencia conseguida —o apoyable— por medio de esta inferencia sea subjetivamente razonable, son: primero, que crea razonablemente en los datos a favor de *e*, y segundo, que crea *e*. Puesto que ninguna de ellas incluye el requisito de que su creencia de *e* sea razonable, este razonamiento no se mueve explícitamente en círculo; ni existe tampoco ninguna circularidad implícita, ya que dicha persona puede creer del modo más razonable del mundo tanto en que es razonable en su creencia de los datos en π a favor de *e* como en que cree *e*, sin por ello creer razonablemente —e incluso sin creer— que sea razonable en su creencia de *e*. Y el crítico se verá obligado a retirar el cargo de circularidad. Pero, como es natural, se pondrá a decir de nuevo que este criterio de la validez de las inferencias inductivas y del carácter razonable de las creencias inductivas es demasiado débil.

En este caso podemos presentar al crítico el criterio, más fuerte, de la validez tanto subjetiva como objetiva de las inferencias de una persona y del carácter tanto subjetiva como objetivamente razonable de sus creencias inductivas: este criterio añade una tercera condición a las dos de la validez subjetiva: a saber, que *e* sea realmente verdadera. Como esta tercera condición no incluye en mayor medida que las otras dos el requisito de que aquella persona haya de creer razonablemente *e*, de nuevo nos encontramos con que no hay círculo explícito alguno. Pero el crítico insistirá entonces en que hay una circularidad implícita en cuanto que tener una creencia razonable de esta tercera condición para la validez de las inferencias requiere una inferencia exactamente del mismo género para que se la pueda asentar.

En este momento merece la pena de mencionar cierta reflexión, ya que acaso pueda servir para mitigar esta circularidad implícita. Consideremos la nueva inferencia cuya premisa sea la conyunción de las tres condiciones de la validez, tanto subjetiva como objetiva, de la inferencia inductiva cuya conclusión sea *e*, esto es, aquélla cuya premisa sea la proposición conyuntiva

(B cree razonablemente en los datos en π a favor de *e*) y (B cree *e*) y (*e* es verdadera),

y cuya conclusión sea la proposición de que el que B crea *e* es algo

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

razonable tanto subjetiva como objetivamente. Dado que, con este sentido de «razonable», la proposición según la cual la premisa de esta nueva inferencia es condición suficiente para la conclusión es una proposición lógicamente necesaria, esta nueva inferencia es una deducción. Pensemos ahora que esta nueva inferencia no adjunta la creencia de su conclusión al grupo de creencias razonables de B, sino que lleva consigo la creencia de su conclusión por parte de B al deducir ésta de una premisa que B cree ya; entonces, los criterios pertinentes de validez son ahora los I-V (pág. 308), y si B cree la premisa conyuntiva —lo cual equivale a la conyunción de tres creencias de esta misma persona (la creencia de que cree razonablemente en los datos en π a favor de e, la creencia de que cree e y la creencia de e)—, esta triple creencia lleva justificablemente consigo la creencia de que es tanto subjetiva como objetivamente razonable que B crea e, con tal de que —si se utilizan los criterios I, II, IV o V— B crea que dicha premisa conyuntiva es lógicamente condición suficiente para la conclusión, o —si se utilizan los criterios II o V— con tal de que esta creencia de B sea razonable. Así pues, esta creencia de segundo orden de B, de que es subjetiva y objetivamente razonable al creer e, es una creencia que acompaña justificadamente a la creencia —de primer orden— de e tomada juntamente con, la creencia de segundo orden de que tiene esta creencia, la creencia de segundo orden en el carácter razonable de la creencia en los datos en π a favor de e y —en el caso de algunos de los criterios— la creencia (o la creencia razonable) de cierta proposición lógicamente necesaria. Si admitimos que la creencia de segundo orden de que él crea e es algo que acompaña automáticamente a la creencia de e, y si damos por supuestas la creencia de segundo orden en el carácter razonable de la creencia en los datos en π a favor de e y la creencia (o la creencia razonable) de la proposición lógicamente necesaria aludida, todo cuanto hemos dicho se reduce a la afirmación de que, si una persona cree e, esta creencia justifica que sostenga, juntamente con ella, la creencia de segundo orden de que es subjetiva y objetivamente razonable al creer e. Por tanto, la creencia de e es autorracionalizadora —si bien, desde luego, no en el sentido de que el creer e convierta en razonable esta misma creencia, sino en el de que el creer e lleva consigo la creencia de que esta creencia de e es razonable.

El crítico puede objetar que todo este fárrago es como hacerse la colada mutuamente, y que no va a ninguna parte excogitar una argumentación cualquiera según la cual no es circular que la creencia de e sea razonable si el sentido de «razonable» no es meramente subjetivo.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Ya no puedo decir otra cosa sino que la versión que he dado de la validez objetiva de las inferencias se apoya en que marche bien una máquina de inferir, y que la circularidad implícita surge sólo cuando esta máquina empieza a ser consciente de la forma en que ella misma funciona. El prediccionista puede ofrecer al crítico traficante en circularidades una alternativa de dos términos: el sentido débil de carácter racional, no sospechoso de círculo alguno, y un sentido fuerte de lo mismo, tanto objetivo como subjetivo, que no tiene circularidad explícita pero sí implícita —la cual depende esencialmente de que miremos a quien infiera como una máquina de inferir y de que la validez de sus inferencias dependa de su funcionamiento, *qua* máquina de inferir, de acuerdo con un modo eficaz de funcionar (con la coletilla de que si el que infiera cree que él, *qua* máquina de inferir, funciona eficazmente, esta creencia es autorracionalizadora de la forma explicada en el párrafo anterior)—. Si ninguna de estas dos posibilidades satisface al crítico, ni tampoco la tercera, del sentido puramente objetivo del carácter razonable, y si no está dispuesto a contentarse con un sentido de esta expresión en unos contextos y con otro sentido en otros, sino que sigue pidiendo un método para asentar la eficacia de las normas inductivas al que no se llegue siguiendo una norma inductiva, hay que decirle sin más que lo que pide es que la eficacia de las normas inductivas no sea una proposición empírica. Mas en este caso la inducción sería una deducción, no existiría el problema inductivo, que nos hace estrujarnos la cabeza, y este capítulo, que se preocupa tan aburridamente por tal problema, hubiera sido enteramente innecesario.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

CAPITULO NOVENO

Las leyes de la Naturaleza y la causalidad

Hemos admitido que las hipótesis científicas eran proposiciones empíricas generales cuya generalidad no estaba confinada a zonas limitadas del espacio y del tiempo. Y, por las razones explicadas en el capítulo primero, hemos admitido que las leyes científicas, que corresponden a hipótesis científicas verdaderas, no aseveran más que la conjunción constante de propiedades, de suerte que la ley científica según la cual cuanto sea *A* es *B* no afirma sino que todas las cosas que sean *A* serán, de hecho, asimismo *B*. Ahora es ya momento de examinar este supuesto y ver si el análisis de Hume de las leyes naturales es apropiado o si es necesario suponer que el tipo de necesidad de la ley científica (necesidad «nómica») requiere algún elemento suplementario de «vinculación necesaria» por encima y más allá de la mera uniformidad fáctica. Para expresar este asunto de otro modo: todo el mundo estará de acuerdo en que el que cuanto haya sido, sea o vaya a ser *A* haya sido sea o vaya a ser *B* es consecuencia lógica de la ley científica que expresa apodícticamente con «todo *A* tiene nómicamente que ser *B*»; la cuestión está en saber si está justificado o no considerar la primera proposición no como una consecuencia, sino como un análisis del significado de esta última.

He utilizado el adjetivo de W. E. Johnson —«nómico»— en lugar del más corriente de «causal» para expresar, sin prejuzgar el análisis, el género característico de vinculación necesaria de que nos ocupamos ahora, ya que podría muy bien sostenerse que la noción de causalidad involucra consideraciones de precedencia temporal y de continuidad espacio-temporal que no son pertinentes a este respecto: pues lo que ahora nos ocupa es la naturaleza de la diferencia —si es que hay alguna— entre las «leyes nómicas» y las «meras generalizaciones» —en el lenguaje de Johnson, entre «universales legales» y «universales de hecho»[1].

---

[1] W. E. JOHNSON, *Logic, Part III* (Cambridge, 1924), cap. I.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

David Hume mantenía que objetivamente no hay diferencia ninguna, salvo un hecho psicológico referente al modo en que el funcionamiento de nuestra mente es causa de que adscribamos a las leyes científicas la necesidad: pues la «idea de una vinculación necesaria» estaría sacada de nuestra experiencia de la conjunción constante de propiedades, y no de nada que hubiese en la Naturaleza por encima y más allá de dicha conjunción. A una con la mayoría de los hombres de ciencia que han escrito sobre filosofía de la ciencia, de Ernst Mach y Karl Pearson a Harold Jeffreys, estoy de acuerdo con lo principal de la tesis de Hume, esto es, con la aserción de que los universales legales son objetivamente no más que universales de hecho, y que en la Naturaleza no hay ningún elemento suplementario de vinculación necesaria. Ha llegado la hora de defender esta tesis frente a los filósofos que no están de acuerdo con ella.

Hemos postpuesto el debate hasta este momento porque el principal argumento que emplean estos filósofos contra el análisis humano de la necesidad nómica en una conjunción constante es que semejante análisis de las leyes científicas convierte en imposible el justificar la inducción. Mas tal crítica piensa siguiendo la ruta de asimilar la inducción a la deducción; y si, en vez de intentar esta asimilación, propugnamos un enfoque peirceano de la inducción, como hemos hecho en el último capítulo, esta argumentación se queda encasquillada; pues el enfoque de Peirce se basa en las normas inductivas que se empleen al hacer las inferencias, de modo que seguir estas normas no presupone, en modo alguno, que las conclusiones de las inferencias que se lleven a cabo siguiéndolas sean otra cosa que universales de hecho. Así pues, la justificación positiva de la inducción que he presentado en el capítulo precedente constituye mi respuesta al argumento de que una tesis humeana acerca de las leyes científicas invalida su asentamiento.

Si este libro se ocupase de atacar las tesis rivales podrían hacerse fuertes críticas de las tentativas de justificar la inducción que se apoyan sobre una necesidad nómica distinta de la conjunción constante. Aquellos filósofos, por ejemplo, que quieren identificar tal necesidad con la necesidad lógica se exponen enteramente a la acusación de que, puesto que todas las premisas de una inferencia válida que lleve a una conclusión lógicamente necesaria tienen que ser también proposiciones lógicamente necesarias, si se considera que las leyes científicas pertenecen a este último tipo de proposiciones, se elimina toda posibilidad de apoyarlas en datos empíricos; y los que pretenden hacer de la necesidad nómica una tercera categoría última, distinta tanto

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

de la necesidad lógica como de la conjunción constante, quedan inermes ante el cargo de que su vinculación nómica es, como la «sustancia» era para Locke, «algo que no sé lo que es», y ante el de que el filósofo que emplee la máxima de Butler, «todo es lo que es, y no otra cosa», para no tener que prestar atención a si la diferencia entre los universales legales y los de hecho no residirá más bien en el papel que desempeñen en nuestro pensamiento que en diferencia alguna de contenido objetivo, está eludiendo su deber.

Pues no cabe negar que hacemos una distinción de algún tipo entre las proposiciones generales empíricas que dignificamos con el nombre de «leyes de la Naturaleza» o «leyes naturales» y las que llamamos, algo despectivamente, «meras generalizaciones». Un filósofo humeano puede perfectamente negar que esta distinción sea de hechos objetivos, pero si niega que exista distinción alguna, de la clase que sea, se mueve en contra del uso normal del lenguaje.

Los condicionales subjuntivos

Uno de los usos importantes del lenguaje al que los filósofos han prestado mucha atención recientemente es el de las cláusulas condicionales de la forma «si una cosa es A, es B» en circunstancias en que no haya nada que sea A, y al de las cláusulas hipotéticas «si p, q» bajo circunstancias en que p sea falsa. Se ha dicho que estas cláusulas son condicionales, o hipotéticas que son «contrarias a los hechos», o «contrafácticas» *, o bien, puesto que una manera de expresarlas en inglés [como ocurre también en castellano] emplea el modo subjuntivo, «subjuntivas». Vamos a emplear la expresión «condicional subjuntivo» para una aserción de la forma: aunque no hay ningún A, si hubiera alguno, todos los A serían B; por ejemplo: si hubiera algún gas cuyas moléculas tuviesen extensión nula y no se atrajesen mutuamente (aunque en realidad no existen tales gases) su presión y su volumen estarían relacionados por la ley de Boyle **. Y utilizaremos la expresión «hipotetizado subjuntivo» para una aserción de la forma: aunque p es falsa, si fuese verdadera, q sería verdadera; por ejemplo: si el alambre de que está colgado el cuadro se hubiera roto (aunque no lo ha hecho), éste se habría caído al suelo [2].

* En las gramáticas escritas en castellano suele llamárseles «irreales».—*N. del T.*

** Es la ley que en España se llama a veces de Boyle-Mariotte, por influencia de los textos franceses.—*N. del T.*

[2] Muchos lógicos contemporáneos emplean los términos «condicional» e «hipote-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

De momento nos vamos a ocupar de los condicionales subjuntivos. El problema que presentan a un partidario de Hume es el dilema siguiente: el análisis que conduce a la conjunción constante ofrece dos posibilidades para analizar «si una cosa es *A*, es *B*»: una consiste en tomar «todo *A* es *B*» del modo que la lógica tradicional llamaría «existencial», es decir, entendiéndola como una forma de aseverar la existencia de al menos una cosa que sea *A*; la otra posibilidad de la alternativa consiste en tomar tal cláusula no existencialmente, esto es, entendiendo que no afirma la existencia de ningún *A*. En la primera interpretación, «todo *A* es *B*» equivale a la conyunción de «no hay nada que sea *A* y no-*B*» con «hay algo que es *A*»; y el condicional subjuntivo combinaría esta aserción conyuntiva con la de que no hay nada que sea *A*, por lo cual sería contradictorio. En la segunda interpretación, «todo *A* es *B*» equivale a la proposición única «no hay nada que sea *A* y no-*B*», y el condicional subjuntivo reuniría esta aserción con la de que no hay nada que sea *A*; mas, puesto que si no hay nada que sea *A*, *a fortiori* no hay nada que sea *A* y no-*B*, la conyunción de estas dos proposiciones es lógicamente equivalente a la primera sola. Y, por tanto, se alega, el análisis humeano convierte la aserción de un condicional subjuntivo, o bien en contradictoria o bien en una que no añade nada a la de que no hay nada que sea *A*, lo cual se expresa por el modo subjuntivo empleado. Ambos cuernos del dilema son igualmente incómodos, pues ninguno de ellos da razón del hecho de que aseveremos condicionales subjuntivos a nuestro arbitrio y sin conciencia alguna de paradoja; y los que se oponen a la tesis de la conjunción constante concluyen que cuando se emplea «si una cosa es *A*, es *B*» para expresar una vinculación nómica tiene que significar algo más que «no hay nada que sea *A* y no-*B*» (con o sin la conyunción de «hay algo que es *A*»), con objeto de dar razón del papel que desempeñan en nuestro pensamiento los condicionales subjuntivos.

---

tizado» [en inglés, *hipothetical*] de forma sinónima, y llaman «condicional general» o «hipotetizado general» lo que yo llamo «condicional». La distinción que hago entre el empleo de «condicional» y de «hipotetizado» está sugerida por la hecha por J. N. Keynes [*Studies and Exercises in Formal Logic*, 4.ª ed. (Londres, 1906), páginas 249 y sigs.]. Entre el considerable número de trabajos recientes que tratan de los condicionales subjuntivos y la cuestión —relacionada con ella— de las leyes naturales, Hans Reichenbach [*Elements of Symbolic Logic* (Nueva York, 1947), capítulo VIII] y J. R. Weinberg [*Journal of Philosophy*, vol. 48 (1951), págs. 17 y sigs.] han publicado soluciones parecidas al panorama que aquí presento; también F. P. Ramsey (*The Foundations of Mathematics and other logical essays*, págs. 237 y sigs.) y David Pears [*Analysis*, vol. 10 (1950), págs. 49 y sigs.] han enfocado esta cuestión de manera parecida a la mía.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Podemos salir al paso de esta crítica sin necesidad de que se distinga la proposición expresada por la cláusula «si una cosa es *A*, es *B*», empleada nómicamente, de la proposición según la cual no hay nada que sea *A* y no-*B*: basta que lo que esté entrañado en la *aserción* del condicional subjuntivo expresado por una cláusula tal como «aunque no hay nada que sea *A*, sin embargo, si hubiera algo que fuese *A*, sería *B*» sea distinto de lo que esté entrañado en la aserción de la conjunción de «no hay nada que sea *A*» con «no hay nada que sea *A* y no-*B*». Y podemos hacer esta distinción admitiendo que al hacer la aserción de «no hay nada que sea *A* y no-*B*» que está involucrada en la aserción del condicional subjuntivo no aseveramos simplemente que esta cláusula corresponda a una proposición verdadera, sino que la aseveramos como deducida de una hipótesis de nivel superior de un sistema deductivo científico verdadero y asentado. Con formulación metafórica: la generalización «no hay nada que sea *A* y no-*B*» entra en la aserción de un condicional subjuntivo acompañada de un certificado de origen; aun cuando la generalización misma reunida con la proposición «no hay nada que sea *A*» es lógicamente equivalente a esta última sola, la creencia en la verdad de la generalización que está acompañada por una creencia acerca de su origen, unida a la creencia de que no hay nada que sea *A*, no equivale, en modo alguno, a esta última creencia sola.

Tal vez sea más fácil considerar la cuestión apoyándonos en el orden temporal en que se hayan adquirido las creencias. Supongamos que una persona que nunca se haya puesto a pensar si hay o no algún *A* llegue a aceptar un sistema deductivo científico en que la proposición según la cual no hay nada que sea *A* y no-*B* sea deductible de ciertas hipótesis de nivel superior del mismo que se hayan asentado por inducción a partir de datos en que no estén incluidos ejemplos o casos ningunos de la generalización «todo *A* es *B*»; si esta persona lleva a cabo la deducción correspondiente, habrá confirmado indirectamente la proposición «no hay nada que sea *A* y no-*B*»; y si considera asentada la hipótesis de nivel superior considerará también asentado que no hay nada que sea *A* y no-*B*, y adjuntará esta proposición al *corpus* de sus creencias racionales. Supongamos ahora que descubre luego que, de hecho, no hay ningún *A*. Si hubiese llegado a la creencia razonable de que no hay ningún *A* antes de haber llegado a la creencia razonable de que no hay nada que sea *A* y no-*B*, podría haber deducido esta última proposición de aquélla, y no hubiese necesitado asentarla por deducción a partir de hipótesis de nivel superior del sistema deductivo científico; pero no le ha ocurrido tal

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

cosa: ha llegado a su creencia razonable en la generalización «no hay nada que sea A y no-B» de un modo totalmente independiente de la creencia, adquirida posteriormente, de que dicha generalización se satisface «de un modo vacío»; y podemos considerar la aseveración del condicional subjuntivo como una enunciación que resume esta situación en su conjunto.

Tomemos, por ejemplo, el enunciado «aunque no hay ningún gas cuyas moléculas tengan una extensión nula y no se atraigan mutuamente, sin embargo, si hubiera tales gases, todos ellos obedecerían la ley de Boyle, PV = constante». La aseveración de este enunciado tiene a la vista una situación en la que, antes de saber que no había tales gases, se hubiera asentado una ley funcional que relacionara la presión y el volumen de un gas mediante el estudio de gases con moléculas extensas y que se atraen mutuamente; por ejemplo, la ecuación de Van der Waals, $(P + a/V^2)(V - b)$ = constante; y a partir de esta ley funcional podría haberse deducido la ley especial para gases con moléculas de extensión nula y que no se atraigan mutuamente haciendo $a = b = 0$: esto es, se habría deducido la ley de Boyle de la ecuación de Van der Waals. Por tanto, se habría asentado la ley especial con entera independencia de que haya o no gases cuyas moléculas tengan extensión nula y no se atraigan entre sí; luego la aserción del condicional subjuntivo se refiere al hecho de que la proposición (de que no hay ningún gas cuyas moléculas tengan extensión nula y no se atraigan mutuamente que deje de obedecer a la ley de Boyle) se haya asentado independientemente del hecho —también objeto de la aserción del condicional subjuntivo— de que no haya ningún gas semejante.

Puesto que «no hay nada que sea A» es lógicamente equivalente a la conyunción de «no hay nada que sea A y no-B» con «no hay nada que sea A y B», asentar la primera proposición tras haber asentado la segunda es añadir sólo el asentamiento de la última. Como es natural, los datos a favor de «no hay nada que sea A y no-B» proporcionados por los datos directos e indirectos a favor de «no hay nada que sea A» se añadirán a los datos en favor de aquella proposición proporcionados por los datos en favor de las hipótesis de nivel superior de que se siga lógicamente aquella generalización; pero, como suponemos que ésta ha quedado ya asentada por deducción a partir de hipótesis de nivel superior, los datos añadidos que hemos mentado no servirán para asentarla. En el lenguaje freudiano su asentamiento está «más que determinado»: hay dos conjuntos de datos a favor capaces

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

de asentarla, y el conjunto que de hecho la asiente será el que llegue primero,

Vamos a eliminar ahora la condición de que la generalización «no hay nada que sea *A* y no-*B*» se haya asentado deduciéndola de ciertas hipótesis de nivel superior antes de parar mientes en si era o no verdadera de un modo vacío. Entonces nos encontramos en la situación de que hay dos maneras de asentarla, y puedo elegir la que considere que ha llegado antes y que es el asentamiento genuino: una consiste en deducirla de la proposición —supuesta ya asentada— de que no hay nada que sea *A*: la llamaremos el asentamiento «de un modo vacío»; y la otra es la de deducirla de las hipótesis de nivel superior que suponemos ya asentadas: la llamaremos el asentamiento «hipotético-deductivo». Cuando se asevera el condicional subjuntivo «aunque no hay ningún *A*, sin embargo, si hubiera alguno, todos los *A* serían *B*» se asevera que no hay ningún *A*, que no hay nada que sea *A* y no-*B* y que esta segunda proposición puede asentarse hipotético-deductivamente sin referirse al asentamiento de la primera: lo peculiar del condicional subjuntivo no es solamente que asevere dos proposiciones, una de las cuales sea consecuencia lógica de la otra, sino que asevere también que la primera de ellas, aun siendo asentable de un modo vacío por deducción de la última, es asimismo asentable hipotético-deductivamente de un modo independiente; la aserción de un condicional subjuntivo señala la relación existente entre las dos proposiciones que asevere en lo que respecta al modo en que se las puede asentar. A mi parecer, este análisis explica satisfactoriamente la peculiaridad de los condicionales subjuntivos, sin necesidad de suponer que la cláusula «todo *A* es *B*» —empleada nómicamente— tenga que significar ninguna otra cosa sino que no hay nada que sea *A* y no-*B*.

Considerar un condicional subjuntivo sin aseverarlo es llevar a cabo una actividad sumamente alambicada: se trata, esencialmente, de considerar dos proposiciones en relación lógica entre sí, pero hacerlo separadamente, dentro de dos sistemas científicos deductivos. Entonces, la proposición «no hay nada que sea *A* y no-*B*» ha de considerarse como deducción de ciertas hipótesis de alto nivel que no incluyan la proposición «no hay nada que sea *A*», y no como deducción de esta última: la proposición «no hay nada que sea *A* y no-*B*» aparece como consecuencia en dos sistemas deductivos, pero es menester atender al hecho de que aparezca en uno de ellos y desatender al de que aparezca en el otro. Así pues, no es posible dar el significado de una cláusula condicional subjuntiva enunciando simplemente la proposición que se sustente siempre que se la utilice: la función de la cláu-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

sula en nuestro lenguaje es primariamente la de ser empleada asertivamente y, como hemos explicado, en este caso se refiere al origen de la creencia (de quien haga la aserción) de una de las proposiciones que se aseveran. De un modo muy natural, los lógicos han concentrado su interés en el significado de las cláusulas en las que la consideración de su significado —el sustentar la proposición correspondiente— pueda separarse de aquello que quede además involucrado al emplear la cláusula asertivamente; pero no cabe mirar de este modo las cláusulas condicionales subjuntivas, ya que poseen una utilización muy definida e importante cuando se las emplea asertivamente, que no puede desglosarse en un conjunto de aserciones sin relación mutua.

Importa darse cuenta de que no tenemos utilización normal de los condicionales subjuntivos que negase la existencia de cosas especificada por un concepto teorético —en el sentido que esto tiene en el capítulo tercero—: ello se debe a que es contradictorio reunir un enunciado acerca de un concepto teorético con otro que asevere que, de hecho, no hay casos de dicho concepto, ya que la verdad de un enunciado acerca de un concepto de esta índole basta para dotarle de existencia. En tales ocasiones la única utilización de los condicionales subjuntivos es la de medios para insistir en que el enunciado acerca del concepto dicho, aunque parezca ser una proposición contingente, se utiliza realmente como fórmula estéril (en el sentido del capítulo cuarto) que sirva para definir el significado del símbolo correspondiente al concepto. Consideremos, por ejemplo, el enunciado condicional subjuntivo «aunque de hecho no hay ningún átomo de hidrógeno, sin embargo, si hubiera alguno, todos los átomos de hidrógeno serían sistemas compuestos cada uno por un protón y un electrón»; suponiendo que la expresión «átomo de hidrógeno» de esta cláusula se emplee para representar un concepto teorético, no soy capaz de imaginar utilización alguna de ella a no ser por alguien que la emplee como fórmula estéril para dar una definición del nuevo término teorético «átomo de hidrógeno» en cuanto construcción lógica a partir de los conceptos teoréticos protón y electrón, que él ya utilizaría en su modo de pensar acerca de la física.

Las leyes de la Naturaleza

Nuestra solución al problema de cómo pueda ser coherente nuestra manera de utilizar los condicionales subjuntivos con un análisis de las generalizaciones nómicas a base de la conjunción constante nos

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

permitirá resolver el problema —emparentado con aquél— que se propone a los humeanos: a saber, el de discriminar entre lo que sean leyes de la Naturaleza (o leyes naturales) y lo que los antihumeanos llaman despreciativamente «meras generalizaciones». Sin duda alguna, dicen, es preciso admitir la distinción entre ambas: para nosotros consiste en que las leyes de la Naturaleza aseveran principios de vinculación nómicamente necesaria; y puesto que ustedes rehusan admitir tales principios, ¿cómo pueden hacer la distinción correspondiente? Este problema se formula a veces diciendo que todos distinguimos entre uniformidades de la Naturaleza debidas a leyes naturales y las que son verdaderas sólo de modo accidental, «accidentes históricos a escala cósmica»[3]; y si las leyes naturales son precisamente nada más que uniformidades, ¿cómo cabe hacer esta distinción?

Me parece una locura negar (según hacen algunos humeanos) que exista tal distinción en el lenguaje ordinario; pero también me parece perfectamente sensato el intento de dar el fundamento racional de ella dentro del ámbito de la tesis de la conjunción constante. Esta distinción tendrá que depender, entonces, del conocimiento o de la creencia de la proposición general en lugar de hacerlo de nada intrínseco a ella misma: mas ésta es exactamente la manera en que hemos resuelto el problema —relacionado con éste— de los condicionales subjuntivos. Tratemos de emplear esta solución para escoger entre las proposiciones generales contingentes y verdaderas aquéllas a las que hayamos de conceder el honorífico título de «ley natural».

Empecemos intentando provisionalmente el empleo del siguiente criterio: una persona, *C*, llamará *ley de la Naturaleza* o *ley natural* a una proposición general contingente y verdadera, «todo *A* es *B*», cuya generalidad no esté limitada a ninguna región determinada del espacio o del tiempo, si, o bien *C* cree razonablemente el condicional subjuntivo correspondiente, «aunque no hay ningún *A*, sin embargo, si hubiera alguno, todos los *A* serían *B*», o bien *C* creería razonablemente este condicional subjuntivo si creyese razonablemente que no había ningún *A*. Expresándolo con los términos referentes al *corpus* racional de conocimientos de *C* y a sus creencias razonables, este criterio exige que el condicional subjuntivo correspondiente forme parte de su *corpus* racional si en éste se halla incluida la creencia de que no hay ningún *A*, o, en caso de que no ocurra así, que aquel condicional formase parte de dicho *corpus* si éste incluyese la creencia citada. Con los términos propios de la noción de aserción que hemos

[3] WILLIAM KNEALE, en *Analysis*, vol. 10 (1950), pág. 123.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

empleado en el debate de los condicionales subjuntivos: la aserción de una ley natural juntamente con la de que no hay ningún *A* es, en definitiva, lo mismo que la aserción del condicional subjuntivo correspondiente.

Además, daremos el título de leyes naturales a todas las hipótesis verdaderas que contengan conceptos teoréticos.

La condición para que una hipótesis asentada, *h*, sea *legaloide* [en inglés, *lawlike*] (esto es, que sea una ley natural en caso de ser verdadera) será entonces, o bien que aparezca en un sistema deductivo científico asentado como hipótesis de alto nivel que contenga conceptos teoréticos, o bien que aparezca en un sistema de esta índole como deducción a partir de hipótesis de nivel superior que estén apoyadas por datos empíricos que no constituyan datos directos a favor de *h* misma; esta condición excluye las hipótesis cuyos únicos datos a favor lo sean de casos o ejemplos de ellas mismas, pero no excluye las que estén en parte apoyadas directamente por datos de sus casos o ejemplos y en parte indirectamente, por datos constituidos por casos o ejemplos de hipótesis del mismo nivel que (juntamente con ellas mismas) se encuentren subsumidas bajo alguna hipótesis de nivel superior. Esta versión de la ley natural hace que la aplicación de su noción dependa del modo en que una persona determinada tome como asentada en un momento determinado la hipótesis del caso; y puede considerarse que «legaloide» es un epíteto honorífico que se emplea como señal o marca de origen. Si miramos la hipótesis de que todos los hombres son mortales como carente de otro apoyo que no sean los datos directos de que los hombres han ido muriendo, no la miraremos como una ley de la Naturaleza; pero si la consideramos asimismo apoyada por estar deducida de la hipótesis de nivel superior de que todos los animales son mortales —siendo datos en favor de ésta que los caballos, los perros, etc., han ido muriendo—, entonces se le otorgará el título honorífico de «ley de la Naturaleza», que indicará que hay más razones para creer en ella que los solos datos proporcionados por sus casos o ejemplos.

Este criterio de legaloidad tiene la paradójica consecuencia de que tomaremos la hipótesis de que todos los hombres sean mortales por una ley natural si aparece —en un sistema deductivo científico asentado— a un nivel inferior que cierta hipótesis (por ejemplo, todos los animales son mortales) que tenga bajo sí otras hipótesis de nivel más bajo que estén directamente confirmadas por la experiencia, mientras que la hipótesis de nivel superior —la de que todos los animales sean mortales— no se considerará una ley natural si es que aparece

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

—en el sistema deductivo asentado— como hipótesis de nivel supremo: ya que el fundamento de su asentamiento serían solamente los datos proporcionados por sus casos o ejemplos. Mas me parece que ello corresponde, en general, al modo en que empleamos la noción de ley natural: para que miremos una hipótesis como ley natural tiene que ser una proposición general que pensemos *explica* sus casos o ejemplos; y si la única razón para creerla consiste en nuestro conocimiento directo de la verdad de éstos, me parecerá que es un género de explicación de ellos bastante flojo [4]; pero si, por el contrario, hay datos en su favor independientes de dichos casos —así, los datos indirectos proporcionados por casos o ejemplos de otra proposición general de su mismo nivel que esté subsumida, con ella, bajo la misma hipótesis de nivel superior—, entonces la proposición general *explicará* sus casos o ejemplos en el sentido de que nos proporcionará razones para creer en su verdad independientes de cualquier saber directo de esta verdad. Y este enlace con la noción de explicación consuena bastante bien con que pueda atribuirse el título honorífico de ley natural a toda hipótesis que contenga conceptos teoréticos, ya se encuentre o no al nivel supremo del sistema científico ya asentado: pues incluso si la hipótesis que encierra estos conceptos no es deducible de otra hipótesis establecida de nivel superior, en cualquier caso no puede haber sido asentada simplemente mediante una inducción por enumeración simple, sino que tiene que haberse llegado a ella por el método hipotético-deductivo de proponerla como hipótesis y deducir sus consecuencias contrastables: lo que aboga por la aceptación de una hipótesis de alto nivel determinada cualquiera que contenga conceptos teoréticos es precisamente que sirva de explicación de las generalizaciones de nivel inferior deductibles de ella, mientras que lo que defiende la causa de que se acepte una generalización determinada cualquiera que no contenga conceptos teoréticos y sea deductible de una hipótesis de alto nivel es más el hecho de que comprenda o abarque sus casos o ejemplos conocidos que el de que los explique.

No quiero acentuar indebidamente esta relación entre explicación y ley natural, pues los usos marginales de ambos conceptos son muy poco definidos, y, sin duda alguna, los límites de uno y otro no coinciden. Sin embargo, y hablando en general, consideraremos ley de la Naturaleza a toda hipótesis científica verdadera que tenga una función explicativa con respecto a hipótesis de nivel inferior o a sus casos o ejemplos; y, viceversa, en la medida en que las hipótesis cien-

[4] Véase, sin embargo, más adelante, en la página 352.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

tíficas nos proporcionen una explicación nos sentiremos inclinados a otorgarles la honorable condición de leyes naturales.

Estudiar si una hipótesis científica sería o no una ley de la Naturaleza —en caso de ser verdadera— es estudiar la forma en que podría entrar en un sistema deductivo científico ya asentado. Y, como en el caso de los condicionales subjuntivos, el considerar esta cuestión es una actividad muy alambicada: no se la puede responder con un sí o un no directos sin hacer referencia al modo de estar relacionada la hipótesis del caso con otras hipótesis que empleemos en nuestra reflexión científica.

El caso de los cuervos negros

Este modo de mirar el asunto se desembaraza de un modo muy satisfactorio, a mi parecer, de los casos propuestos recientemente por algunos filósofos para hacer patente que tiene que haber una distinción entre las leyes de la Naturaleza y los «hechos dotados de universalidad accidental» [5]. Kneale dice con mucha razón que no hay incompatibilidad alguna entre que todos los cuervos sean, de hecho, negros y «la sugerencia de que si los cuervos hubiesen caído en la tentación de vivir en una región de mucha nieve hubiesen procreado descendientes que serían blancos, aun siendo recognoscibles como cuervos»; y lo utiliza como argumento para demostrar que tiene que haber una tercera posibilidad además de las dos que vio Hume —«o bien I) es una ley de la Naturaleza que todos los cuervos sean negros, o bien II) ha habido o habrá en algún sitio, y alguna vez, un cuervo que no haya sido o no sea negro»—: a saber, que es un «accidente histórico a escala cósmica» el que todos los cuervos sean negros [6]. Ahora bien, la negrura de todos los cuervos es accidental, sin duda alguna, si no puede darse razón de ella, lo cual equivale a decir que no existe sistema científico establecido en el que tal generalización aparezca como consecuencia; y si pudiera darse una razón de la negrura de todos los cuervos presentando semejante sistema científico, consideraríamos legaloide dicha generalización. Kneale tiene razón al pen-

[5] William Kneale, *Probability and Induction*, pág. 195.

[6] *Analysis*, vol. 10 (1950), págs. 123. El hecho de que Kneale emplee aquí la palabra «accidente» parece indicar que está a medio camino de la doctrina de este capítulo; pues, ¿qué es un «accidente histórico a escala cósmica», o un «hecho dotado de universalidad accidental», sino algo que no sabemos que esté comprendido por ninguna ley más general, o sea, algo no deductible de ningún sistema deductivo establecido?

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

sar que hay una tricotomía en vez de una dicotomía; pero aquélla proviene de una segunda dicotomía que sigue a la primera —que es objetiva— de las proposiciones generales en las que sean verdaderas y las que sean falsas —esto es, en los casos I) y II) de Kneale—: la segunda divide las proposiciones generales verdaderas en aquéllas (las «leyes naturales») que aparezcan como hipótesis de bajo nivel de un sistema deductivo científico ya asentado o como hipótesis de nivel supremo que contengan conceptos teoréticos, y aquéllas (los «hechos dotados de universalidad accidental») en las que no ocurra tal cosa. Esta segunda dicotomía es relativa al conjunto de conocimientos y de creencias razonables (el *corpus* racional) de una persona concreta en un momento concreto; mas como los *corpora* racionales de muchas personas que tienen el mismo género de instrucción científica y de cultura concuerdan en contener en un momento determinado ciertos sistemas deductivos científicos, estas personas estarán de acuerdo en cuanto a enunciar que tales y cuales hipótesis científicas, en caso de ser verdaderas, son leyes de la Naturaleza, y que tales otras hipótesis científicas son «meras generalizaciones», aun cuando cada una de estas personas pueda querer decir una cosa distinta con este enunciado.

El caso del tren sin frenos

Johnson ha utilizado la siguiente argumentación contra la identificación de los «universales legales» con los «universales de hecho»: la creencia en el universal legal de que todo tren sin frenos es peligroso es lo que nos hace insistir en que todos los trenes lleven frenos, en consecuencia, lo que nos hace cuidarnos de que no haya trenes desprovistos de ellos, y de ahí que haya de ser verdadera la proposición «no hay nada que sea un tren sin frenos y algo no peligroso»; y luego: «Este ejemplo sugiere toda una amplia clase de casos que señalan previsión o prudencia humanas, en todos los cuales la distinción entre el universal nómicamente necesario y el fáctico es enteramente aparente» [7]. Pero la distinción que hemos hecho entre las generalizaciones que sean conclusiones en sistemas deductivos ya asentados y las que no lo sean resuelve la aparente paradoja involucrada en que una generalización se convierta en verdadera por el hecho de creer en ella. Pues lo que se cree no es meramente la generalización misma, sino

---

[7] W. E. Johnson, *Logic, Part III*, pág. 12.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

ésta en el contexto de un sistema deductivo establecido en el que aparezca como deducción a partir de hipótesis de nivel superior que se hayan asentado independientemente de dicha generalización: a lo que se debe nuestra insistencia en que todos los trenes lleven frenos es a la creencia en tales hipótesis de más alto nivel (la de que el momento aumenta con la masa y la velocidad, la de que los cuerpos dotados de mucho momento que se mueven venciendo únicamente fuerzas retardadoras muy pequeñas son peligrosos, etc.); y esta creencia compleja asegura que la proposición según la cual todos los trenes llevan frenos sea verdadera por el método de proporcionarnos una premisa a partir de la cual cualquiera que no lo supiese ya podría deducir la proposición de que todos los trenes sin frenos son peligrosos; mas no podría deducir las hipótesis de nivel superior acerca del momento, etc., siendo así que lo que ha hecho que la generalización de que todos los trenes sin frenos son peligrosos sea verdadera de un modo vacío es la creencia de dichas proposiciones.

El caso de las dos sirenas de fábrica

Supongamos que haya dos fábricas, *a* y *b*, la primera situada en Manchester y la segunda en Londres, y que cada una de ellas tenga una sirena y sólo una. Consideremos las cinco proposiciones generales siguientes, que suponemos ser verdaderas y haber sido asentadas de modo fiable:

p cada vez que toca la sirena de la fábrica *a* alrededor de mediodía los obreros de la fábrica *a* salen de ella;
q cada vez que toca la sirena de la fábrica *b* alrededor de mediodía los obreros de la fábrica *b* salen de ella;
r cada vez que toca la sirena de la fábrica *a* alrededor de mediodía los obreros de la fábrica *b* salen de ella;
s cada vez que toca la sirena de la fábrica *b* alrededor de mediodía los obreros de la fábrica *a* salen de ella;
t cada vez que toca la sirena de la fábrica *a* alrededor de mediodía toca simultáneamente la sirena de la fábrica *b*, y cada vez que toca la sirena de la fábrica *b* alrededor de mediodía toca simultáneamente la sirena de la fábrica *a*.

Las relaciones lógicas existentes entre estas cinco proposiciones son las siguientes: *r* es consecuencia lógica de la conyunción de *q* y *t*, y *s* es consecuencia lógica de la conyunción de *p* y *t*.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Bertrand Russell ha empleado este ejemplo para desacreditar la noción de que un acontecimiento tenga una causa única [8], y C. D. Broad lo ha hecho para insistir en la distinción existente entre una sucesión regular y una vinculación causal [9]. En este momento no nos preocupa la causalidad, y para nosotros la paradoja reside en el hecho de que, aun cuando se mire a *p* y *q* como leyes naturales, no ocurre así con *r* ni con *s*, si bien estas dos últimas son hipótesis de nivel inferior en los sistemas deductivos en que *q* y *t*, y *p* y *t*, respectivamente, son las hipótesis asentadas de nivel supremo (de suerte que *r* y *s* parecen satisfacer el criterio correspondiente a las leyes naturales de poder ser asentadas hipotético-deductivamente).

La solución de esta paradoja se encuentra en el hecho de que, aunque cada una de las proposiciones generales *q* y *t* puede estar irreprochablemente asentada, no lo estarán en el mismo sistema deductivo científico. En efecto: el sistema establecido en el que se establezca *q* será uno en el cual esta generalización, aun cuando pueda estar apoyada por datos directos en su favor, esté apoyada hipotético-deductivamente por haberse deducido de las hipótesis de nivel superior según las cuales los obreros dejarán el trabajo cuando oigan la señal prefijada para dejarlo y la sirena está suficientemente cerca de ellos para que la oigan (la generalización *q* se sigue igualmente de estas dos hipótesis de alto nivel); este sistema deductivo ya asentado, en el que aparecen *p* y *q*, es un edificio sumamente complicado, en el que las hipótesis de nivel supremo son unas hipótesis fisicopsíquicas acerca de la asociación de estímulos sensoriales con sensaciones, ciertas hipótesis psicológicas sobre reconocimiento y algunas hipótesis psicofísicas referentes a la actuación voluntaria; y las generalizaciones *p* y *q* ocupan un lugar muy insignificante en tal sistema deductivo de la teoría psicológica [10]. Pero la proposición general *t* —la de que las sirenas de ambas fábricas tocan siempre simultáneamente alrededor de mediodía—, aun cuando pueda estar perfectamente establecida por inducción por enumeración simple, no tiene sitio en dicho sistema deductivo. Así pues, aunque *r* puede deducirse de la conyunción de *q* y *t*, pudiendo estar bien asentadas por separado estas dos proposiciones, no lo estarán en el mismo sistema deductivo; y, en consecuencia,

[8] *The Analysis of Mind* (Londres, 1921), pág. 97 [versión castellana, *Análisis del espíritu*, Buenos Aires, Paidós, 1950, págs. 90 y sig.].

[9] *The Mind and its Place in Nature* (Londres, 1925), págs. 454 y sigs.

[10] El defecto estético de la teoría psicológica como sistema deductivo científico es que posee un enorme número de hipótesis separadas de nivel supremo; y hasta el momento apenas ha tenido éxito alguno en su propia unificación mediante el empleo de conceptos vinculadores, al modo seguido por la teoría física en el siglo XVII.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

puesto que *r* no es deductible ni de *q* ni de *t* (cada una por sí sola), le faltan las condiciones necesarias para que se le otorgue el grado de ley natural.

El carácter epistemológicamente relativo de la atribución del título de ley natural se hace patente por sí mismo si consideramos las circunstancias en que podríamos elevar la proposición *r* a semejante grado. Si nuestra organización social estuviese tan trabada y fuese tan involuntaria como la de las hormigas, la proposición *t* podría muy bien aparecer, en un sistema deductivo sociológico ya asentado, como conclusión a partir de hipótesis de nivel superior que estuviesen apoyadas independientemente, con lo cual tendría el grado de ley natural; y si, en tal situación, este sistema deductivo sociológico y el psicológico que contuviese las proposiciones *p* y *q* fueran tales que fuese posible conglobarlos en un sistema unificado (lo cual podría ocurrir muy bien en virtud de ser subsumibles las hipótesis de nivel sumo del sistema sociológico bajo las supremas hipótesis del psicológico), entonces la proposición *r* sería una hipótesis de bajo nivel de semejante sistema deductivo unificado y establecido, y estaría apoyada indirectamente del modo exigido para convertirla en una ley de la Naturaleza.

Russell y Broad emplearon este caso de las dos sirenas en un estudio de la causalidad y de las leyes causales, mientras que yo lo he hecho para debatir la noción, más sencilla, de ley natural, pero ambos estudios están íntimamente vinculados: el porqué de que nos neguemos a decir que el toque de la sirena de Manchester es causa —o parte de la causa— de que los obreros salgan de la fábrica de Londres es la falta de una cadena continua espacio-temporal de acontecimientos entre el de Manchester y el de Londres; y es la presencia de tal cadena intermedia de sucesos entre el toque de sirena en Manchester y la salida de los obreros de la fábrica de esta ciudad —cadena de acontecimientos, unos fuera del cuerpo, otros en el oído, otros en el nervio auditivo, otros en el cerebro— lo que nos permite incorporar la proposición *p* —la de que cada vez que toca la sirena de Manchester alrededor de mediodía salen los obreros de la fábrica de Manchester— al sistema deductivo psicológico (incluyendo en él lo fisicopsíquico y lo psicofísico).

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

LAS LEYES CAUSALES

La noción de ley natural es suficientemente poco definida para que el intento de distinguir con precisión las leyes naturales dentro de la clase de las [proposiciones] verdaderas [sobre] conjunciones constantes constituya una tarea harto ingrata. El caso es todavía peor si se pretende entresacar de aquéllas las que podrían llamarse, en cierto sentido especial, «leyes causales»; no voy a intentar labor tan ardua, sino que mencionaré simplemente unos pocos criterios que podría emplear quien quisiera hacer tal discriminación —y que no suponen una relación causal especial e inanalizable—, con objeto de que no se emplee la posibilidad de dicha distinción como argumento contra la tesis humeana sobre las hipótesis generales.

Muchos de los criterios plausibles hacen referencia al modo en que el tiempo entra en la ley natural, de suerte que al llegar aquí es necesario abandonar la simplificación que hasta este momento ha sido posible en nuestro estudio, o sea, la de manejar las generalizaciones como si todas ellas aseverasen una concomitancia de propiedades en la misma cosa o en el mismo acontecimiento: esto es, la de considerar que todas tuvieran la forma «todo lo que es *A* es también *B*» o la de «no hay nada que sea *A* y no-*B*». Es preciso distinguir ahora, entre estas generalizaciones, las que verdaderamente aseveren *concomitancias regulares* y aquéllas que, como hará ver un análisis ulterior, aseveren asociaciones constantes de propiedades en acontecimientos distintos, que tienen la forma «todo acontecimiento que sea *A* está acompañado —después, simultáneamente o antes— por un acontecimiento que es *B*» (enunciados de los que diremos que aseveran, respectivamente, *sucesiones regulares*, *simultaneidades regulares* y *precedencias regulares*).

Dejemos a un lado por el momento las concomitancias regulares y consideremos los casos en que la ley natural asevere una conjunción constante de propiedades en dos acontecimientos distintos. Existen varios criterios plausibles que reivindican para sí el que se los use para seleccionar una subclase de leyes causales de la clase de leyes naturales de este género (de evento doble). He aquí algunos de los más plausibles:

I. El criterio más débil es, acaso, el de excluir únicamente las leyes naturales que aseveren precedencias regulares, y admitir los que lo hagan con simultaneidades y con sucesiones regulares.

II. Un criterio más fuerte admitiría sólo las leyes naturales que

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

aseveren sucesiones regulares, pero ello independientemente de cuál fuese el intervalo temporal entre el acontecimiento que tuviese la propiedad A (el «suceso causa») y el que tuviese la propiedad B (el «suceso efecto»).

III. Un criterio todavía más fuerte admitiría sólo las leyes naturales que aseveren sucesiones regulares en las que estas sucesiones sean *deductibles, en un sistema deductivo ya asentado,* a partir de sucesiones regulares en las que no haya intervalo temporal entre el suceso causa y el suceso efecto —esto es, en las que ambos sucesos sean temporalmente continuos.

IV. Un criterio aún más fuerte que el anterior admitiría solamente estas sucesiones regulares temporalmente continuas.

La diferencia existente entre los criterios III y IV es que el primero se satisface si hay una cadena continua de acontecimientos entre el suceso causa y el suceso efecto tal, que cada pareja de miembros sucesivos de la misma obedezca a una ley de sucesión regular que satisfaga el criterio IV; esto es, el criterio III permite que sean causales las sucesiones regulares en las que haya una «acción a intervalo de tiempo», con tal de que se pueda explicar semejante acción llenando el intervalo con una cadena continua de acontecimientos tales que entre cada dos miembros sucesivos no haya acción a intervalo temporal. Y el criterio IV admite sólo sucesiones regulares en que no haya, en absoluto, acción a intervalo de tiempo.

Pueden reforzarse los criterios III y IV, convirtiéndolos, respectivamente, en los III′ y IV′, añadiendo unos requisitos: en IV′, el de que el suceso causa y el suceso efecto sean también espacialmente continuos (es decir, se excluye también la «acción a distancia»)[11], y en III′, el de que la cadena continua explicativa sea continua tanto espacial como temporalmente. Lo que hace que Broad esté tan seguro de que no se trata de un caso de una ley causal es que la sucesión regular formada por las veces que toque la sirena de Manchester y las salidas de los obreros de la fábrica de Londres no satisface este criterio III′.

Según una condición propuesta por algunos filósofos, además de los criterios que hemos presentado se requeriría que los dos sucesos que están reunidos constantemente lo fuesen «en la misma substancia» o «en el mismo tipo de substancia» —sea lo que sea aquello que se quiera decir con estas expresiones—. Y se ha empleado este criterio

---

[11] Esto correspondería a la primera definición de causa que da HUME: *A Treatise of Human Nature* [versión castellana, *Tratado de la naturaleza humana,* Madrid, Calpe, 1923], libro I, parte III, § 14.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

para negar el nombre de ley causal a las leyes de asociación psicofísica y fisicopsíquica basándose en que la mente y la materia son tipos de substancias tan distintos que no pueden «interactuar»; de suerte que las sucesiones regulares y las simultaneidades —que se aceptan— entre sucesos en la mente y sucesos en la materia tendrían que mirarse como ejemplos de «paralelismo», y no de «interacción causal».

Espero que una breve recitación de estos criterios, todos los cuales se han empleado (según creo) para excluir de las leyes causales o «leyes de vinculación necesaria» algunas de las [formulaciones de] conjunciones constantes que serían, de acuerdo con el enfoque de este capítulo, leyes naturales, bastará para poner en claro que las distinciones que se hacen en el habla usual entre las leyes causales y otras leyes naturales no exige que se postule ninguna relación «causal» específica no analizable en una combinación determinada de relaciones de conjunción constante y relaciones temporales (o espacio-temporales). Y la mayoría de los críticos modernos de la tesis de la conjunción constante cuyos argumentos contra ésta se han basado en su alegada insuficiencia para justificar la inducción o para dar cuenta del uso de los condicionales subjuntivos —más que en una insuficiencia para dar razón de las características de las leyes causales frente a las leyes naturales no causales— se han percatado de ello y lo reconocen [12].

Todas estas características, que cabe tomar como peculiares de las leyes causales, pueden relacionarse con el lugar que ocupa la ley causal en un sistema deductivo científico establecido. Los criterios que tienen que ver con la continuidad temporal o la espacio-temporal (III, IV, III′, IV′) deben su atractivo al hecho de que el método de construir un sistema deductivo por aserción de la existencia de sucesos intermedios que formen una cadena continua, y por explicación de las hipótesis deduciéndolas dentro de tal sistema a partir de hipótesis acerca de los sucesivos acontecimientos de semejante cadena, ha demostrado tener tantos éxitos, especialmente en las ciencias físicas, que nos sentimos mucho más a gusto con respecto a una ley natural si se la puede incrustar en tal sistema. Y los criterios que se refieren a que los sucesos ocurran en la misma (o en el mismo tipo de) substancia deben su plausibilidad a los muchos sistemas deductivos que se han

[12] Las sucesiones regulares presentan, frente a las simultaneidades y a las concomitancias regulares, una grave dificultad adicional para la tesis que identifica la necesidad nómica con la necesidad lógica. Pues el que un suceso tenga una propiedad *A* sólo puede entrañar que un suceso posterior tenga la propiedad *B* si el que un suceso tenga la primera propiedad entraña que exista un suceso posterior, esto es, si entraña que no se acabe el mundo inmediatamente después del primer suceso; mas el que tal cosa sucediese no es lógicamente imposible.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

asentado y que se ocupan del mismo tipo de cosas cuando se los compara con los pocos que han quedado establecidos que se ocupen de cosas de distintos géneros.

Causa y efecto

El uso principal de nociones causales, sin embargo, estriba menos en la noción de ley causal en cuanto distinta de la ley natural que en la distinción, cuando aparece un caso de una ley natural, entre un acontecimiento como causa y otro como efecto. El filósofo puede estar de acuerdo con Bertrand Russell en mantener que «en una ciencia suficientemente adelantada la palabra 'causa' no aparecerá en ningún enunciado de leyes invariables» [13], al mismo tiempo que utilice el lenguaje causal (como es conveniente hacer, según admite Russell) en la aplicación de las leyes naturales de la ciencia a los asuntos y hechos de sentido común. La importancia del lenguaje de causas y efectos en la vida cotidiana reside en que es el modo más conveniente de expresar los hechos de la acción intencional dirigida hacia fines no inmediatos, es decir, cuando hacemos algo para que ocurra otra cosa. En las aplicaciones de las leyes naturales, lo que se llama «causa» y lo que se llama «efecto» están determinados por la posibilidad de emplear lo primero como medio para conseguir lo segundo —la posibilidad teórica, ya que admitimos como causa de un fin, tomado como efecto, el medio para tal fin incluso si la industria humana no puede dar lugar a tal causa-medio.

Este hecho se hace perfectamente patente en nuestro uso del lenguaje causal con referencia a leyes de concomitancia regular o de simultaneidad regular. En un caso cualquiera del primer tipo, la cosa o acontecimiento que tenga la propiedad A será lo mismo que tenga la propiedad B, de modo que la ley no se cumple para parejas de acontecimientos, y los que aparezcan no pueden distinguirse, uno como causa y otro como efecto; mas puede aplicarse una distinción causal al tener tales dos propiedades: supongamos que se asienta como ley natural «todo A es B», mientras que no ocurre lo mismo con «todo B es A»; entonces, si fuésemos a hacer una cosa que fuese A, ello garantizaría que iba a ser también B, mientras que no sucedería lo contrario, de modo que en la aplicación de la ley «todo A es B» a una cosa determinada, c, podríamos distinguir el que c fuese A, como cau-

[13] *Our Knowledge of the External World* (Londres, 1914), pág. 220.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

sa, del que *c* fuese *B*, como efecto. Análogamente ocurre en un caso en que esté asentada una *simultaneidad regular* de modo que todo acontecimiento que tenga la propiedad *A* esté acompañado por otro acontecimiento simultáneo que tenga la propiedad *B*: si no está asentada la ley inversa, el primer acontecimiento se considerará como causa y el segundo como efecto. En ambos casos, sin embargo, si se halla asentada la ley inversa no seremos capaces de hacer la distinción entre causa y efecto, y, o bien rehusaremos en absoluto emplear el lenguaje de causas y efectos o lo utilizaremos simétricamente, llamando a ambos acontecimientos tanto «causas» como «efectos».

En el caso de las leyes de sucesión regular, sin embargo, llamamos causa al primer suceso y efecto al segundo; y lo hacemos aun cuando la ley sea recíproca, de suerte que el segundo acontecimiento determine nómicamente al primero tanto como éste a aquél. Y al revés, en el caso de las leyes de precedencia regular rehusamos llamar al segundo acontecimiento causa y al primero efecto, incluso si la ley de que se trate no es recíproca, de modo que, si bien todo suceso que sea *A* esté precedido por un suceso que sea *B*, sea falso que todo suceso que sea *B* esté seguido por un suceso que sea *A*. Aquí el espíritu de nuestro lenguaje nos prohibe, ante un caso concreto de esta ley, que llamemos causa al acontecimiento dotado de *A* y que llamemos efecto al dotado de *B*, precisamente porque decir tal cosa sería hacer una causa posterior en el tiempo a su efecto; y si queremos describir el acontecimiento posterior en relación con el anterior emplearemos expresiones como, por ejemplo, la de que es una «condición nómicamente suficiente» para el otro, o que lo «determina nómicamente»; pero no diremos que es causa de él.

Una explicación natural de la repugnancia de nuestro lenguaje de causas y efectos a tolerar que una causa suceda a su efecto, ya sea en cuanto a casos determinados de causación como con respecto a los criterios para distinguir las leyes causales de otras leyes de la Naturaleza, es suponer que ha surgido de nuestro interés, tan predominante, por la acción voluntaria. Si el que aparezca un acontecimiento es condición nómicamente suficiente para que aparezca otro posterior a él, podemos estar seguros (en ciertos casos) de que llegará este último tomando las medidas necesarias para que se dé el primero. Y para este fin carece de trascendencia que el que aparezca el acontecimiento posterior sea o no condición nómicamente suficiente para que aparezca el anterior; puede ocurrir que aquél pueda originarse de otros modos, que tenga una «pluralidad de causas» (por emplear el lenguaje de Mill): esta posibilidad no nos impedirá producir indirectamente

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

el acontecimiento posterior produciendo el anterior; mas si el que se dé aquél es condición nómicamente suficiente para que se dé éste, no podemos dar lugar indirectamente el anterior dando origen al posterior, ya que para el momento en que vayamos a producir éste el anterior se habrá dado ya o no, irrevocablemente. Y esta diferencia entre el caso de la sucesión regular y el de la precedencia regular es la razón, a mi entender, de que estemos dispuestos a llamar causa de un acontecimiento a una condición nómicamente suficiente de él en caso de que aquélla preceda a éste, y de que no lo estemos si no sucede: pues con nuestra actuación podemos frecuentemente afectar al futuro, pero no podemos hacer lo mismo con el pasado.

Esta explicación de los elementos peculiares a la causalidad en cuanto distinta de la legalidad nómica, a base de lo que es posible y lo que es imposible en la actuación voluntaria, no exige que nos adhiramos a un «animismo primitivo», que dotaría a la Naturaleza de deseos y voliciones humanos y que explicaría la causación en el mundo físico por analogía con la acción volitiva. En realidad, permite sugerir una explicación de la forma en que la «idea de la vinculación necesaria» puede haberse originado en los fenómenos de dicha acción sin necesidad de suponer proyección alguna de la misma sobre el mundo físico; pues consideramos, de un modo natural, el proceso de la acción volitiva indirecta, en el que el fin que se pretenda puede alcanzarse solamente produciendo primero unos medios para él, como una cadena de dos procesos: la acción volitiva que dé lugar a los medios y, a continuación, los medios dando origen al fin buscado [14]. Por ejemplo, la acción volitiva de un hombre primitivo que espante un oso que se aproxime tirándole un trozo de roca puede ser considerada, de un modo muy natural, como compuesta de dos acontecimientos: el primero, el arrojarle la piedra, y el segundo, el golpear ésta al oso. Como, en un estadio de pensamiento precrítico, se atribuirá la vinculación necesaria, no menos a las relaciones existentes entre la volición (o la intención) y el fin que puede sólo alcanzarse indirectamente, que a las existentes entre aquélla y su efecto inmediato de dar lugar a los medios, la coherencia exige que dicha vinculación se atribuya también a las relaciones que haya entre los medios y el fin que produzcan: si el hombre primitivo cree que existe una vinculación necesaria entre su intención de amedrentar al oso y el que la piedra que le arroje lo golpee, así como entre su intención de arrojar

[14] El medio como causante del fin es un caso del segundo sentido de la palabra «causa» para R. G. Collingwood [*An Essay on Metaphysics* (Oxford, 1940), páginas 285 y sigs.]

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

ésta al oso y que tal piedra resulte arrojada hacia el animal, se verá obligado a creer (si es que quiere que sus creencias concuerden entre sí) que existe también una vinculación necesaria entre el que la piedra se mueva hacia el oso y el que lo golpee. Y una vez que la noción de vinculación necesaria se adhiere a sucesiones regulares, se la transfiere con facilidad a simultaneidades y a concomitancias regulares, ya que éstas sirven también para la función de permitir que un fin que se pretende se alcance indirectamente produciendo primero los medios correspondientes —medios tales que, como causa, puedan producir, como efecto, sin intervención humana, el fin que pretendía el ser humano.

Proposiciones causales particulares; hipotetizados indicativos y subjuntivos

Quedan todavía por decir unas pocas palabras acerca de las proposiciones causales particulares de la forma «q porque p», en las que p y q sean proposiciones particulares contingentes y en las que el enunciado «q porque p» se emplee para aseverar que p es causa —o parte de ella— de q (y no para enunciar que se cumpla una relación de consecuencia lógica entre q y p, ni para enunciar meramente algo acerca de la creencia de q: por ejemplo, que si se sabe p sea razonable creer q). Juntamente con las proposiciones causales particulares, de la forma «q porque p» (por ejemplo, este cuadro se cayó al suelo ayer a mediodía porque en aquel momento se rompió el alambre), podemos someter a consideración hipotetizados indicativos, de la forma «si p, q» (por ejemplo, si el alambre de que cuelga este cuadro se rompe mañana a mediodía, se caerá al suelo) *, así como hipotetizados subjuntivos, de la forma «aunque p es falsa, si fuese verdadera q sería verdadera» (por ejemplo, aunque el alambre de que cuelga

* Normalmente representamos estas proposiciones con la fórmula «si p, entonces q», que parece gozar de la ventaja de hacer preceder cada uno de sus miembros por una partícula (ventaja que sería especialmente clara cuando se quieran marcar bien los «lugares vacíos» escribiendo «si ..., entonces ...»). Mas este calco de las expresiones inglesa y alemana *(if ... then ...* y *wenn ... so ...)* no sólo nos lastra con el pasmaroto «entonces», que no se sabe qué es lo que viene a hacer, como no sea confundirnos haciéndonos pensar en alguna relación temporal, sino que borra en parte la asimetría que distingue la condición de lo condicionado (o la hipótesis de la tesis), y que nuestro idioma reconoce anteponiendo a lo primero una partícula y a lo segundo una pausa (gráficamente, una coma). En esta obra, en particular, que quiere no alejarse mucho del lenguaje hablado, semejante barbarismo sería inexcusable.—*N. del T.*

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

este cuadro no se rompió ayer a mediodía, si lo hubiera hecho el cuadro se habría caído al suelo), siendo en todos estos casos p y q proposiciones particulares contingentes y estando empleados nómicamente los hipotetizados.

Empecemos por considerar los hipotetizados indicativos, de la forma «si p, q», cuyo análisis ha sido muy debatido recientemente por los lógicos. Parece indudable que, tal como se la emplea en los contextos empíricos normales, la *aserción* de «si p, q» entraña mucho más que la mera *aserción* de «no, p y no-q» *, ya sea igual el significado del primer enunciado al del segundo o comprenda más que él: la aserción de «si p, q» asevera, además de la proposición «no, p y no-q», la proposición según la cual esta última ha sido asentada —o podría habérsela asentado— deduciéndola de hipótesis de un sistema deductivo científico a la vez verdadero y ya asentado (juntamente, acaso, con otras proposiciones, p_1, p_2, etc., que se suponen implícitamente pertenecer al acervo común de quien hace la aserción y quien le escucha); por ejemplo, aseverar que si el alambre de que cuelga el cuadro se rompe mañana a mediodía éste caerá al suelo no es sólo aseverar que es falso que el alambre se rompa mañana y el cuadro no caiga al suelo, sino, asimismo, que esta proposición es deductible de cierta ley científica ya asentada (la de que los cuerpos no sostenidos por nada caen) juntamente con ciertas proposiciones que se admiten como sabidas en común por el que hace la aserción y el oyente (por ejemplo, que no habrá ningún objeto sólido entre el cuadro en su posición inmediatamente anterior a la rotura y el suelo, que aquél no estará sujeto por un reborde además de por el alambre, etc.). La dificultad que tiene el decir exactamente cuáles sean las hipótesis científicas y las proposiciones adicionales entrañadas en una aserción particular cualquiera de una proposición de la forma «si p, q» no nos debe llevar a pensar que en un enunciado de este tipo no existan, involucradas, hipótesis definidas y proposiciones particulares suplementarias definidas; tales hipótesis y proposiciones pueden variar de un caso a otro del mismo hipotetizado indicativo; pero, a menos que quien lo asevere esté dispuesto a especificar, con mayor o menor precisión, cuáles son unas y otras, es muy dudoso que pueda decirse con propiedad que asevere tal enunciado hipotetizado indicativo [15].

---

* O, como hemos propuesto en otra nota, «p y q no, no».—*N. del T.*

[15] La objeción que puede hacerse al análisis del significado del enunciado «si p, q» que lo resuelve en «existe un conjunto de hipótesis verdaderas y un conjunto de proposiciones verdaderas tales que 'no, p y no-q' sea consecuencia lógica de la conyunción de unas y otras» es que en cualquier ocasión en que se asevere «si p, q»

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

La aserción de un hipotetizado subjuntivo es parecida a la de uno indicativo, con la diferencia de que ahora se incluye la aserción de que *p* es falsa (indicada por la utilización del modo subjuntivo o por algún otro recurso), y la de que se tiene que matizar la aserción de que la proposición aseverada, «no *p* y no-*q*», sea deductible en un sitema deductivo establecido —añadiendo que tal deducción ha de ser independiente de la falsedad de *p*.

También la aserción de una proposición causal particular de la forma «*q* porque *p*» (por ejemplo, este cuadro se cayó al suelo ayer a mediodía porque se le rompió el alambre en aquel momento) es análoga a la de un hipotetizado subjuntivo, salvo en que incluye tanto la de que *q* es verdadera como la de que *p* es verdadera (*p* y *q* tendrán que estar sujetas a ciertas restricciones, temporales o espacio-temporales, en su relación mutua, con objeto de que *p* pueda ser proposición-causa y *q* proposición-efecto; pero esta restricción, sea la que sea exactamente, es extraña a lo que ahora perseguimos). Aun cuando la conyunción de *p* con «no, *p* y no-*q*» es lógicamente equivalente a la de *p* con *q*, la aserción de «*q* porque *p*» involucra mucho más que la aserción conjunta de *p* y de *q*: y, como en el caso de los hipotetizados indicativo y subjuntivo, el elemento suplementario es la aserción de que la proposición «no, *p* y no-*q*» es deductible, dentro de un sistema deductivo verdadero y ya asentado, a partir de ciertas hipótesis del mismo, juntamente —por lo general— con algunas proposiciones acerca de factores causales no mencionados explícitamente. (Así, el ejemplo de la aserción de que este cuadro se cayó al suelo ayer a mediodía porque se le rompió entonces el alambre omite toda referencia explícita a otros factores causales, en cuya ausencia el cuadro no se hubiese caído, o, de haberlo hecho, no hubiese caído al suelo —permaneciendo invariables las hipótesis del sistema deductivo del caso—.) Muchos de estos factores son las «condiciones permanentes» de Mill, y la razón de que sea normalmente innecesario mencionarlos es que son algo así como enseres, si bien pueden ser negativos, como en nuestro ejemplo (no había repisa sobre la que descansara el cuadro, ni sofá alguno bajo él, etc.); sin embargo, para dar plena cuenta de la lógica de la aserción es preciso explicitarlos. Y el hecho de que todas las condiciones causales pertinentes no se mencionen casi nunca de un modo explícito es lo que hace tan difícil sostener que una proposición causal particular mencione la hipótesis general de que constituya un caso;

---

se implica, acerca de las hipótesis y de las proposiciones suplementarias, algo más definido que el que simplemente las haya.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

pero lo que sí es seguro, a mi juicio, es que la *aserción* de una proposición de este tipo, «*q* porque *p*», entraña la de una hipótesis general, en el sentido de que quien haga la aserción tiene siempre que dar una respuesta a la petición de que cite la hipótesis sobre que haya basado aquella proposición —so pena de la acusación de que no hace más que aseverar la conyunción de *q* y *p* (en caso de que sea incapaz de satisfacer tal petición).

Conclusión

No podemos mirar los argumentos de este capítulo como si dejasen fuera de combate a quienes quieran mantener que la necesidad nómica es, de un modo independiente de las consideraciones epistemológicas, algo que objetivamente esté por encima y más allá de la conjunción constante. Hemos sostenido la tesis de que las verdaderas diferencias entre las aseveraciones de una conjunción constante y las de una ley natural proceden del modo en que las proposiciones que entran en unas y otras aserciones están relacionadas con otras proposiciones de los sistemas deductivos que emplee quien haga las aseveraciones; tesis que convierte en epistemológica la noción de ley natural y convierte la «naturalidad» de cada una de ellas en relativa al *corpus* racional del pensador[16]. Así pues, es imposible decir, de un modo general, que la aseveración de que «todo *A* es *B*» sea una ley de la Naturaleza —o de que si una cosa fuese *A* tendría que ser también *B*— es aseverar exactamente tal y tal cosa o tal otra; no cabe dar una respuesta adecuada al antihumeano que pida una contestación precisa acerca de cuál sea con exactitud la diferencia existente entre una ley específica de la Naturaleza y la «mera generalización» correspondiente a ella; y la imprecisa contestación que hemos dado en este capítulo, aun siendo de finura muy superior a la solución que propuse hace ya veinticuatro años (y según la cual la diferencia estribaba casi enteramente en el hecho de que la creencia en las leyes naturales era general, mientras que no lo era la creencia en las meras generaliza-

---

[16] C. D. Broad dice que «a primera vista» le parece «bastante seguro» que con «leyes causales» no quiere decir proposiciones de la forma «*A* está siempre acompañado por *B*» que estén «limitadas por condiciones acerca de continuidad espacio-temporal y cualitativa y adornadas con frunces psicológicos» [*Aristotelian Society Supplementary Volume 14* (1935), pág. 93]. En este capítulo hemos adornado las proposiciones de conjunciones constantes con frunces no psicológicos, sino epistemológicos, con objeto de elevarlas a un rango superior.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

ciones) [17], carece todavía de la finura suficiente, según sospecho, para hacer justicia a toda la complejidad de la situación. Pero esta complejidad es la de los matices que toma nuestro uso del lenguaje para describir, explícita o implícitamente, los sistemas deductivos científicos con los que pensamos acerca del mundo empírico: no hay necesidad de suponer que brote de nada transempírico del mundo mismo.

---

[17] *Mind, n. s.*, vol. 36 (1927), págs. 467 y sigs., vol. 37 (1928), págs. 62 y sigs

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

CAPITULO DECIMO

Explicación causal y explicación teleológica

Se puede decir que toda respuesta adecuada a un por qué es una explicación de algún género, de modo que la mejor manera de apreciar cuáles sean los diferentes tipos de explicaciones será la de considerar los diferentes géneros de respuestas adecuadas al mismo o a los distintos «por qué» que se puedan preguntar.

Lo que se pide al preguntar un por qué es algo que nos satisfaga intelectualmente de uno u otro modo, y ello se puede conseguir, en parte o totalmente, por medios diferentes. Es frecuente que quien pregunte no sepa de antemano el género de contestación que le va a satisfacer; y lo que satisfaga intelectualmente en forma parcial o completa a una persona puede no hacerlo en modo alguno con otra que se encuentre en un estadio distinto de desarrollo intelectual. A menudo, por ejemplo, los niños quedan completamente satisfechos cuando se reafirma con convicción el hecho acerca del cual hayan preguntado por qué; lo cual no significa que sean tontos, sino que lo que ocurre es que están dispuestos a aceptar aquel hecho, sin discusión, cuando se apoye en una autoridad: de lo que dudan es de que la autoridad sea suficiente; y el que la persona a la que hayan preguntado el porqué les responda con una reafirmación convencida puede valer para robustecer la autoridad lo bastante para que encuentren enteramente satisfactorio aceptar el hecho.

Cuando un adulto quiere que se le satisfaga de este modo puramente confirmatorio, formula la pregunta diciendo: «¿es realmente verdad que...?», mientras que reserva las preguntas con un «¿por qué?» para casos en que exija para satisfacerse algo más que la repetición de la cláusula interrogativa con el «por qué» omitido: lo que pide es una explicación, en el sentido propio de que se profiera una cláusula-*explicans* con la que se explique el hecho-*explicandum* acerca del cual hubiese preguntado el porqué —siendo el *explicans* requerido diferente del *explicandum*.

Los diferentes géneros de *explicandum* piden géneros diferentes de

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

explicación, o, al menos, géneros diferentes de explicaciones en primera instancia. Los *explicanda* primarios de la ciencia son los hechos empíricos particulares, cuyas explicaciones en primera instancia son de dos tipos: cuando el adulto pregunta por qué *h*, siendo *h* un asunto o situación de hecho particular, lo que quiere ordinariamente es, o una *explicación causal*, que se expresa por una cláusula «porque *j*», o una *explicación teleológica*, expresada por una cláusula «para que *j*». Cada uno de estos dos tipos de explicación involucra una referencia explícita o implícita a leyes científicas, mientras que cuando se pregunta el porqué de una ley científica (lo cual puede muy bien constituir un porqué en segunda instancia preguntado acerca de un asunto o situación de hecho particular) lo que se reclama no es una causa, ni una meta teleológica, sino una razón por la cual la ley científica sea lo que es. Dedicaremos este capítulo a la explicación en primera instancia de los hechos empíricos particulares, y postpondremos la explicación de las leyes científicas mismas hasta el próximo.

La explicación causal

Nuestro estudio del último capítulo sobre el significado de la cláusula «*q* porque *p*» comprende casi todo lo que necesitamos decir acerca de la explicación causal. Cuando una persona pregunta por la causa de un acontecimiento particular (por ejemplo, la caída de este cuadro al suelo ayer a mediodía), lo que pide es que se especifique otro acontecimiento, simultáneo o previo, que —juntamente con ciertos factores causales, inespecificados, que tengan la índole de condiciones permanentes— sea nómicamente suficiente para determinar que ocurra el acontecimiento que ha de explicarse (el suceso-*explicandum*) de acuerdo con una ley causal —en uno de los sentidos habituales de «ley causal» [1]—: no esperamos que cuando se pregunte un por qué se responda detallando todos los sucesos que, juntos, constituyan la causa total (esto es, un conjunto de sucesos que determinen colectivamente el suceso-*explicandum*), sino que todo lo que normalmente se espera es que se indique la causa parcial de mayor interés para el que pre-

[1] Al decir que un acontecimiento con la propiedad *B* está *nómicamente determinado* por otro que tenga la propiedad *A*, juntamente con ciertos acontecimientos con la propiedad A_1, otros con la A_2, etc., lo único que se quiere decir es que la generalización «toda conjunción de un acontecimiento dotado de *A* con acontecimientos dotados de A_1, A_2, etc., está asociada con un acontecimiento dotado de *B*» es verdadera; por consiguiente, el empleo del lenguaje de la determinación nómica no presupone un análisis no humeano ni de los enunciados nómicos ni de los causales.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

gunte —que, es de presumir, será la que él ignore—. Uno de los sentidos de dar una explicación *completa* sería el de especificar la causa total; mas en este sentido —como, verdaderamente, en la mayoría de los sentidos de «explicación completa»— no tendremos unicidad, ya que el mismo suceso puede perfectamente tener muchas causas totales distintas.

Las explicaciones causales consideradas como respuestas a preguntas por un porqué presentan diversas complicaciones, en las que no necesitamos detenernos largamente. La explicación formal que acabamos de dar es aquélla según la cual se admite que quien pregunta está pidiendo una *condición suficiente* del suceso-*explicandum* —o parte de una condición suficiente suya, pues se supone ya sabida la otra—; y en tal explicación el *explicans* es un suceso cuya aparición —que posee cierta propiedad—, conjuntamente con la de otros sucesos dotados de unas propiedades apropiadas, determina la aparición del suceso *explicandum*, que posee cierta propiedad; así pues, la existencia del acontecimiento *explicans* garantiza la existencia del acontecimiento *explicandum*. Pero a veces la pregunta del porqué reclama una *condición necesaria* del suceso-*explicandum:* entonces lo que se pide es que se especifique un suceso tal que si no hubiese ocurrido tampoco hubiera ocurrido aquél; y en este caso es el suceso *explicans* lo que está determinado nómicamente por el suceso *explicandum*, y no al revés. Por fin, es frecuente que cuando se pregunte un porqué se pida como respuesta que se especifique un acontecimiento que a la vez sea uno de un conjunto de ellos que constituyan globalmente una condición suficiente y un acontecimiento tal que en presencia del resto de este conjunto sea condición necesaria para que se produzca el suceso-*explicandum*.

Hay un tipo de explicación causal que, con razón o sin ella, produce gran satisfacción intelectual a quienes se han formado en las ciencias contemporáneas de la Naturaleza: a saber, la que emplea leyes causales cuyo sentido de causal concuerde con el criterio III′ (página 338). En este caso, para que pueda aceptarse como *explicans* un acontecimiento tiene que ser el primer miembro de una *cadena causal* de sucesos que termine en el *explicandum* (se llama con este nombre a una cadena espacio-temporalmente continua de sucesos si cada uno de los de la cadena determina nómicamente a sus vecinos de la misma de tal forma que la ley causal que ponga en relación el suceso-*explicans* con el *explicandum* sea una consecuencia, dentro de un sistema deductivo verdadero, de leyes de nivel superior que sólo relacionen sucesos espacio-temporalmente continuos). Y la satisfacción

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

intelectual que se encuentra en una explicación que mencione un «antepasado causal» se debe, en parte, al enorme éxito de tales explicaciones en las ciencias físicas, pero, asimismo, en parte, al hecho de que si el sistema deductivo cuyas hipótesis de nivel máximo pongan en relación acontecimientos espacio-temporalmente continuos no está refutado por los datos de que dispongamos, habrá gran cantidad de datos a favor suyo: pues habrá una cantidad ilimitada de hipótesis de nivel inferior acerca de antepasados causales que serán deductibles de las de nivel supremo, y en caso de que estas últimas fuesen falsas nos saltaría a la vista la falsedad de al menos algunas de aquéllas.

Al otro extremo nos encontramos con un tipo de explicación basado en generalizaciones que se hayan asentado por inducción directa, sin ningún apoyo indirecto hipotético-deductivo. Por tanto, estas generalizaciones no satisfacen las condiciones requeridas para recibir el título de «leyes naturales», y, en consecuencia, no cabe que las clasifiquemos como leyes causales, ni siquiera fijándonos sólo en el criterio más débil del último capítulo (que era el criterio I). Así pues, no se pueden llamar causales a estas explicaciones; y, sin embargo, son capaces de proporcionar cierta satisfacción intelectual, ya que comunican una información acerca de un punto sobre el cual el que preguntase podría estar en la ignorancia; Molière hacía bien al reírse de los médicos que presentaban la *virtus dormitiva* del opio como razón de que este vegetal haga dormir [2], pero no sería tontería ninguna contestar a una pregunta acerca de por qué dan sueño los polvos de un montoncito determinado diciendo que son de opio y que el opio hace dormir: pues ello informaría al que preguntase, y no lo supiese ya, que tales polvos causaban sueño no en virtud de su color, de su grado de finura, etc., sino en virtud de su composición química. Análogamente, cuando un niño pregunta «¿por qué es blanca ese ave?», la respuesta «porque es un cisne, y todos los cisnes ingleses son blancos» le hace saber que la blancura no es una peculiaridad de aquel ave determinada, con lo cual se presenta el caso particular como ejemplo de una proposición general.

La explicación teleológica

Tenemos que volvernos ahora hacia un tipo de explicación que no hemos debatido hasta el momento, y que ha originado muchísimas discusiones entre filósofos y entre biólogos con temperamento filosó-

[2] En la tercera escena del *ballet* de *Le Malade Imaginaire.*

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

fico, ya que se ha considerado que suscitaba dificultades científicas y filosóficas especiales. Este tipo de explicación es aquél en que se responde a la pregunta por el porqué de un acontecimiento o una actividad particulares especificando una meta o fin para alcanzar la cual aquel acontecimiento o actividad constituya un medio; y llamaremos «explicaciones teleológicas» a las de esta índole [3]. Si se me preguntase por qué me quedo en Cambridge durante todo el mes de agosto, respondería diciendo: «para terminar de escribir mi libro», y daría así una explicación teleológica. Si se me preguntase por qué mi gato araña la puerta en una ocasión determinada, podría muy bien contestar que para que yo le abra, que es otra explicación de este tipo. Si se pregunta a un ornitólogo por qué un cuclillo pone el huevo en el nido de otro pájaro, y contesta «para que el otro pájaro incube y alimente a su cría», o si a un fisiólogo se le pregunta por qué late el corazón y responde que para que la sangre circule por todo el cuerpo, que para transportar oxígeno de los pulmones a los tejidos y anhídrido carbónico de éstos a aquéllos (si quiere detallar más) o que para que el cuerpo pueda continuar viviendo (en función de un fin biológico último), estarán dando en cada caso una explicación teleológica, a base de la meta o fin de la acción: la explicación consiste en enunciar una meta a conseguir, y describe la acción como algo dirigido hacia cierto fin —como una «actividad dirigida a una meta» (por emplear la apropiada expresión de E. S. Russell [4]), empleando la palabra «dirigida» de forma que implique una dirección, pero no un director (y así lo emplearemos aquí).

Si admitimos —según lo estamos haciendo— que las explicaciones son contestaciones a preguntas por un porqué que verdaderamente respondan a estas preguntas y satisfagan intelectualmente, por tanto, en cierta medida, a quien pregunte, no podemos tener la menor duda de que las respuestas teleológicas del tipo que he presentado en estos ejemplos son genuinamente explicaciones. Y el hecho de que todas ellas puedan dar origen a nuevas preguntas no implica que no sean respuestas perfectamente correctas a las preguntas formuladas: es casi seguro que mi contestación sobre el porqué de mi estancia en Cambridge durante todo el mes de agosto no conducirá a ninguna otra pregunta, a menos que mi amigo quiera iniciar una discusión filosófica en cuanto al análisis correcto de los motivos de la acción racional; la

---

[3] El resto de este capítulo sigue, con ciertas alteraciones y correcciones, el texto de mi Presidential Adress [*alocución presidencial*] de 1946 a la Aristotelian Society [*Proceedings of the Aristotelian Society*, n. s., vol. 47 (1946-47), págs. 1 y sigs.].

[4] *The Directiveness of Organic Activities* (Cambridge, 1945).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

referente al porqué de que el gato arañe la puerta podría llevar a la pregunta ulterior acerca de por qué el gato «quiere que le dejen pasar» (por emplear el lenguaje del sentido común) —a la cual se contestaría de un modo apropiado con otra respuesta teleológica—, o a la de cómo haya aprendido este animal a arañar la puerta para que se vea que quiere que le dejen pasar —lo cual nos llevaría a una descripción de los procesos de aprendizaje de los gatos, descripción que podría hacerse o no en términos teleológicos—; pero consideraríamos todas estas preguntas como ulteriores y distintas: admitiríamos que la primera respuesta, sencillamente teleológica, era lo que buscaba el que hiciese la pregunta, y que si no le satisfacía debidamente desde el punto de vista intelectual no iba a repetir la pregunta, sino a hacer otra distinta.

Mas, tras haber insistido en que las explicaciones teleológicas son, en cuanto de primera instancia, irreprochables, hemos de admitir que tienen un rasgo que las distingue de las causales —rasgo que ha demostrado ser muy desconcertante para los filósofos, ya se ocupen de psicología filosófica o de filosofía de la biología—: en las explicaciones causales se explica el *explicandum* a base de una causa que lo preceda o que sea simultánea con él, mientras que en la teleológica se lo explica como relacionado causalmente, bien con una meta determinada situada en el futuro o con una finalidad biológica que es tan futura como presente o pasada. Lo que ha constituido un problema, desde que Aristóteles introdujo la «causa final», ha sido la referencia que las explicaciones teleológicas hacen a situaciones futuras —a menudo de un futuro relativamente distante—; y la controversia sobre la legitimidad de las explicaciones a base de causas finales continúa furiosamente entre los filósofos de la biología y, en menor medida, entre los biólogos activos.

Ahora bien, hay un tipo de explicación teleológica en el que la referencia al futuro no presenta dificultades: a saber, las que explican actos humanos a base de metas para cuya consecución serían medios tales actos: pues el que me haya preguntado considerará que mi respuesta teleológica a la pregunta sobre el porqué de que permanezca en Cambridge durante todo el mes de agosto —la de que lo hago para terminar de escribir mi libro— equivale a la de que obro así porque tengo la intención de escribirlo, y la de que mi estancia en Cambridge es un medio para realizar mi intento; respuesta que hubiese sido del género causal, en la que mi intención hubiera precedido, como causa,

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

a mi permanencia en Cambridge como efecto [5]. Siempre se entiende que las explicaciones teleológicas de actividades intencionales dirigidas hacia una meta son reductibles a explicaciones causales en las que las intenciones sean causas: por emplear los términos aristotélicos, la idea de la «causa final» funciona como «causa eficiente», y el comportamiento dirigido hacia una meta se explica como un comportamiento que intenta alcanzar una meta.

Esto no es decir que la acción intencional no presente dificultades filosóficas, pues existe el problema —fundamental para la psicología filosófica— de analizar correctamente la intención de actuar de cierta forma; pero se trata de algo distinto de nuestro problema en cuanto a cómo pueda aparecer una referencia futura en una explicación; a menos, realmente, que se adopte un análisis conductista extremo, según el cual la intención no tenga elemento consciente, y la conducta que intente alcanzar una meta sea simplemente lo que en los animales superiores llamamos conducta dirigida hacia una meta; mas para este conductismo extremo la psicología se reduce a biología, y la acción intencional cae dentro de la actividad biológica dirigida hacia una meta y del tipo de explicación teleológica que encontramos en las ciencias que se ocupan de la vida en general y no en especial de la mente.

Por tanto, en todas las explicaciones teleológicas no reductibles a explicaciones a base de una intención consciente de alcanzar una meta aparecen las dificultades provinentes de la referencia futura: en estos casos es evidente que no cabe reducir la respuesta teleológica, que explica el presente por medio de un acontecimiento futuro, a una no teleológica, que se apoye en una causa presente o pasada. Las explicaciones teleológicas que no se pueden reducir tan patentemente son las que presentan el problema filosófico; dedicaremos el resto del capítulo a ellas y a los problemas que suscitan.

---

[5] JONATHAN COHEN ha señalado [*Proceedings of the Aristotelian Society*, s. f., volumen 51 (1950-51), págs. 262 y sigs.] que semejante explicación diferiría de una explicación causal ordinaria en que es más difícil especificar la causa total cuando la intención forma parte de ella que en este otro tipo de explicación. Pero esta diferencia es sólo de grado (como Cohen parece estar dispuesto a admitir: *loc. cit.*, página 268 n.); y, por muy parcial que pueda ser la intención como factor de una causa total, no será posterior en el tiempo a la acción en beneficio de cuya explicación se la proponga.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Intentos actuales de eliminar las causas finales

Hoy están de moda dos caminos para resolver este problema; ambos pretenden reducir todas las explicaciones teleológicas a causales, y eliminar de este modo el peculiar rompecabezas de la referencia futura, pero se dirigen en sentidos opuestos.

El primero consiste en subrayar el parecido entre las explicaciones teleológicas del tipo de que nos estamos ocupando ahora y las de las acciones intencionales en que cabe dar buena cuenta de tal referencia, así como en argüir por analogía que en todos los casos la explicación teleológica es reductible a otra en que haya en el agente una intención —o algo análogo a ella— que sea la «causa eficiente»; con lo que la actividad dirigida hacia una meta sería siempre un género de la actividad que intenta alcanzar una meta. Puede decirse, así, que la conducta de mi gato al arañar la puerta se parece lo bastante a la de un hombre que golpee con los nudillos en una puerta cerrada para que sea razonable inferir que el gato actúa así, del mismo modo que el hombre, debido a una intención consciente de que se le deje pasar —o, por lo menos, a un deseo consciente de ello—; y, en forma parecida, pueden explicarse el comportamiento dirigido hacia una meta de un neurótico diciendo que tiene una intención o un deseo inconscientes, y la construcción del nido por un pájaro acudiendo a su instinto de hacerlo. Cuando la actividad dirigida hacia una meta que se trata de explicar es parte de la de un organismo completo —como ocurría en el ejemplo propuesto del latir del corazón—, no se suele poner lo análogo a la intención (impulso, connato, *nisus* o apremio) por separado en el órgano que sea, sino en el organismo como un todo: por ejemplo, el apremio por la propia conservación. En ocasiones la analogía se lleva tan lejos que se asume la existencia de un carácter propositivo parecido al de la acción voluntaria en todo comportamiento teleológico: William McDougall, por ejemplo, luego de explicar que no sólo entiende por «carácter propositivo» de los movimientos humanos que «se hagan con objeto de alcanzar su fin natural» (esto es, que sean teleológicos, en el sentido que yo doy a esta palabra), sino que «este fin se anticipe o prevea de un modo más o menos claro», continúa hablando de una «escala de grados de carácter propositivo», en cuyo extremo inferior habría una «anticipación vaga de la meta», que cabría atribuir al comportamiento del animal dirigido hacia una meta [6].

---

[6] W. McDougall, *An Outline of Psychology* (Londres, 1923), págs. 47 y sigs.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Otros autores (E. S. Russell, por ejemplo) rechazarían la asignación de carácter propositivo a semejantes actividades, por injustificadamente antropomórfica, y describirían la causa eficiente como un connato o impulso; pero todos los que tratan el problema de la explicación siguiendo el primer camino están de acuerdo en postular que siempre que se da un comportamiento dirigido hacia una meta hay presente en el organismo algo explicable del modo causal ordinario, y concuerdan en suponer que es un algo no analizable en términos puramente fisicoquímicos.

La ortodoxia biológica de hoy, sin embargo, diría que la postulación de semejante «algo» no explicable a base de la fisicoquímica, con objeto de dar cuenta del comportamiento teleológico, es una asunción o bien metodológicamente viciosa (en caso de que se lo suponga no dotado de otras propiedades que la de ser la causa de tal comportamiento) o metafísica y no empírica (si se supone que tiene otras propiedades ulteriores, como el carácter propositivo de McDougall). Y los biólogos ortodoxos añadirían que se han dado explicaciones satisfactorias de muchas actividades dirigidas a una meta en términos fisicoquímicos, y que según avanzan las nuevas ciencias de la bioquímica y de la biofísica hay cada vez menos razones para suponer que exista acción teleológica alguna (o, en todo caso, ninguna acción teleológica en que no esté involucrada la conciencia) que no sea explicable por medio de los solos conceptos y leyes de la química y de la física.

Esta actitud equivale a un intento de resolver el problema de las explicaciones teleológicas siguiendo un segundo camino: el de reducirlas a explicaciones fisicoquímicas del género causal ordinario. Se admite que por el momento ni la bioquímica ni la biofísica pueden efectuar esta reducción en la gran mayoría de los casos, pero se espera que algún día serán capaces de hacerlo: las explicaciones teleológicas han de aceptarse como actualmente irreductibles a las causales, pero no como irreductibles en principio. Así pues, el problema filosófico presentado por la referencia al futuro de tales explicaciones sería sólo un problema temporal, que se habría de resolver con el progreso de la ciencia; y las explicaciones teleológicas tendrían que mirarse, verdaderamente, como un tipo de explicación muy deficiente, que habría de desecharse en cuanto se descubriesen las causas verdaderas, fisicoquímicas.

Para mí, los biólogos ortodoxos tienen razón al rechazar el postulado de un connato o impulso que fuese no físico, y sí *sui generis*, para explicar el comportamiento dirigido hacia una meta con que

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

se encuentran en sus estudios biológicos, pero no la tienen al minimizar la satisfacción intelectual que proporcionan las explicaciones teleológicas: creo que podemos compartir la asunción ortodoxa de que todo acontecimiento esté determinado fisicoquímicamente y, sin embargo, conceder en la biología un lugar muy importante a tales explicaciones. Así pues, lo que propongo es que intentemos dar cuenta de la naturaleza de las explicaciones teleológicas de modo que resuelva la aparente determinación del presente por el futuro sin contravenir los principios normales de determinación de la ciencia y sin reducir todas las leyes biológicas a las de la química y la física [7].

Cadenas causales teleológicas

Si partimos de los supuestos ordinarios de la ciencia física sobre la determinación, la del *explicandum* por un suceso futuro que se encuentra aparentemente en las explicaciones teleológicas no sería directa, sino que operaría por medio de una cadena causal de sucesos que se encontraría entre aquél y la meta: incluso en la acción intencional vemos que la intención no produce la finalidad propuesta, sino que inicia una cadena cuya etapa final es alcanzarla; y en la acción no intencional dirigida hacia una meta, el dirigirse hacia ésta consiste simplemente en el hecho de que la cadena causal del organismo se mueva en dirección de ella —a menos que se quiera suponer que hay siempre «algo» suplementario (connato o impulso) involucrado en tal dirigirse, asunción que no me siento inclinado a hacer—; por tanto, la noción de cadena causal es fundamental. Desde luego, es igualmente fundamental en las explicaciones no teleológicas de la ciencia física, en las que es frecuente que la causa explicativa que se señale no sea un acontecimiento anterior y en continuidad con el *explicandum,* sino anterior pero vinculado a éste a través de una cadena causal. Enfoquemos el problema, en consecuencia, preguntando cuál es la peculiaridad —si es que hay alguna— de las cadenas causales involucradas en las explicaciones teleológicas.

Bertrand Russell lo ha enfocado de la misma manera que yo lo

---

[7] E. Rignano, en *Mind,* n. s., vol. 40 (1931), pág. 337; A. Rosenblueth, N. Wiener y J. Bigelow, en *Philosophy of Science,* vol. 10 (1943), pág. 24 («La conducta teleológica se convierte en sinónima de la gobernada por realimentación negativa»), y L. von Bertalanffy, *British Journal for the Philosophy of Science,* vol. I (1950), página 157, han analizado las explicaciones teleológicas de manera más o menos parecida a la mía. El campo de estudio que Wiener llama «cibernética» se ocupa en gran medida de los «mecanismos teleológicos».

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

hago, al aseverar, en su versión conductista del deseo, que lo peculiar de las cadenas causales teleológicas de las acciones es que forman «ciclos de conducta»; pero el único criterio que nos ha dado para separar estos ciclos de otras series repetidas de acontecimientos de la vida del animal es que cuando termina un ciclo de conducta aquél se encuentra «normalmente en una situación temporal de quiescencia» [8] —y ha presentado como ejemplo el sueño que sigue a haber comido—. Pero la quiescencia temporal es enteramente inadecuada como *differentia* para lo que andamos buscando: tras la explosión de una bomba o la erupción de un volcán llega un estado de esta índole, si bien en tales casos no hay teleología alguna en las cadenas causales. Y parece imposible encontrar característica alguna del estado final de una cadena causal teleológica, en sí mismo, que sea lo suficientemente general como para comprender todas las metas de las acciones que se dirijan hacia ellas y que, al mismo tiempo, sea suficientemente específica para diferenciar tales acciones de otros ciclos repetidos de comportamiento. A mi entender, es necesario mirar la totalidad de la cadena causal, y no meramente su estado final.

Me parece que podemos encontrar un criterio distintivo en una de las características que los biólogos han destacado en sus descripciones de la conducta dirigida hacia metas: a saber, en la persistencia con que se persiguen éstas en condiciones variables. Por citar a E. S. Russell: «El llegar a un fin o término definido no es *per se* nada distintivo de una actividad directiva, ya que los procesos inorgánicos se mueven también hacia un término natural... Lo que *sí es* distintiva es la persistencia activa de la actividad directiva hacia su meta, la utilización de distintos medios posibles encaminados hacia el mismo fin, la consecución de resultados frente a las dificultades» [9]. En cualquier cabeza brotarán mil ejemplos de la «plasticidad» de la conducta dirigida hacia una meta; y daremos uno sólo: las ratas de Lashley que habían aprendido a llegar hasta la comida a través del laberinto preparado por este autor seguían siendo capaces de atravesarlo en busca de la comida, sin equivocarse, tras haber sufrido graves reducciones de coordinación motórica debido a operaciones en el cerebelo, de suerte que no podían ya correr, sino sólo arrastrarse o avanzar a sacudidas [10]. La plasticidad no es, en general, una propiedad de una cadena teleológica sola, sino del organismo con respecto a cier-

---

[8] *The Analysis of Mind*, pág. 65 [versión castellana citada, pág. 63].
[9] *The Directiveness of Organic Activities*, pág. 144.
[10] K. S. Lashley, *Brain Mechanisms and Intelligence* (Chicago, 1929).

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

ta meta: esto es, que el organismo pueda alcanzar la misma meta bajo circunstancias diferentes, con frecuencia gracias al empleo de cadenas causales diferentes. Tratemos ahora de elucidar la significación lógica y epistemológica de esta plasticidad, con objeto de ver si valdrá para nuestro propósito de conservar la importancia de las explicaciones teleológicas sin introducir una causación extrafísica.

Consideremos una cadena de acontecimientos de un sistema, *b*, que puede ser físico de mayor o menor complejidad (un avión sin piloto o un electrón) u orgánico (un organismo completo o una parte de él relativamente aislable, por ejemplo, los riñones). Hagamos las suposiciones ordinarias de determinación, según las cuales todo acontecimiento del sistema estará determinado nómicamente por la totalidad del estado anterior del sistema juntamente con los factores causales pertinentes del ambiente o campo del mismo (a los que llamaremos «condiciones de campo»); entonces, la cadena causal de sucesos, *c*, de *b* a lo largo de cierto período de tiempo estará nómicamente determinada por el estado inicial del sistema, *e*, juntamente con la totalidad de las condiciones de campo que lo afecten durante dicho período con respecto a los sucesos en cuestión (y llamaremos *f* a este conjunto de condiciones). Tendremos que, para un sistema *b* dado con estado inicial *e*, *c* es una función uniforme de *f*: es decir, que para *b* y *e* dados, la cadena causal *c* estará determinada unívocamente por *f* —o sea, por el conjunto de condiciones de campo.

Consideremos ahora la propiedad (que pueda poseer una cadena causal de un sistema) de acabar en un acontecimiento de tipo Γ y no incluir ningún otro de este mismo tipo; llamémosla propiedad de alcanzar la meta Γ, y llamemos clase γ de alcanzar la meta Γ a la clase de todas las cadenas causales que la posean. Toda cadena causal que sea miembro de γ contendrá un suceso de tipo Γ y sólo uno, y será su acontecimiento final.

Definamos la clase de los conjuntos de condiciones de campo tales que toda cadena causal de un sistema dado *b* que empiece con el estado inicial *e* y esté determinada por uno de estos conjuntos alcance la meta dada Γ: llamémosla variancia, φ, con respecto a *b* dado *e* y para Γ; para expresarlo más sucintamente con los símbolos ya empleados: definimos la variancia φ como la clase de las *f* que determinen unívocamente las *c* que sean miembros de γ. Según esta definición, decir que una cadena causal —de un sistema *b*— que empiece por el estado *e* terminará en un estado de tipo Γ (sin haber pasado previamente a través de ninguno de esta índole) equivale lógicamente a decir que el conjunto de condiciones de campo es miembro de φ; por

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

tanto, la variancia es —repitiendo lo mismo en forma más laxa— la gama de circunstancias bajo las cuales el sistema alcanzará su meta.

Puede ocurrir que la variancia, φ, que hemos definido con referencia a *b*, *e* y Γ, no tenga miembros; en este caso no habrá en *b* cadena alguna nómicamente posible que parta de *e* y llegue a alcanzar una meta de tipo Γ. O bien puede suceder que φ conste de un solo miembro, caso en que habrá exactamente una cadena de esta índole nómicamente posible; entonces, el sistema que parte de *e* carecerá de plasticidad: habrá únicamente un conjunto de condiciones de campo que, juntamente con *e*, sea nómicamente suficiente para la consecución de una meta de tipo Γ.

El caso que nos interesa, que es aquél en que el sistema tiene plasticidad, aparece cuando la variancia, φ, posee más de un miembro, de suerte que baste que se encuentre uno cualquiera de los conjuntos posibles de condiciones de campo, juntamente con *e*, para alcanzar una meta como la indicada. Importa mucho advertir que la variancia puede tener muchos miembros y, sin embargo, haber una sola cadena nómicamente posible; ello se debe a que su tamaño (el de la variancia) puede ser mayor que el número de cadenas causales posibles introducido por la noción de variancia: pues puede ocurrir que haya varios conjuntos de condiciones de campo, cada uno de los cuales determine, a una con *e*, exactamente la misma cadena causal. Esto podría suceder si las leyes causales últimas que interviniesen fueran tales que cada uno de los acontecimientos de la cadena pudiera quedar determinado por dos o más condiciones de campo posibles; pero es más frecuente que ocurra cuando se admite que los acontecimientos de la cadena atribuyen propiedades al sistema en conjunto y cuando, aunque distintas condiciones de campo determinen acontecimientos parciales distintos del sistema o de partes del mismo, tales acontecimientos parciales estén vinculados causalmente de tal modo que el suceso total por ellos determinado permanezca invariable. Por ejemplo, si nos ocupamos de la cadena causal de eventos constituida por las temperaturas del cuerpo de un animal superior a lo largo de cierto período de tiempo, al producirse un cambio en las condiciones ambientales pertinentes (por ejemplo, en la temperatura exterior y en los recursos alimenticios) se producirán cambios en las actividades del animal (tanto en su comportamiento total, por ejemplo, en sus hábitos alimenticios y migratorios, como en el de sus partes, por ejemplo, de sus glándulas sudoríparas), pero estos últimos serán tales que compensen las modificaciones de la situación ambiente de suerte que la temperatura del cuerpo del animal no varíe. Otro ejemplo lo tendría-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

mos en la ruta de un avión sin piloto: el aparato está dotado de dispositivos de «realimentación» diseñados de tal modo que se consiga una trayectoria, a la altura debida y en línea recta, hacia la meta buscada, con independencia de las condiciones meteorológicas que puedan encontrarse.

Pero, ordinariamente, cuando la variancia tiene más de un miembro hay en el sistema en cuestión más de una cadena nómicamente posible que lleve a alcanzar la meta exigida: un animal puede moverse de muchos modos distintos para conseguir alimento, hay una gran variedad de procesos fisiológicos posibles capaces de entrar en juego para restaurar un tejido dañado, un pájaro puede adaptar su construcción del nido al tipo de material a su disposición. Sin embargo, tal como yo lo veo, el rasgo esencial de la plasticidad de la conducta es que se pueda alcanzar la meta bajo diversas circunstancias, y no que quepa hacerlo por medios diversos. Así pues, lo significativo al analizar la explicación teleológica es el tamaño de la variancia más que el número de cadenas causales posibles.

Adoptemos ahora el punto de vista de la lógica epistemológica o inductiva, y consideremos cuáles son los tipos de situación en que podamos inferir razonablemente que en un sistema habrá una cadena de acontecimientos que alcanzará una meta. Por la definición de variancia, predecir que, partiendo de un estado inicial, e, de un sistema b, habrá una cadena causal que alcanzará una meta de tipo Γ, equivale a predecir que el conjunto de condiciones de campo que aparezca será miembro de la variancia φ; por tanto, el carácter razonable de esta predicción depende del que tenga la creencia de que φ es suficientemente amplia para contener cualquier conjunto de condiciones que tenga alguna probabilidad de aparecer [11]. Llamemos ψ a la clase de estos conjuntos. Por razones de sencillez voy a suponer momentáneamente que sepamos que cualquier conjunto de condiciones de campo que aparezca estará contenido en ψ; esto es, que de hecho el sistema del caso no se encontrará un ambiente muy improbable (por ejemplo, que la próxima Edad Glacial no comenzará súbitamente mañana); entonces, el carácter razonable de la predicción de que el sistema alcanzará la meta depende del de creer que ψ esté incluida en φ.

Ahora bien, podemos haber llegado de dos maneras a nuestro conocimiento de la variancia φ: cabe que la hayamos deducido del

[11] La expresión «alguna probabilidad de aparecer» puede interpretarse de maneras diferentes, pero sus diferencias no afectan nuestra argumentación.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

conocimiento de las leyes causales pertinentes o que la hayamos inferido inductivamente, sabiendo los conjuntos de condiciones de campo bajo las cuales unas cadenas causales parecidas hayan alcanzado su meta anteriormente. En el primer caso —el de la obtención deductiva de los miembros de φ— encontramos dos subcasos interesantes, en los que tomamos ciertas medidas positivas para asegurarnos de que ψ —la clase de los conjuntos de condiciones de campo que tengan alguna probabilidad de aparecer— esté incluida en la variancia, φ. En el primer subcaso φ es pequeña, pero nos las arreglamos para que ψ sea menor aún; tal ocurre cuando en un laboratorio se llevan a cabo demostraciones científicas para estudiantes y se toman precauciones a fondo (por ejemplo, el experimento se realiza en el vacío, o se emplea agua destilada) para eliminar factores causales pertinentes que serían perturbadores (corrientes de aire o impurezas químicas) y garantizar de este modo que cualquier conjunto de condiciones que aparezca se encuentre dentro de la variancia conocida, φ, de tal suerte que la demostración sea un éxito. En el segundo subcaso ψ es grande, pero disponemos deliberadamente las cosas de forma que φ sea mayor aún; así sucede cuando se proyecta una máquina con el designio de que pueda trabajar bajo una gran variedad de condiciones, objetivo que cabe alcanzar empleando materiales idóneos (los automóviles se fabrican de modo que puedan resistir un trato duro y descuidado) o incorporando en ella dispositivos de autorregulación que aseguren que su forma de funcionar se ajustará a las condiciones que encuentre —como ocurre con el avión sin piloto.

Cuando hemos llegado al conocimiento de la variancia del caso por deducción de nuestro saber previo de las leyes causales oportunas tenemos la sensación de que la explicación teleológica de un acontecimiento a base de su dirección a una meta carece casi absolutamente de valor [12]; pues en este caso hemos calculado a partir del «mecanismo» del sistema el que la cadena causal que aparezca conduzca a la meta —esto es, su «teleología»—: para dar una respuesta teleológica a la pregunta de por qué se requiere formar (y suprimir) una respuesta causal ordinaria —que si se la hubiese expresado habría satisfecho intelectualmente al que preguntaba— para deducir de ella aque-

[12] En el caso de una máquina o de una exhibición de laboratorio puede darse, desde luego, una explicación teleológica de la actuación de una persona que ponga en marcha y regule una u otra, y podemos aplicar de un modo derivado semejante explicación teleológica (como un «epíteto traspasado») al funcionamiento de la máquina misma; pero todas estas explicaciones se apoyan en las intenciones tomadas como causas eficientes, de modo que no suscitan el problema especial de que nos estamos ocupando aquí.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

lla otra. Se trataría de un modo de contestar que no ofrecería ventaja alguna y, en realidad, poco franco.

La situación es enteramente distinta cuando nuestro conocimiento —o nuestra creencia razonable— de la variancia φ no procede de un saber de las leyes causales pertinentes: en este caso lo que sepamos acerca de los conjuntos de condiciones que den lugar a la variancia lo habremos obtenido, o bien directamente por inducción a partir de una experiencia previa de un comportamiento que se dirigiese a una meta y fuese parecido al que nos ocupe, o bien, indirectamente, por deducción a partir de proposiciones teleológicas generales que se hayan asentado, a su vez, por inducción a partir de experiencias anteriores. Y ninguno de estos dos caminos emplea leyes acerca de los mecanismos de las cadenas causales: la variancia φ se infiere —inductivamente— del conocimiento de clase parecidas a ψ; esto es, a partir de la observación, realizada con anterioridad, de las condiciones bajo las cuales haya tenido lugar un comportamiento teleológico parecido. Por ejemplo, mi conocimiento de las condiciones en las que emigrará una golondrina está extraído del conocimiento de migraciones anteriores de golondrinas y de otros pájaros migratorios, y quizá robustecido por proposiciones teleológicas generales —que acepto— acerca de las condiciones externas de la autoconservación o de la supervivencia de las especies, las cuales, por su parte, se han sacado inductivamente de la experiencia anterior.

Cuando nuestro conocimiento de la variancia oportuna se ha obtenido con independencia de todo conocimiento de las leyes causales que intervengan es cuando la explicación teleológica es valiosa: pues en este caso, debido a nuestra ignorancia de tales leyes, éramos incapaces de inferir el comportamiento futuro del sistema de ningún conocimiento de leyes causales, mientras que somos capaces de realizar semejante inferencia a partir de lo que sepamos acerca de cómo se hayan comportado anteriormente sistemas parecidos.

Convendría caer en la cuenta de que en todos los casos de explicación teleológica de un suceso presente por uno futuro —ya sea reductible o irreductible— aparecen inferencias inductivas en dos estadios de la argumentación. Uno de ellos es el de inferir la variancia, lo mismo si se llega a ella inductivamente que si se la obtiene deductivamente, a partir de leyes causales o de generalizaciones teleológicas que se hayan asentado inductivamente. La otra etapa inductiva es la inferencia de que el conjunto de condiciones pertinentes que se presente de hecho en el futuro caerá dentro de la variancia. Y toda res-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

puesta teleológica, por razonable que sea, puede ser errónea por cada uno de estos conceptos.

Mas, en general, las explicaciones teleológicas irreductibles no son menos dignas de crédito que las explicaciones causales ordinarias. Una explicación teleológica de un acontecimiento determinado es intelectualmente valiosa si no cabe deducirla de leyes causales conocidas; y, a igualdad de las demás cosas, es tanto más valiosa cuanto mayor sea la plasticidad del comportamiento a que se refiera: hacemos uso de estas explicaciones porque tratamos con sistemas —organismos y sus partes— que presentan gran plasticidad. Podemos considerar toda explicación de este tipo meramente como otro modo de enunciar el hecho de la plasticidad del comportamiento dirigido hacia una meta; pero enunciar este hecho es colocar el *explicandum* bajo una categoría general, y, además, nos permite hacer predicciones fiables acerca del modo en que se comportará el sistema en el futuro. Parece, pues, una cosa ridícula denegar el título de explicación a un enunciado que realiza las dos funciones características de las explicaciones científicas: la de permitir que nos demos cuenta de vinculaciones y la de hacernos capaces de predecir el futuro.

En este análisis de la explicación teleológica de las actividades no intencionales y dirigidas hacia una meta queda supuesto que ésta es posterior en el tiempo a la acción (esto es, verdaderamente, lo que da origen al problema filosófico) y se aprovecha mucho la noción de cadena causal. Se ha objetado que tal análisis no abarca el caso de las explicaciones de hechos biológicos que no se apoyen en metas futuras, sino en finalidades biológicas que sean tanto presentes como futuras; y que este caso queda comprendido, juntamente con el otro —en que la explicación se hace a base de una meta futura—, por la noción, más general, de *explicación funcional*, en la que la explicación se apoya en otra parte del todo del que el *explicandum* forme parte [13]. Pero las cuestiones que parecen reclamar una explicación funcional, más general, en vez de una teleológica a base de cadenas causales, resultan ser, cuando se las somete a examen, ambiguas. Si se

[13] JONATHAN COHEN, *Proceedings of the Aristotelian Society, n. s.*, vol. 51 (1950-51), págs. 270 y 292. Cohen sostiene que «las explicaciones funcionales aseveran que el *explanandum* es condición necesaria (lógica, causalmente, o de cualquier otra manera que goce de aceptación general) del *explanans* y, por tanto, también de la persistencia bajo condiciones variables de un todo del cual formen parte el *explanans* y el *explanandum*» (*loc. cit.*, pág. 292). Pero el que me lata el corazón no es condición *necesaria* de que me circule la sangre: el que sea causalmente necesario que me *lata* el corazón para que la sangre me circule se debe sólo a que mi anatomía incluye un corazón, pero no ningún otro mecanismo para hacer circular la sangre.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

pregunta a un fisiólogo por qué late el corazón, puede tomar la pregunta como petición de que se explique un hecho determinado —el latir de un corazón determinado en una ocasión determinada—, y en este caso la explicación «para que la sangre circule por todo el cuerpo» se referirá al movimiento de la sangre en un cuerpo concreto y en una ocasión concreta; mas con esta interpretación, el movimiento concreto de la sangre fuera del corazón que se deba a un latido determinado de éste será un acontecimiento cuyo comienzo en el tiempo será posterior temporalmente al comienzo del acontecimiento constituido por el latir de aquel órgano: este suceso estará vinculado a aquél, que es posterior, por una cadena causal de acontecimientos, y tendremos una explicación teleológica del mismo apoyada en una meta futura. Pero el fisiólogo puede tomar la cuestión, de un modo más natural, no como referente a un corazón concreto en una ocasión concreta, sino como pregunta acerca del latir de todos los corazones (de todos los corazones humanos, de todos los de los mamíferos, etc.); y en este caso lo que se pide es una generalización teleológica de la explicación teleológica particular del latir de un corazón determinado en una ocasión determinada. En ambos casos, sin embargo, la explicación se apoyaría en actividades dirigidas hacia metas, siendo éstas futuras. La peculiaridad de los fines biológicos es que constituyen metas permanentes, y en todo momento de la vida del organismo hay actividades que han de explicarse a base de la finalidad biológica: al latir de mi corazón en un momento determinado se debe que me circule la sangre un momento después, y aquél tiene que *continuar* latiendo para que ésta me *continúe* circulando: la generalización teleológica de la cual la explicación teleológica particular de que me lata el corazón en una ocasión concreta constituye un ejemplo o caso tendrá ejemplos en todos los momentos de mi vida, frente a lo que ocurre con las leyes teleológicas referentes a metas tras cuya consecución el animal se sumerja en una «quiescencia temporal» [14].

Las leyes teleológicas

En varios lugares nos hemos referido a las generalizaciones teleológicas. Exactamente lo mismo que las explicaciones causales particu-

[14] En ocasiones puede emplearse la expresión «explicación funcional» para designar una mera descripción del *modus operandi* de un órgano tal como el corazón; lo cual corresponde al tercer sentido que para J. H. Woodger tiene «función» [*Biological Principles* (Londres, 1929), pág. 327].

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

lares son casos de proposiciones causales de mayor o menor generalidad, las explicaciones teleológicas particulares son casos o ejemplos de generalizaciones teleológicas de mayor o menor generalidad; esto es, son (si es que son verdaderas) casos o ejemplos de leyes de acuerdo con las cuales un suceso de cierto género acaecido en un sistema de cierto género se encuentra nómicamente determinado por otro suceso posterior de cierto género que se presentará en tal sistema. Una ley teleológica de este tipo será valiosa como explicación si no se la ha deducido de leyes no teleológicas; y lo será tanto más, lo mismo intelectual que predictivamente, cuanto más amplia sea la gama de la variancia unida a ella.

La dificultad filosófica especial que presentan las explicaciones teleológicas de sucesos concretos —cuando se las compara con las explicaciones causales de los mismos—, a saber, que en ellas el presente resulta determinado por el futuro, no surge, en el caso de las teleológicas frente a las no teleológicas, cuando se las considera como leyes de la Naturaleza sin tener en cuenta sus aplicaciones destinadas a proporcionarnos explicaciones particulares; pues muchas leyes de la Naturaleza no teleológicas —por ejemplo, las de la mecánica newtoniana— son simétricas con respecto a los momentos anteriores o posteriores que aparezcan en ellas: enuncian que el presente está determinado por el futuro ni más ni menos que que lo está por el pasado. Ni tampoco difieren las leyes teleológicas en general por presentar un intervalo temporal entre los dos sucesos relacionados: muchas leyes no teleológicas se ocupan de lo que sucede durante cierto período de tiempo considerado como un todo (así, por ejemplo, la ley de acción mínima). La diferencia entre ambos tipos de leyes parece consistir simplemente en el modo como se descubre la variancia del caso.

Podemos hacer ahora una comparación con otro tipo de ley de una índole un poco peculiar, que aparece en la psicología y en la biología, y que comparte con el tipo teleológico las dos características de que exista un intervalo temporal entre el suceso determinante y el determinado y que se cumpla bajo una amplia variedad de condiciones descubiertas inductiva, y no deductivamente: me refiero a las leyes que gobiernan lo que Bertrand Russell ha llamado «fenómenos mnémicos», y a las que ha dado el nombre de «leyes mnémicas» [15]. El ejemplo más sencillo de semejantes leyes está constituido por la de la evocación, por la cual al vivir la persona una experiencia de la

[15] *The Analysis of Mind*, págs. 77 y sigs. [versión castellana citada, págs. 74 y sigs.].

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

cual constituya una imagen la imagen mnémica, ésta queda determinada (parcialmente) como tal imagen presente; pero la biología tiene gran cantidad de ejemplos no psicológicos de ellas: así, las leyes mendelianas de la herencia afirman que, en ocasiones, algunas de las características presentes en un organismo están determinadas con gran precisión por las características del padre (o de los padres) en el momento en que comenzó el proceso de reproducción (es más frecuente que la determinación mendeliana sea sólo estadística). En todas las leyes mnémicas se dice que un suceso anterior determina otro posterior, sin especificar —ni siquiera conocer, en realidad— cuál sea la cadenal causal que intervenga. Si queremos podemos postular la persistencia de los genes para explicar los hechos de la herencia, y la existencia de rastros en el cerebro, o de ideas inconscientes en la mente, para explicar la memoria —pero se tratará de hipótesis explicativas suplementarias, que van más allá de los que afirma la ley mnémica misma—; o bien podemos seguir la sugerencia russelliana de suponer que exista un tipo de causación (a la que ha llamado «causación mnémica última») en la que el acontecimiento pasado determine directamente el suceso futuro sin que haya cadena causal intermedia alguna [16] —suponer esto sería algo tan ajeno a nuestra manera normal de pensar como suponer que la meta futura determine directamente la acción actual dirigida hacia ella; y, como Russell, no estoy dispuesto a aceptarlo si es que cabe alguna otra vía de escape—. Tal como están las cosas, los fisiólogos están embarcados en un proceso de descubrimiento de datos independientes y muy poderosos en favor de la existencia de los genes postulados por los genéticos, y cabe que los neurólogos o los psicólogos experimentales y clínicos descubran, con el tiempo, pruebas independientes y satisfactorias de los rastros cerebrales o de la persistencia de un inconsciente; pero mientras tanto tenemos las leyes mnémicas; y, a mi parecer, el mejor modo de presentarlas es el de habérnoslas con ellas exactamente del mismo modo que con las teleológicas, y hacer que su rasgo distintivo sea la variancia que hayamos inferido inductivamente (variancia que, lo mismo que en el caso de las leyes teleológicas, es, con frecuencia, bastante grande: así, las ratas de Lashley conservaban la destreza para atravesar el laberinto después de habérseles quitado partes importantes, y distintas, del cerebro).

Por consiguiente, tanto las leyes teleológicas como las mnémicas

---

[16] La causación mnémica última satisfaría el criterio II del último capítulo (pánas 337 y sig.), pero no ninguna otra condición más fuerte.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

aseveran la existencia de una cadena causal que vincule los sucesos determinante y determinado, y que se mantenga bajo una amplia gama de condiciones; esto es, el sistema en cuestión tendrá una variancia o plasticidad bastante grande, que no se habrá deducido de leyes no teleológicas o no mnémicas, sino que se habrá asentado inductivamente, por medio de observaciones. La diferencia entre unas y otras —la de que en las leyes teleológicas el suceso determinante sucede al determinado, mientras que en las mnémicas le precede— no parece tener gran importancia al lado de su semejanza; y, por tanto, voy a clasificar juntos ambos tipos bajo lo que llamaré —a falta de mejor nombre— «leyes bióticas»; denominación que he elegido porque las que han llamado nuestra atención han sido unas que se aplicaban a sistemas vivos, pero en mi definición de «ley biótica» no entra referencia alguna a la vida. En ocasiones cabe subsumir una ley mnémica y una teleológica en una ley biótica, más general, que sea a la vez una y otra cosa: así, las leyes mendelianas de la herencia afirman que las características de un conjunto de organismos están estadísticamente determinadas por las de su conjunto de progenitores y también determinan estadísticamente las de su conjunto de descendientes [17].

Así pues, presentamos la noción general de ley biótica —de la cual es una especie la ley teleológica— como intento de resolver la disputa entre los biólogos «mecanicistas» y los «teleologistas». Temo, sin embargo, que no satisfará a ninguna de las partes: éstos dirán que toda la versión que he presentado de las leyes teleológicas a base de cadenas causales y de variancia de condiciones presupone el supuesto mecanicista de que todo suceso esté determinado fisicoquímicamente, y que admitir las explicaciones teleológicas *faute de mieux* es ignorar el carácter esencialmente irreductible de las leyes correspondientes, que es lo que ellos defienden; y aquéllos declararán que no les sirven de nada las leyes teleológicas a menos que sean últimas e irreductibles, y que es metodológicamente vicioso introducir tipos nuevos de leyes justamente por no conocer todas las leyes naturales del tipo ordinario; por fin, ambas partes aunarán sus fuerzas para criticar mi estudio por indebidamente epistemológico: la controversia, dirán unos y otros, no se refiere al modo en que lleguemos a conocer proposiciones generales sobre la actividad dirigida hacia metas, sino al contenido de tales proposiciones: es una cuestión acerca de

[17] La inclusión que hace Rignano de las «manifestaciones finalistas de la vida» dentro de una «propiedad mnemónica» va mucho más allá que mi sencilla comparación.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

los elementos últimos de los hechos biológicos, no acerca de la organización de nuestros conocimientos biológicos actuales.

Todas estas críticas, y en especial la que reúne ambas partes, están basadas en lo que es preciso considerar actitud ingenua con respecto a la función de las leyes científicas: pues ésta consiste exactamente en organizar nuestros conocimientos empíricos de un modo que nos satisfaga intelectualmente y nos otorgue la posibilidad de predecir lo desconocido. No cabe tratar la naturaleza de estas leyes independientemente de su función dentro de un sistema deductivo; el mundo no está constituido por hechos empíricos a los que se añadieran las leyes de la Naturaleza: aquéllo a lo que damos este último título son artefactos conceptuales con los que organizamos nuestros conocimientos empíricos y predecimos el futuro; desde este punto de vista cualquier hipótesis general cuyas consecuencias estén confirmadas por la experiencia es un artefacto intelectual valioso, y el que saquemos partido de tal hipótesis no presupone que no se la pueda subsumir en algún momento futuro bajo una hipótesis más general de un sistema deductivo aplicable en una esfera más amplia, ni que los hechos que explique no sean explicables alguna vez por medio de una hipótesis enteramente distinta de otro sistema deductivo.

Las hipótesis bióticas se comportan exactamente igual que otras hipótesis científicas, en cuanto que con frecuencia se las puede considerar como hipótesis de bajo nivel de un nuevo sistema deductivo, en el que sean deductibles de un conjunto de hipótesis de nivel superior: por ejemplo, la ley teleológica especial referente a un alimento concreto (por ejemplo, hierba) como meta y a una especie concreta de animales (por ejemplo, los caballos) es deductible de una hipótesis teleológica menos especial sobre la búsqueda de alimento en general, juntamente con ciertas hipótesis bioquímicas acerca de las condiciones de digeribilidad de la hierba. A menudo, a una actividad de un animal dirigida hacia una meta (por ejemplo, la construcción del nido) le sigue otra (por ejemplo, la incubación de la puesta de huevos), y la sucesión de ambos tipos de actividad teleológica cae bajo una ley teleológica general (por ejemplo, el modo de propagación de la especie). Las discusiones sobre la clasificación correcta de los instintos son en gran medida discusiones acerca de cuál sea el mejor sistema deductivo general que incluya hipótesis bióticas de alto nivel para explicar los modos instintivos de comportamiento especiales. Así, cuando E. S. Russell propone la generalización de que «la meta de una acción —o serie de acciones— directiva está normalmente en relación con alguna de las finalidades biológicas principales de conser-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

vación, desarrollo y reproducción»[18], está indicado que hay un sistema deductivo, cuyas hipótesis de nivel supremo incluyen hipótesis teleológicas, capaz de absorber todos los sistemas que se refieran a metas particulares; naturalmente, hasta ahora no se ha elaborado con todos sus detalles ninguno de estos sistemas deductivos más perfeccionados, pero la posibilidad de construirlos convierte las hipótesis explicativas teleológicas en iguales a las no teleológicas también en otro respecto: a saber, que esperamos proporcionar otras explicaciones ulteriores y una satisfacción intelectual más profunda al incorporar leyes especiales a un sistema unificado.

He incluido como parte de la definición de las leyes bióticas que no estén incorporadas a un sistema deductivo fisicoquímico[19]; pero si una ley semejante, que esté incluida en un sistema deductivo biótico (esto es, uno en que haya leyes bióticas entre sus hipótesis de máximo nivel) resultase susceptible de explicación fisicoquímica, ello no nos debe impedir que continuemos haciendo uso de su situación en el sistema biótico siempre que resulte ventajosa la reflexión en este sentido: últimamente se ha incluido cada vez más el sistema deductivo químico que tiene como hipótesis de nivel sumo las leyes de Dalton de la combinación atómica dentro del sistema deductivo de la física, que es más general; pero los químicos encuentran mucho más conveniente tratar la mayoría de sus problemas apoyándose en los átomos y en las moléculas que haciéndolo en electrones o en funciones de onda. Y tanto las explicaciones teleológicas como las mnémicas tienen un rasgo que es casi seguro que las haga continuar siendo útiles (se las llame como se las llame) incluso en caso de que las fisicoquímicas las superen: este rasgo consiste en que, normalmente, las explicaciones teleológicas no hacen referencia al tiempo exacto que se tarde en alcanzar la meta, ni las mnémicas al tiempo exactamente transcurrido desde que acaeciera el suceso determinante (y, ciertamente, en el rasgo de la persistencia propio de las actividades dirigidas a una meta, que los biólogos subrayan[20], está implícita la falta de importancia del tiempo empleado para alcanzarla); de modo que, aunque los biólogos mecanicistas nos proporcionen una explicación completa de la vida desde un punto de vista fisicoquímico, es probable que continuemos dando explicaciones teleológicas (o lo que

---

[18] *The Directiveness of Organic Activities*, pág. 80.

[19] Con esta última expresión quiero decir un sistema deductivo cuyas hipótesis de nivel supremo sean físicas o químicas.

[20] Por ejemplo, E. S. Russell, en *The Directiveness of Organic Activities*, página 110: «Por lo regular, si no se alcanza la meta la actividad persiste».

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

antes se hubiera llamado así) siempre que no nos interese el tiempo exacto empleado en alcanzar la meta.

Voy a terminar este capítulo resumiendo la parte biológica de mi argumentación. Hemos presentado una versión del rasgo distintivo de las explicaciones teleológicas que no asume que tales explicaciones sean últimamente irreductibles a la química y a la física, y que no exige ningún concepto nuevo de ley causal. Con este objeto he seguido a los biólogos al destacar la plasticidad del comportamiento que se dirige a metas, y he analizado la peculiaridad de las explicaciones teleológicas apoyándome en las nociones —emparentadas con aquél— de multiplicidad de las cadenas causales mediante las cuales quepa alcanzar la meta, y de variedad de las condiciones en las que pueda presentarse la actividad que se dirige a una meta (nociones que hemos visto están también involucradas en la explicación mnémica). Hemos trazado solamente un bosquejo, que necesitará aún mucho trabajo para que se convierta en un retrato convincente; pero lo hecho basta para convencerme de que lo que he tratado de conseguir es posible, y de que el reino de la biología no tendría por qué sacrificar su autonomía propia ni en caso de que la física lograra que se reconocieran sus pretensiones —que muchos biólogos proclaman en su nombre— de ser la emperatriz de todas las ciencias de la Naturaleza.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

La explicación de las leyes científicas

El capítulo precedente ha hecho ver cómo se dan explicaciones científicas, bien a base de causas o a base de metas teleológicas: tales explicaciones involucran siempre una referencia, explícita o implícita, a leyes científicas. Vamos a estudiar ahora el tipo de explicación que se pide al preguntar el porqué de una ley científica; lo cual puede muy bien constituir la explicación en segunda instancia pedida por alguien a quien se haya dado ya la causa —o la meta— de un acontecimiento particular, pero que pregunte la razón por la que la causa dicha cause tal acontecimiento, o por la que la meta mencionada constituya la meta del mismo: en este caso preguntará por una explicación de la ley —causal o teleológica— a la que se haya hecho referencia explícita o implícita en la explicación en primera instancia que se le haya dado.

Cuando se pregunta el porqué de una ley científica cabe que se pidan géneros distintos de respuestas: pueden pedirse las razones para creer la ley, y en tal caso tal vez sea una contestación satisfactoria una recitación de los datos empíricos a su favor, o una justificación de las normas inductivas empleadas para asentarla sobre la base de tales datos; puede incluso tratarse de una petición de la causa psicológica o sociológica de la aceptación general de tal ley, caso en que lo que se pediría no sería en modo alguno una razón, y en que estaría mejor formular la pregunta así: «¿Qué es lo que hace que la gente crea tal ley científica?». Lo que llevamos dicho basta para estas peticiones; pero la pregunta que suscita un nuevo problema es la que interroga no por una causa ni por una razón para que se acepte la ley, sino por una razón de la misma ley. Y que esto es lo que se pide queda perfectamente en claro cuando la pregunta se expone de la siguiente forma desarrollada: «¿Por qué es lo que es la ley científica en cuestión?»; ¿por qué —por ejemplo— es la ley de gravitación una ley de proporción cuadrática inversa, en lugar de serlo de proporción cúbica inversa?

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

El lector que haya llegado hasta este punto del libro no se sorprenderá de la manera en que he de contestar a esta pregunta; pues responderemos mencionando un sistema deductivo establecido en el que la ley en cuestión sea una hipótesis de bajo nivel deductible —dentro de dicho sistema— de un conjunto de leyes de nivel superior: explicar una ley es presentar un conjunto establecido de hipótesis del cual se siga aquélla. No es necesario que estas hipótesis de alto nivel se asienten independientemente de la ley que expliquen: todo lo que se exige de ellas para que proporcionen una explicación es que se las considere ya asentadas y que dicha ley se siga lógicamente de ellas. Apenas hay exageración en decir que ésta es toda la verdad en cuanto a la explicación de las leyes científicas; y el resto del capítulo tendrá más que nada la naturaleza de un comentario a esta verdad.

La alternativa de diversas explicaciones posibles

Señalemos en primer término que el hecho de que una generalización científica pueda explicarse como consecuencia de un conjunto de leyes de alto nivel no excluye que sea asimismo explicable como consecuencia de otro conjunto de leyes de alto nivel: las dos explicaciones serán incompatibles sólo en caso de que dichos dos conjuntos sean mutuamente incoherentes o incompatibles; pero si uno de ellos contiene conceptos teoréticos, o si ambos los contienen pero empleados dentro de sistemas deductivos diferentes, ambos conjuntos no serán incompatibles entre sí (como hemos visto en el último capítulo, en modo alguno se estorban una explicación teleológica y una explicación causal de un hecho; y, análogamente, la explicación de una generalización ya asentada que se consiga subsumiéndola bajo una ley teleológica no excluye otra explicación de la misma que se obtenga al subsumirla bajo una ley no teleológica). Aceptar simultáneamente dos explicaciones en primera instancia de la misma ley de bajo nivel es considerar ésta incorporada en dos sistemas deductivos científicos ya asentados que operen con géneros diferentes de conceptos.

Encontramos un ejemplo de esta actitud de estar dispuesto al empleo de explicaciones dobles en el trabajo de los psicólogos y psiquiatras que, siguiendo a Freud, tienden a explicar las generalizaciones asentadas acerca de ciertos tipos de comportamiento humano mediante hipótesis que hagan uso de conceptos teoréticos tales como «deseos inconscientes»: los de mayor valía (incluyendo al mismo Freud) insisten en que dar una explicación apoyándose en procesos de un «in-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

consciente» no elimina la posibilidad de que se expliquen también a base de procesos fisicoquímicos del cerebro (o, con mayor generalidad, del cuerpo); y pretenden que, aun cuando creen, con los fisiólogos, que es perfectamente posible que en el futuro se descubra semejante explicación fisicoquímica, actualmente, dada nuestra ignorancia del funcionamiento de detalle del cerebro, es ventajoso emplear la explicación a base del inconsciente en cuanto que permite hacer predicciones. Algunos psicólogos precipitados, en su devoción por tal explicación psicológica, han creído necesario negar de antemano la posibilidad de una explicación fisicoquímica; y, por otra parte, muchos neurólogos han rechazado con toda energía cualquier explicación apoyada en estados inconscientes de la mente, fundados en que se trataría de entidades inobservables y, por tanto, míticas; sin darse cuenta, al parecer, de que si semejantes entidades aparecen como conceptos teoréticos en las hipótesis de nivel supremo de un sistema deductivo científico que tenga conclusiones confirmadas empíricamente, tienen exactamente la misma condición epistemológica que los conceptos eléctricos y químicos a base de los cuales los neurólogos quieren dar sus explicaciones fisicoquímicas. Pero ambas actitudes negativas son injustificadas: presentar un tipo de explicación no quita que se presente otro tipo, con tal de que las dos hipótesis explicativas no fuesen incompatibles si se encontrasen en un mismo sistema deductivo, y dos distintas explicaciones posibles forman una alternativa *excluyente* sólo si son incompatibles [1].

Cuando dos explicaciones posibles de la misma ley de nivel ínfimo —o del mismo conjunto de leyes— son incompatibles no podemos apoyarnos en principios fijos y tajantes para preferir una a otra. Por regla general, en caso de que se tengan dos explicaciones de este tipo habrá de preferirse la que, además de comprender las leyes para explicar las cuales haya sido propuesta, cubra asimismo un número mayor de otras leyes ya asentadas de nivel ínfimo, o el grupo más

[1] C. D. Broad, poniendo un ejemplo de un «axioma *prima facie* acerca de la causación», escribe: «Sin duda alguna es evidentemente absurdo decir que este cambio mental sea causa total de este movimiento, y que este cambio corporal sea *también* causa *total* del mismo movimiento corporal»; y emplea esta unicidad supuestamente evidente de las causas totales como argumento contra la tesis humeana acerca de la causalidad. [*Examination of McTaggart's Philosophy*, t. I (Cambridge, 1933), páginas 232 y sigs.]. Este autor, desde luego, toma su «causa total» de tal modo que en ella no quedan incluidos antepasados causales. Pero a mí me parece que es un mero prejuicio el excluir la posibilidad de que haya dos explicaciones causales distintas —y compatibles entre sí— de un comportamiento concreto y delimitado mío, tal como un desliz verbal (uno a base de acontecimientos en mi cerebro y el otro a base de procesos que sucedan en mi «inconsciente»).

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

importante de ellas. Si dos hipótesis explicativas abarcan las mismas leyes ya asentadas o grupos de ellas igualmente importantes, pero una comprende cierto número de generalizaciones aún no sometidas a contrastación empírica que la otra no comprenda, si bien sería una insensatez considerar la primera como la mejor mientras sus consecuencias suplementarias no hayan sido sometidas a contraste y confirmadas, se la puede tener por más fértil, ya que abarca generalizaciones que podrían asentarse en el futuro. Y en caso de que no se hubiese pensado en estas generalizaciones nuevas hasta el momento de ver que eran consecuencias de la hipótesis explicativa (como me ocurrió a mí al construir la teoría trifactorial del capítulo tercero), el valor intrínseco de haber pensado en semejante hipótesis no desaparecerá enteramente si se encuentra luego que tales consecuencias quedan refutadas por la experiencia —aun cuando, como es natural, será menester que rechacemos dicha explicación, por haber dado lugar a conclusiones de las que sepamos que son falsas.

Si dos explicaciones comprenden exactamente las mismas generalizaciones de nivel ínfimo, lo mismo ya asentadas que no, los sistemas en que aparezcan serán *empíricamente equivalentes* en el sentido del capítulo cuarto (pág. 116); y en este caso no habrá nada que permita la elección entre las dos explicaciones, a menos que uno de los conjuntos de hipótesis explicativos —pero no el otro— admita una posibilidad de ser ampliado incorporándolo dentro de un conjunto de hipótesis que formen una teoría más amplia —del modo que ilustra el ejemplo propuesto en la página 115—. Además, dos hipótesis explicativas empíricamente equivalentes son incompatibles solamente en cuanto que empleen sus términos teoréticos de modos diferentes e incompatibles entre sí: cuando se tiene la debida conciencia de lo que en realidad pasa, es posible aceptar ambas hipótesis —esto es, pensar con ayuda de ambos sistemas deductivos— al mismo tiempo.

La jerarquía ascendente de explicaciones

Estos comentarios con respecto a los méritos relativos de dos hipótesis explicativas distintas y posibles han omitido una consideración sumamente oportuna, que es la de si es posible explicar, a su vez, la hipótesis explicativa (que se encuentre ocupando un puesto de hipótesis de nivel supremo en el sistema deductivo cuyas hipótesis de nivel ínfimo sean las generalizaciones asentadas que se hayan de explicar) considerándola consecuencia de otras leyes más generales dentro de

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

un sistema deductivo de mayor comprensión. A igualdad de todo lo demás, para que consideremos que una hipótesis de esta índole —o sea, que pueda ser incorporada en otro sistema deductivo como acabamos de indicar— es mejor que otra de una índole distinta, no es necesario que aquélla reciba una confirmación independiente e indirecta en virtud de ser deductible de una ley más general que estuviese confirmada independientemente: basta con que goce de cierta explicación en forma de tal ley —o conjunto de leyes— más general de la que pueda ser deducida, incluso si los datos que inclinen a creer esta ley de mayor generalidad no son otros que los que existan para creer la hipótesis explicada por ésta. De modo idéntico a como al quedar una generalización subsumida bajo una ley de nivel superior se eleva su condición intelectual, en virtud de que así se nos da alguna explicación de ella (de suerte que, como hemos mantenido en el capítulo noveno, puede ser propio que digamos de ella que es una «ley natural»), la subsunción de esta ley de nivel superior bajo otra de nivel todavía más alto mejora su condición intelectual, incluso si los datos en apoyo de las tres proposiciones son exactamente los mismos. Por supuesto, para que estas proposiciones formen una jerarquía ascendente tienen que comprender una gama de experiencias cada vez mayor, de suerte que la hipótesis de nivel superior pueda quedar refutada por observaciones que no refutarían otra situada a un nivel más bajo; pero, dado que no haya datos que refuten la hipótesis de nivel supremo, los que sirvan para asentarla no necesitan ser otros que los que asienten una de nivel inferior para que se considere que proporcionan una explicación de esta última y, por tanto, para que la eleven de condición intelectual en relación con otras hipótesis comparables para las cuales no quepa dar semejante explicación.

Para una persona que estuviera estudiando física cuando la teoría general de la relatividad, de Einstein (en 1915), y su confirmación por las expediciones de estudio del eclipse (en 1919) cayeron como una bomba sobre el mundo sabio, el paradigma de la explicación de una ley será siempre la explicación de la gravitación proporcionada por esta teoría: Newton había explicado la revolución de la Luna alrededor de la Tierra subsumiéndola (juntamente con otros fenómenos) bajo su ley de gravitación, y Einstein explicaba esta ley haciendo ver que era consecuencia (aproximada) de una ley referente a la estructura del espacio y el tiempo. La única dirección en que podía decirse que la teoría de Einstein superaba a la de Newton era aquélla en que, siendo diversas sus consecuencias (como ocurría con el movimiento del perihelio de Mercurio), los datos hicieron ver que la ley

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

de Newton era verdadera sólo como una aproximación excelente; y en todas las demás la teoría de Einstein apoyaba poderosamente la ley de gravitación de la inversa del cuadrado: lo que anteriormente había aparecido como un «accidente histórico a escala cósmica», desconectado de otros aspectos de la física, se veía ahora íntimamente vinculado con el marco de espacio y tiempo dentro del cual tienen lugar todos los fenómenos físicos.

Como hemos podido observar, explicar una ley es incorporarla en un sistema deductivo establecido en que sea deductible de otras leyes de nivel superior; y explicar éstas es, análogamente, incorporarlas —y con ellas el sistema deductivo al que sirvan de premisas— a otro sistema deductivo establecido que tenga una compreusión mayor y en el que aparezcan como conclusiones. Para explicar las leyes de nivel aún superior que sirvan de premisas de este nuevo sistema se requerirá su deducción a partir de leyes situadas a un nivel todavía más alto y dentro de un sistema deductivo de comprensión todavía mayor: a cada nivel de la explicación puede preguntarse un por qué acerca de las hipótesis explicativas; no hay un término final en la jerarquía de la explicación científica, ni hay, por tanto, explicación enteramente última y definitiva.

¿Es defectuosa la explicación científica?

Algunos filósofos han tomado el hecho de que siempre que se presente una ley de nivel superior como explicación de otra de nivel inferior se pueda pedir una explicación de aquella ley más elevada, como indicación de que al proceso de la explicación científica le es inherente algo defectuoso. Cuando se pide una explicación, dirán, se pide una razón última; y todo lo que puede demostrar esa subsunción de una ley de cierto nivel bajo otra de nivel superior es que, si se encontrase una razón de esta última, también constituiría explicación de aquélla; pero hasta que no se presente una verdadera razón de la ley de nivel superior no tendremos una explicación en un sentido satisfactorio para un filósofo. La teoría general de la relatividad de Einstein, diría el crítico, arroja mucha luz sobre *cómo* opera la gravitación, pero no nos dice nada acerca de *por qué* opera; pues lo único que ha hecho es convertir las preguntas acerca de por qué la ley de gravitación es muy aproximadamente una ley de proporcionalidad inversa al cuadrado en la pregunta sobre por qué la estructura física espacio-temporal tiene una geometría riemanniana; y no ser-

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

virá de nada, para explicar este hecho, el subsumir bajo otro hecho aún más general si es que este último reclama de nuevo una explicación. La única forma que habría de explicar correctamente la ley de gravitación sería la de encontrar una razón última que no exigiese una explicación ulterior; y hasta que no se haga tal cosa la gravitación seguirá siendo algo inexplicable e «irracional».

Esta crítica de la explicación científica guarda mucha relación con lo que se ha llamado la visión «descriptiva» de la ciencia. Se dice a veces —tanto por quienes quieren hacer un cumplido a la ciencia por aferrarse a los hechos como por quienes tratan de depreciarla— que la ciencia nos proporciona descripciones de hechos, pero nunca explicaciones de ellos, y que las preguntas a que responde son esencialmente preguntas sobre un cómo, y no sobre un por qué. Ahora bien, no cabe hacer objeciones a que a las leyes científicas se les llame descripciones del curso de la experiencia, ni a que se diga que describen cómo se comporta la Naturaleza, con tal de que esta manera de hablar no se tome como si implicase que estas leyes no desempeñan otra función: pues el hecho más importante con respecto a nuestra aceptación de las leyes científicas es el de que nos permitan hacer predicciones fiables; función predictiva que se pasaría enteramente por alto si se admitiese que la función de la ley científica es puramente descriptiva. En su origen, la tesis descriptiva de la ciencia ha estado asociada muy estrechamente con las opiniones de los filósofos de la ciencia que, como Mach, querían destacar la función intelectual de la ciencia de permitirnos efectuar una «economía de pensamiento» al subsumir gran número de casos particulares bajo una ley general; sin embargo, la ley científica tiene una generalidad ilimitada: no sólo comprende casos observados, sino un número ilimitado de casos posibles y no observados; y dar una versión de la función que cumple en nuestro pensar la creencia en una ley científica diciendo que es la de permitirnos economizar pensamiento es subestimar crasamente la importancia que para nosotros tiene semejante creencia. Análogamente, presentar esta función como la de describir el curso de la experiencia es peligrosamente engañoso, a menos que se caiga en la cuenta claramente de que la descripción es tanto del futuro como del pasado, de lo inobservado tanto como de lo observado, y que llamarla descripción no quita que se le llame asimismo propiamente explicación [2].

---

[2] Sería particularmente inadecuado llamar meramente descripción a una ley que contenga conceptos teoréticos, ya que, en virtud de la argumentación del capítulo

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Pues, según entiendo yo el empleo de esta palabra, una descripción es una respuesta, a una pregunta acerca de un porqué, que nos satisface intelectualmente; y es absurdo suponer que la explicación científica de cierta hipótesis de bajo nivel que se obtenga al deducirla de una ley de nivel superior no nos proporcione cierta satisfacción intelectual, incluso si no sabemos que esta última tenga explicación alguna (uno de los placeres intelectuales más agudos que estimo haber tenido en mi vida se produjo cuando pude apreciar la explicación einsteiniana de la ley de gravitación). Cualquier incorporación de un hecho —sea un caso o ejemplo determinado de una ley o ésta misma— a un sistema deductivo en que aparezca como conclusión de otras leyes conocidas es, en virtud de tal incorporación, una explicación del hecho —o de la ley—. Y el que tomemos la incorporación como respuesta a un ¿cómo? o a un ¿por qué? no hace al caso: lo que importa es que sepamos más de lo que sabíamos antes de vincular el hecho o la ley a otras leyes más fundamentales que comprendan un ámbito más extenso. No sólo hemos llegado a un mayor conocimiento de la vinculación interna de la Naturaleza, sino que hemos adquirido también la posibilidad de poder hacer predicciones, que antes no poseíamos; y negar que tal conquista nos proporcione una satisfacción intelectual es prohibirnos que nos gocemos con una de las excelencias del intelecto humano.

Nuestro crítico podría redargüir que, como la explicación científica no es nunca última, la satisfacción intelectual es incompleta e imperfecta cuando se la contrapone a la perfecta satisfacción que nos habría de proporcionar una explicación completa y definitiva. Pero, ¿qué genero de explicación completa podrían constituir las leyes científicas? ¿Qué género de respuesta podría haber para una pregunta de un por qué formulada a una ley científica que no permitiese plantear un nuevo «¿por qué?» con respecto a la respuesta misma?

A mi parecer, los filósofos que han querido que se dé una explicación última y definitiva de las leyes científicas pensaban en éstas como en algo parecido, o bien a las leyes de un sistema jurídico, o bien a los teoremas matemáticos. Las leyes pertenecientes a un sistema jurídico se explican a base del hecho de que el legislador —ya sea un individuo o la sociedad— las ha promulgado. Si el sistema es tal que sus leyes de bajo nivel sean deductibles de ciertos principios generales —como ocurría en el *Code Napoléon*—, aquéllas se

---

tercero, éstos no pueden ser considerados como «construcciones lógicas» a partir de entidades observables.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

explicarán apoyándose en estos principios, los cuales, a su vez, se explicarán a base de su promulgación; y el que se hayan promulgado las leyes particulares —o los principios generales de los que se sigan— es una explicación completa, en el sentido de que no puede hacerse ninguna pregunta ulterior del mismo género. (Podemos preguntar cuál haya sido la causa de la promulgación, o la de su aceptación, o la de un código legal; pero se tratará de una interrogación de tipo distinto: de hecho, una petición de explicación científica; y la posibilidad de hacerla no impide que la explicación a base de la promulgación de un código legal sea una explicación completa de que las leyes contenidas en él sean lo que son.)

Pero considerar análogas las razones que haya para que las leyes científicas sean lo que son a las que haya para que sean lo que son las leyes jurídicas es establecer una analogía enteramente falsa: aquéllas no han sido promulgadas, ni son consecuencias de principios generales que hayan sido promulgados por una sociedad. Una forma de las hipótesis teístas introduciría un legislador divino que habría promulgado las leyes de la Naturaleza; pero aunque la aceptación de tal hipótesis proporcionaría una explicación completa de las leyes científicas, suscitaría a su vez las cuestiones referentes a por qué el legislador divino habría promulgado tales leyes precisamente y por qué la Naturaleza obedecería las leyes así promulgadas —preguntas que exigirían respuestas que serían explicaciones científicas y, por tanto, esencialmente incompletas.

Sistemas deductivos matemáticos y científicos

Sin embargo, en la historia del pensamiento moderno la petición de una explicación última de las leyes de la Naturaleza se ha debido principalmente a la analogía aducida, no con las leyes promulgadas por un legislador, sino con las proposiciones lógicamente necesarias de la matemática pura. Aquí se encuentra un parecido auténtico e importante. Del mismo modo que frecuentemente es posible disponer las leyes científicas de generalidad creciente en un sistema deductivo en que las menos generales sean consecuencias de un conjunto de otras más generales, se pueden disponer los teoremas de una rama de las matemáticas en un sistema deductivo en el que los menos fundamentales se sigan de un conjunto de otros más fundamentales; como hemos visto en el capítulo segundo, cabe representar un sistema deductivo científico y un sistema deductivo matemático por medio del mis-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

mo cálculo, cuyas fórmulas, al interpretarse de un modo, representarán las leyes empíricas de una ciencia, mientras que al interpretarse de otro representarán los teoremas de una rama de la matemática pura; y además, ambos sistemas deductivos, el científico y el matemático, representados por el mismo cálculo, emplearán exactamente los mismos principios deductivos para deducir las últimas proposiciones de las primeras. Así pues, puede haber una semejanza estructural completa entre un sistema científico y un sistema puramente deductivo: una persona que abra las páginas de un tratado sistemático de la sección de «Matemáticas y Física» de una librería no será capaz de decir, al echar una ojeada a la sucesión de fórmulas, si el tratado es de matemáticas o de física.

La deducción matemática que procede a partir de primeros principios satisface completamente desde el punto de vista intelectual: la explicación completa de un teorema de la teoría de números, por ejemplo, es que tal teorema es deductible de las leyes fundamentales de la aritmética; y el que satisfagan completamente proviene de que estas leyes son tautologías —se ve que son lógicamente necesarias, y no se plantea la cuestión de que haya que contrastarlos con la experiencia—. Juntamente con muchos filósofos contemporáneos, creo que la verdad de estas proposiciones lógicamente necesarias no procede de hecho alguno del mundo, sino de la manera en que utilizamos el lenguaje y otras técnicas para pensar acerca del mundo y, en particular, para deducir proposiciones contingentes de otras proposiciones contingentes. Pero esta tesis controvertida no constituye el asunto de este libro; lo que es pertinente para nuestros propósitos es que es preciso reconocer —como han hecho casi todos los filósofos, excepto algunos empiristas extremos, como Mill— que las proposiciones de la matemática pura tienen una condición epistemológica diferente de la de las proposiciones empíricas, de suerte que el fundamento que tenemos para creer unas y otras es esencialmente diferente. Las razones que tengo para creer los primeros principios de la aritmética que se encuentran a la cabeza del sistema deductivo de la teoría de números no dependen de las que tenga para creer los sorprendentes teoremas (por ejemplo, el de Lagrange, según el cual todo entero no negativo es la suma de los cuadrados de cuatro enteros) que aparecen mucho más abajo en tal sistema, como teoremas deducidos: al contrario, la sola razón que tengo para creer éstos es que son consecuencias lógicas de las leyes elementales de la aritmética, de modo que sería incoherente por mi parte creer estas últimas sin creer asimismo aquéllos. Pero en el caso de un sistema deductivo científico todas cuyas

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

proposiciones iniciales sean contingentes (un «sistema deductivo impuro», en el sentido del capítulo segundo), aunque las proposiciones posteriores son consecuencia lógica de las anteriores, con todo y con eso el fundamento que existe para creer aquéllas no es que sean deductibles de éstas, sino que, por el contrario, el fundamento para creer las proposiciones primeras, más generales, es que las de nivel inferior, que se refieren a sucesos observables, son deductibles de ellas. Desde luego, puede muy bien ocurrir que para creer una hipótesis científica cualquiera determinada no tengamos otra razón que la del apoyo indirecto que la proporcione su deductibilidad de una hipótesis de nivel superior que esté apoyada directamente de un modo independiente; pero cuando se toman todas juntas las hipótesis de nivel supremo de un sistema científico, las razones que hay para creerlas no son ni más ni menos que el hecho de que las hipótesis de nivel ínfimo que de ellas se deduzcan estén confirmadas por la experiencia. Así pues, existe una diferencia esencial entre las maneras de pensar en que nos valemos de un sistema deductivo matemático y en que nos valemos de uno científico: en el primero partimos del comienzo y llegamos hasta el final, tanto lógica como epistemológicamente, en tanto que en el segundo hacemos lo mismo lógicamente, pero el orden epistemológico va del final al comienzo; por emplear de nuevo la metáfora del cierre de cremallera, en las proposiciones matemáticas el valor veritativo de verdad (esto es, de verdad formal) se asigna primeramente en la parte superior y luego va bajando, mientras que en los sistemas científicos este valor veritativo (o sea, de conformidad con la experiencia) se asigna primeramente en la parte inferior y luego va subiendo [3].

El hecho de que la noción de sistema deductivo se haya traducido en el pensamiento europeo en un contexto matemático —los *Ele-*

[3] Por mor de la sencillez me he fijado en sistemas deductivos matemáticos como el de la aritmética superior (la teoría de números), en el que no todos los teoremas son evidentes intuitivamente, mientras que las premisas —los primeros principios de la aritmética— sí lo son. Durante el siglo pasado los lógicos matemáticos se han ocupado de prolongar hacia atrás ese sistema deductivo aritmético, para encontrar proposiciones más «primitivas» —las cuales, en los *Principia Mathematica*, de Whitehead y Russell, son proposiciones lógicas a las que no se puede llamar, en absoluto, aritméticas— de las que se deduzcan lógicamente los primeros principios de la aritmética mismos. Estas proposiciones no son, desde luego, más intuitivamente evidentes que los principios que se siguen de ellas; pues la finalidad de la construcción de un sistema deductivo en que los principios aritméticos aparezcan como consecuencias no es la de reforzar nuestra creencia de ellos, sino la de determinar su «geografía lógica», haciendo ver las relaciones en que estén con las proposiciones formalmente verdaderas de otros tipos.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

mentos, de Euclides, en los que se demuestran los teoremas geométricos deduciéndolos de un conjunto de primeros principios («definiciones», «postulados» y «axiomas» o «nociones comunes»)— ha producido el efecto de que los primeros sistemas científicos explícitamente deductivos, incluyendo el más grande de todos, los *Principia* de Newton, se hayan modelado conforme a la analogía euclidiana y hayan profesado demostrar sus últimas proposiciones —las que se confirmaban mediante confrontación con la experiencia— deduciéndolas de los primeros principios iniciales [4]. Y los científicos han tardado largo tiempo en darse cuenta de que el método inductivo e hipotético-deductivo de la ciencia es epistemológicamente diferente del método de las matemáticas, a primera vista análogo, y de que al imitar debidamente la forma deductiva del sistema de Euclides no tomaban de él *ipso facto* su método deductivo de demostración. La enorme influencia de Euclides ha sido tan beneficiosa induciendo a los científicos a construir sistemas deductivos que ello ha sobrecompensado su influencia perniciosa haciéndoles malentender lo que estaban haciendo al construir tales sistemas: el genio benéfico de la matemática y de la ciencia inconsciente de sí misma, Euclides, ha sido el genio maléfico de la filosofía de la ciencia —y, en realidad, de la metafísica.

La diferencia irreductible que hay entre las proposiciones de la lógica y la matemática y las de las ciencias de la Naturaleza es que las primeras son lógicamente necesarias, y las segundas, lógicamente contingentes. La petición de una explicación última y definitiva de las leyes científicas, en la medida en que está basada en el hecho de que uno y el mismo cálculo pueda representar un sistema deductivo puro y otro aplicado, ignora la diferencia esencial en las interpretaciones de las fórmulas del cálculo: podemos preguntar por la razón de que una proposición lógicamente necesaria sea verdadera, en el sentido de preguntar por qué tal proposición es la formalmente verdadera en lugar de cualquier otra incompatible con ella; y cuando se da semejante razón, satisface completamente desde el punto de vista intelectual [5]; pero carece de sentido preguntar, de análoga manera, por

[4] Newton parte de ocho *definitiones* y tres *axiomata, sive leges motus.*

[5] El caso más sencillo es el de lo que Mill llama «proposiciones verbales» —por ejemplo, «todo hermano es un varón»—: aquí se consigue satisfacer completamente desde este punto de vista al explicar que la aplicación de la palabra «hermano» está de tal modo limitada por las convenciones del idioma castellano que es aplicable solamente a los miembros de una subclase de la clase de los varones. El caso siguiente en sencillez es el de lo que Wittgenstein llamaba «tautologías»: por ejemplo, «o bien ocurre que tenga ahora un lápiz en la mano o bien ocurre que no lo tenga», enuncia-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

la razón de que una proposición lógicamente contingente (tal como una hipótesis científica) sea verdadera en vez de serlo otra incompatible con ella, porque lo que decide es la experiencia: el fundamento de que se crea esta hipótesis en lugar de cualquier otra posible e incompatible con ella no es razón alguna lógica ni hecho alguno acerca del modo de emplear el lenguaje, sino el hecho lógicamente contingente de que aquélla —o bien un sistema deductivo en el que constituya una conclusión— tenga como firme base la experiencia.

Por emplear otra metáfora: un sistema deductivo puro —como el de la aritmética— cuelga de su borde superior, y se lo puede extender indefinidamente hacia abajo, mientras que uno impuro —como el de una ciencia de la Naturaleza— está apoyado en su base empírica, y puede extendérselo indefinidamente hacia arriba. El preguntar por una explicación última de una teoría científica es confundir la función de la ciencia —que es la de organizar nuestros conocimientos empíricos de un modo que nos permita hacer predicciones fiables— con la de las matemáticas, cuya función es, aparte de la de satisfacernos intelectualmente por sí misma, la de servir de mortero entre los diversos pisos del sistema científico. Los picachos de la ciencia pueden parecer que flotan entre las nubes, pero sus cimientos se encuentran en los hechos brutos de la experiencia.

Todavía quedan por aludir dos de las cuestiones pertinentes para el tema de este libro, sobre las que es preciso decir otras cosas e indicar las direcciones en que la investigación podría, acaso, avanzar fructuosamente.

¿Es mensurable el carácter razonable de la creencia inductiva?

La interpretación de los grados de probabilidad que hemos expuesto en el capítulo sexto de este libro se refería exclusivamente al concepto de probabilidad tal y como se lo utiliza dentro del cuerpo de una ciencia, en donde todos los enunciados que atribuyen valores numéricos definidos a las probabilidades son proposiciones empíricas que tienen la naturaleza de hipótesis científicas. Como hemos subrayado, este sentido empírico de la probabilidad es enteramente dis-

---

do que no impone restricción alguna sobre los valores veritativos posibles (verdad o falsedad) de la proposición «tengo ahora un lápiz en la mano». El modo exacto de ser lógicamente necesarias las proposiciones matemáticas es asunto sumamente controvertido por los lógicos matemáticos.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

tinto de aquél en que se dice que una hipótesis científica, H, es *ella misma* probable; hemos tomado este enunciado como equivalente al de que sea razonable creer H, y hemos debatido largamente en el capítulo octavo el significado y la justificación de semejante enunciado; pero no hemos otorgado significado alguno a la noción de asignar valores numéricos a los grados del carácter razonable de una creencia, ni, en realidad, a decir que de dos creencias, ambas razonables, una sea más razonable que otra. En el capítulo séptimo hemos defendido un criterio para preferir una hipótesis estadística, H_1, a otra, H_2, criterio que podría emplearse para definir un sentido de «más razonable que» en el que el criterio para preferir H_1 a H_2 se emplease asimismo para hacer la creencia de H_1 más razonable que la creencia de H_2. Pero, incluso en caso de que pudiera hacerse tal cosa (y no me gustaría llevar a cabo tal traducción, ya que produciría confusiones acerca de lo que hacemos al elegir entre hipótesis estadísticas), esta comparación entre el carácter razonable de las creencias científicas se aplicaría solamente a la comparación entre las creencias en hipótesis estadísticas que asignasen valores diferentes al mismo parámetro probabilitario.

¿Es posible dar un criterio general satisfactorio para disponer las creencias de hipótesis científicas en un orden tal que podamos decir que una sea más razonable que otra? Esta pregunta no pide tanto como la demanda de un criterio para la asignación de valores numéricos a los grados de carácter razonable de las creencias, ya que es perfectamente posible comparar cosas disponiéndolas en un orden de sucesión sin ser capaz de medirlas. Sin embargo, no creo que pueda darse criterio alguno que sea en algún grado satisfactorio ni siquiera para una comparación no numérica.

El caso en que nos sentimos más inclinados a hablar de que una creencia es más razonable que otra es aquél en que comparamos dos creencias de la misma hipótesis, H, que se hayan obtenido exclusivamente por inducción por enumeración simple y en el que los casos o ejemplos que constituyan las pruebas en favor de H para la primera creencia incluyan como subclase suya todos los casos o ejemplos que constituyan las pruebas en favor de H para la segunda: en ambos casos se cree la misma hipótesis, pero los datos en su favor son más fuertes —en un sentido directo y llano— en el primer caso que en el segundo, ya que en aquél se tienen todos los de éste y, además, otros. Ahora bien, si esto es todo lo que se quiere decir al mencionar que en semejante ocasión la primera creencia es más razonable que la segunda, santo y bueno; pero este lenguaje puede ser peligrosa-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

mente engañoso, puesto que puede ocultar el hecho de que la aceptación razonable de una hipótesis es una reacción de todo o nada [6]. En efecto, el que una persona adjunte la creencia de la hipótesis *H* al grupo de sus conocimientos y sus creencias razonables (su *corpus* racional) depende de que este *corpus* contenga datos suficientes en favor de *H* para que sea válido a sus ojos el inferir esta hipótesis a partir de tales datos cuando siga unas normas inductivas de enumeración simple: si su *corpus* contiene datos suficientes según estas normas, la persona es razonable al añadir *H* al mismo —en caso de que la norma de enumeración simple que siga sea eficaz (o ella crea que lo es, u ocurran ambas cosas)—; pero si los datos son insuficientes y, no obstante ello, dicha persona adjunta *H* a su *corpus* racional, su actuación no estará respaldada por la norma de enumeración siempre aludida. No se trata de ser más o menos razonable al añadir *H* al *corpus* racional; si la norma inductiva que respalde esta inferencia es eficaz (o ella cree que lo es, o ambas cosas), tal adjunción es razonable, y la creencia es asimismo razonable. Así pues, dos personas serán ambas razonables si adquieren la creencia de *H* siguiendo la misma norma de enumeración simple, incluso en caso de que los datos que una tenga en apoyo de su creencia incluyan todos los que tenga la otra en apoyo de la suya y los excedan —con tal de que la norma inductiva que sigan ambas sea eficaz (o ellas la crean así, o pasen ambas cosas).

Pero —puede objetarse— otra línea argumentativa posible hace ver que es más razonable creer una hipótesis cuando la apoya un volumen mayor de datos del mismo tipo: aunque admitamos que el criterio de carácter razonable que depende de que la inferencia esté respaldada o no por una norma inductiva eficaz no tolera grados, ¿qué duda cabe de que estas normas mismas pueden ordenarse de tal modo que las inferencias realizadas de acuerdo con algunas de ellas sean más constrictivas que las que estén de acuerdo con otras? Por ejemplo, indudablemente podemos decir que una norma inductiva de enumeración simple que exija mil casos confirmadores (y ninguno refutador) para asentar una generalización es más constrictiva que otra de la misma índole que exija sólo cien casos confirmadores. Pero ¿se sigue de ello que sea más razonable creer una conclusión inductiva obtenida siguiendo la norma que constriña más? Aquí son oportunas las mismas consideraciones que hicimos para resolver la cuestión del valor de k que se habría de emplear en una regla k de rechazamiento

[6] Félix Kaufmann, en su *Methodology of the Social Sciences*, caps. III y IV, ha destacado el carácter de todo o nada de la aceptación racional [véase la versión castellana citada del original alemán, no resumido].

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

de hipótesis estadísticas: si suponemos que tanto la norma de enumeración simple de cien casos como la de mil casos son eficaces, la decisión en cuanto a cuál de las dos deba utilizarse depende de la importancia práctica de aceptar la hipótesis en cuestión, más que de que una norma sea más constrictiva que otra: si la aceptación de la norma tiene las consecuencias prácticas más deseables sería sin duda alguna insensato demorarla, una vez que el número de casos examinados baste para que quede asentada siguiendo una norma eficaz, hasta que pueda también asentársela siguiendo una norma más constrictiva. Y aun cuando podríamos decir, si quisiéramos, que, sin embargo, hubiera sido más razonable aplazar la aceptación, independientemente de todas las consideraciones prácticas, hasta que cupiese asentarla por medio de una norma de mayor constricción, ello sería divorciar la noción de carácter razonable en cuanto aplicada a la creencia de la hipótesis de la del carácter razonable de actuar en la creencia de la misma.

Por tanto, la tesis que hemos admitido en este libro —la de que la cuestión del carácter razonable de las creencias inductivas está ligada a la de la validez de las inferencias inductivas de las que se haya (o podría haberse) sacado— no consiente que se establezca ninguna comparación entre creencias inductivas distintas; si la inferencia es válida está justificada la incorporación de la creencia de su conclusión al *corpus* racional de la persona que sea, y es razonable adquirir la nueva creencia cuando se tiene ya la creencia razonable anterior: no existe la cuestión de si es más o menos razonable hacer tal cosa.

De esta tesis se sigue que el contenido del *corpus* racional de una persona cambia discontinuamente, por saltos: unas creencias que estaban incluidas en él resultan ser falsas, y se rechazan, mientras que constantemente se están añadiendo otras nuevas. Mas cuando una creencia se rechaza ello ocurre de un solo golpe: no se desvanece y sale de tal *corpus* debido a hacerse cada vez menos «probable», hasta caer por debajo del «umbral de probabilidad»; y, de parecido modo, cada creencia se añade de un solo golpe: no va materializándose, haciéndose más y más «probable», hasta pasar por encima del umbral. Según creo, la noción de la escala de probabilidades de las hipótesis —con la escala correspondiente del carácter razonable de las creencias de hipótesis— es un mito de filósofos, que ha surgido parcialmente del deseo de subsumir la «probabilidad» de hipótesis en una teoría unificada de la probabilidad que incluiría también las probabilidades de acontecimientos, numéricamente mensurables; y asimismo, parcialmente, de una confusión entre la noción de los grados del *carácter*

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

razonable de las creencias y la de grados de *creencia*, que es enteramente distinta.

Podemos considerar que los grados de creencia de proposiciones particulares cuya verdad nos sea ahora desconocida, pero haya de sernos conocida en el futuro —dentro de un plazo definido—, están determinados por el límite del envite con que el que crea esté dispuesto a respaldar la verdad de la proposición. Las puestas tienen que hacerse con cosas que en sí mismas sean bienes, y cuyos valores sean comparables, y no con algo que sea medio para conseguir bienes (como es el dinero), en lo cual entra la complicación del decrecimiento de la utilidad marginal; y también ha de tenerse en cuenta de antemano que no se sienta inclinación alguna a apostar. Pero cabe idear un método de apuestas generalizadas hipotéticas que permita medir los grados de creencia [7]: si una persona cree que sucederá un acontecimiento dotado de una probabilidad objetiva en el sentido empírico del capítulo sexto (por ejemplo, que la próxima vez que tire esta perra gorda saldrán caras), el envite que estará dispuesto a hacer —esto es, el grado de su creencia— tiene que corresponder a esta probabilidad objetiva, so pena de que cuente con perder a la larga, en un gran número de casos parecidos, si hace dicho envite a que suceda tal acontecimiento, y lo mismo si lo hace a que no suceda. Si esa persona lo que cree es que ocurrirá cierto evento que no pueda considerarse como miembro de una clase de eventos parecidos (por ejemplo, que un caballo concreto gane una carrera concreta), no hay probabilidad empírica objetiva con la cual debiera corresponder el grado de su creencia; por el contrario, la única posibilidad que existe, a mis ojos, de definir la «probabilidad» de que un caballo determinado y concreto gane cierta carrera concreta sería el valor medio de los grados de creencia de una serie de postores bien informados e inteligentes que a la larga no perdieran en sus apuestas —valor medido por el límite de las apuestas con que estarían dispuestos a respaldar dicho caballo [8].

Con todo, una persona no puede apostar en favor de una posibilidad que requiera un futuro infinito para realizarse, de modo que su creencia en la verdad de una hipótesis científica no puede medirse

---

[7] F. P. Ramsey, *The Foundations of Mathematics and other logical essays*, páginas 166 y sigs. Véase también Rudolf Carnap, *Logical Foundations of Probability* páginas 165 y 235.

[8] Los envites que ofrece el corredor de apuestas dependen menos de su propio grado de creencia que de la distribución de los de sus clientes, ya que tiene que protegerse del riesgo de una pérdida ruinosa «corriendo las apuestas».

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

por medio de un método generalizado de apuestas[9]; pero a lo que sí puede apostar es a la proposición de que la hipótesis científica que se cree hoy (ya sea por ella o por otras personas) seguirá creyéndose dentro de diez años, o a la de que una hipótesis que hoy no se crea llegará a creerse en un plazo de diez años. En realidad, no sólo es posible apostar en favor del contenido del *corpus* racional de creencias de una persona, sino en favor del contenido de su *corpus* racional de conocimientos y de creencias racionales: pues el descubrimiento de un ejemplo contrario hará que una hipótesis universal aceptada quede expelida de tal *corpus*, y más datos estadísticos pueden hacer necesaria la sustitución de una hipótesis estadística incluida en él por otra. Y como cabe asignar unas puestas a la probabilidad de los cambios que se puedan producir en mi *corpus* racional, nos valdremos de ellas para definir un sentido subjetivo de probabilidad» (si quiero emplear este nombre), según el cual puede decirse que la probabilidad de que se refute la teoría einsteiniana de la gravitación dentro de los próximos diez años es de $\frac{100}{}$; con lo cual queremos decir que si tuviese que apostar acerca de que se la vaya a refutar (o de que no se la vaya a refutar) me parecería que un envite de 99 a 1 estaría bien.

El hecho de que podamos apostar a que se producirán cambios en un plazo limitado explica el de que, aunque no sea capaz de advertir diferencias en el carácter razonable de las creencias de mi *corpus* racional, sí lo sea de hacerlo con respecto a la *tenacidad* con que las sostengo: pues ésta es síntoma de la medida en que estaría dispuesto a respaldar mi creencia de que la creencia que ahora mantengo tenazmente seguirá formando parte de mi *corpus* racional dentro de diez años.

Puesto que cualquier cambio que se produzca en las hipótesis de nivel ínfimo del *corpus* racional de una persona involucrará un cambio en alguna de sus hipótesis de nivel máximo, mientras que estas últimas pueden cambiar todas sin que se alteren aquéllas, mantenemos la totalidad de las hipótesis de nivel supremo con menos tenacidad que las de nivel ínfimo (naturalmente, puede sostenerse tenacísimamente cualquier conjunto particular de hipótesis de aquel nivel

---

[9] En realidad, parece difícil conceder significado alguno a la noción de creencia *parcial* de una proposición general si queremos conservar alguna vinculación entre creencia y actuación, pues a la creencia de una proposición general «todo *A* es *B*» acompaña la actitud de estar dispuesto a actuar en cada caso en que haya aparecido *A* como si *B* hubiese aparecido también.

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

—por tratarlas como proposiciones «funcionalmente *a priori*» [10], pero lo único que ocurre en tal caso es que las demás se sostienen menos tenazmente). Hablando en general, estamos mucho más dispuestos a hacer apuestas con un envite determinado a que las hipótesis de nivel inferior de nuestro *corpus* racional serán las mismas en un plazo de diez años que ahora, que a hacer lo mismo con las de nivel supremo: pues la función que estas últimas desempeñan en nuestro pensamiento es la de explicar las de bajo nivel que aceptemos, y al cabo de diez años acaso parezca preferible otra explicación de las mismas hipótesis del nivel más bajo, y haya que sustituir las antiguas hipótesis explicativas por otras nuevas.

Así pues, aunque podemos dar una respuesta negativa a la pregunta inicial acerca de si cabe medir el carácter razonable de las creencias en proposiciones empíricas generales, o acerca, incluso, de si pueden compararse entre sí tales caracteres —fundándose en que la adjunción y la expulsión de una creencia al *corpus* racional de una persona cualquiera son operaciones de todo o nada—, es posible encontrar un sentido para las variaciones de la tenacidad con que mantengamos las creencias en dicho *corpus:* pues estas variaciones están relacionadas con las diferencias existentes en los envites con que estaríamos dispuestos a respaldar la opinión propia de que tales creencias se mantendrán todavía en él al cabo de un plazo determinado. Pero me doy perfecta cuenta de que es preciso reflexionar mucho más aún sobre este asunto.

El ajuste de los sistemas deductivos

Puede también pensarse que la interpretación de la explicación científica que hemos presentado en este libro, a base de los sistemas deductivos, se ha dado demasiado de buenas a primeras —en el sentido de que, al parecer, no para mientes en el desajuste u holgura de muchas hipótesis aceptadas con respecto a la experiencia—. Puede decirse que no se piensa de toda hipótesis universal que sea necesario rechazarla en cuanto se descubra un ejemplo en contra suya: el que hubiere propuesto la hipótesis podría decir perfectamente que no esperaba que tuviese validez en todas las circunstancias, y que el hecho de que no se cumpla universalmente no indica que no constituya una buena aproximación de la verdad.

[10] Expresión de Arthur Pap; véase más arriba, en la página 130.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Con nuestra interpretación habrá dos casos en que no se considerará definitivamente refutada una hipótesis por ejemplos en contrario: el primero lo encontramos cuando se trate de una hipótesis estadística, caso en que el rechazamiento apoyado en un conjunto de observaciones es siempre provisional, y puede revocárselo a base de otros datos ulteriores; y el segundo es aquél en que, aun cuando la hipótesis no tenga explícitamente la forma estadística, se la trate como tal en cuanto que se la rechazará (y ello sólo provisionalmente) sólo si los ejemplos contrarios muestran desviaciones del valor aseverado por ella que excedan de cierta cantidad, mientras que si son inferiores a ésta se considerará que tales casos están afectados por «errores de observación», y no que refutan la hipótesis. Por ejemplo: en el experimento realizado por Coulomb y otros físicos para determinar directamente la fuerza que se ejerce entre dos cuerpos eléctricamente cargados y, de aquí, para determinar el valor de n en la ley de la electrostática según la cual dicha fuerza varía con la inversa de la n-ésima potencia de la distancia entre ambos cuerpos, se encontraron diversos valores de n, la mayoría de los cuales no coincidían exactamente con 2, pero que estaban distribuidos en derredor suyo del modo que era de esperar suponiendo que las observaciones estuviesen sujetas a «errores de observación» aleatorios; lo que ocurre en este caso es que se admite la hipótesis de que la ley electrostática es de relación cuadrática inversa juntamente con la hipótesis estadística de que las mediciones de los experimentos están sujetas a pequeñas variaciones aleatorias alrededor del «verdadero valor»; y es la conyunción de estas dos —que constituye, a su vez, una hipótesis estadística— lo que se somete a contraste por la experiencia.

Es digno de notar a este respecto que si hubiésemos llegado a algún número que no fuese exactamente 2 (por ejemplo, 2,001) al buscar —por el método de la verosimilitud máxima, o por algún otro método análogo— el valor a elegir entre los demás valores posibles, ello no implicaría que lo más razonable fuese aceptar la hipótesis en que el exponente tuviera el valor 2,001: pues el fundamento racional del método de la verosimilitud máxima (o del método análogo empleado) justificaría, sí, la preferencia por el valor que concediese la máxima verosimilitud a los resultados experimentales (esto es, 2,001) frente a otros valores (por ejemplo, 2) que los concediesen una verosimilitud ligeramente menor, pero a igualdad de todo lo demás; y lo demás no sería igual: la hipótesis de la inversa del cuadrado puede entrar, juntamente con otras hipótesis, en un sistema deductivo más

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

comprensivo, en el que cabe deducir y observar otros géneros de consecuencias.

Los enunciados tendenciales

Existe, sin embargo, un tipo de hipótesis que es más difícil de encajar en la tesis acerca de los sistemas deductivos científicos expuesta en este libro, según la cual el significado de los enunciados que se encuentren en éstos está determinado por las condiciones empíricas de su rechazamiento. Se trata del tipo de proposición general que se halla en las ciencias que no han llegado todavía al desarrollo actual de las ciencias físicas, y en las cuales no se conocen las condiciones en que se cumplen las leyes universales; en tales circunstancias lo único que cabe afirmar es que tal y cual cosa tiene propensión a actuar de éste y el otro modo, y llamaremos «enunciados tendenciales» a las hipótesis de semejante naturaleza. Tenemos ejemplos de ello en la mayoría de las leyes de la psicología conocidas [11], por ejemplo, la de que la fuerza de una asociación tiende a aumentar con la frecuencia: este anunciado no afirma que en cualesquiera circunstancias la fuerza de una asociación determinada en la mente de una persona crezca con la frecuencia de las veces que la haya experimentado, ni tampoco que la fuerza de la mayoría de las asociaciones crezca con la frecuencia —lo cual equivaldría a la aseveración de la hipótesis estadística según la cual es mayor que 1/2 la probabilidad de que la fuerza de una asociación en la mente de una persona crezca con la frecuencia con que la haya experimentado: lo que este enunciado tendencial afirma —presumimos— es que la fuerza de una asociación *que satisfaga ciertas condiciones no especificadas* aumenta con su frecuencia. La peculiaridad de los enunciados tendenciales consiste en que enuncian que si una cosa es C, si es también A es asimismo B, siendo «si una cosa es A, es también B» (es decir, todo A es B) una hipótesis científica ordinaria, y C una propiedad no especificada.

La proposición «si una cosa es C, si es también A es asimismo B» equivale a esta otra: «si una cosa es C y A, es también B»; y lo que origina todas las dificultades es el hecho de que el enunciado tendencial sea uno condicional con una condición o antecedente sin especi-

[11] Véanse las aportaciones de B. A. Farrell y Margaret Masterman al simposio sobre «Causal Laws in Psychology» [*Las leyes causales en Psicología*], en *Aristotelian Society Supplementary Volume 23* (1949).

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

ficar. Estamos ya familiarizados con los condicionales en los que sólo se menciona parte del antecedente, como ocurre en muchos condicionales nómicos, ya sean indicativos o subjuntivos (por ejemplo: si se deja suelta en el aire una bola de billar, caerá al suelo); pero, ocurra lo que ocurra cuando no se haga otra cosa que considerar semejante condicional, cuando se lo afirma, el afirmante tiene que estar dispuesto a especificar explícitamente la totalidad del antecedente en caso de que se le pida hacerlo [12]. En cambio, quien asevera un enunciado tendencial es completamente incapaz de mencionar la parte de la condición representada por *C*, ya que no tiene ni noción de qué pueda ser.

Esto hace que sea imposible tratar la aseveración de un enunciado tendencial como aserción de una proposición general que quedaría refutada si descubriésemos un ejemplo en contra; pues no es necesario que hayamos de mirar la observación de un *A* que no sea *B* como si nos forzase a rechazar el enunciado tendencial: siempre será posible decir, al encontrarse ante un ejemplo —a primera vista contrario— de un *A* que no sea *B*, que la cosa que es *A* no satisface la condición desconocida, *C*, de modo que su existencia es perfectamente compatible con la verdad de la proposición general según la cual todo *A* que sea *C* será *B*. Por consiguiente, la manera que tenemos de emplear los enunciados tendenciales es distinta de aquélla en que utilizamos las hipótesis científicas corrientes, y puede preguntarse si tiene sentido aplicar a aquéllos la noción de funcionar en nuestro pensamiento dentro de un sistema deductivo científico.

A mi parecer, la distinción que hemos subrayado en el presente libro entre un cálculo —que se ocupa de palabras y de otros símbolos— y un sistema deductivo que constituya una interpretación suya permitirá encontrar un lugar para los enunciados tendenciales en el modo de pensar científico que hemos expuesto aquí, sin necesidad de dar una interpretación radicalmente distinta de su uso. Utilizando los cálculos desarrollados en el capítulo segundo, la proposición «todo lo que sea tanto *C* como *A* es también *B*» se expresará de un modo natural por la fórmula

$$(\gamma\alpha)\longleftrightarrow(\beta(\gamma\alpha)),$$

admitiendo que α y β representen, respectivamente, la clase de las *A* y la de las *B*, y que γ represente la de las *C* (que no está especificada en el enunciado tendencial). Sin embargo, existe otro método posible

---

[12] Compárese con la aseveración de hipotetizados que hemos estudiado en la página 344.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

de expresar esta proposición por medio de una fórmula de dichos cálculos: a saber, por la fórmula

$$\alpha \longleftrightarrow (\beta\alpha),$$

con tal de que no se dé a tales cálculos una interpretación distinta, de modo que tomemos las letras griegas α y β como representativas, no ya de las clases de las A y de las B, respectivamente, sino de la clase de las cosas que sean tanto C como A y la de las que sean tanto C como B, respectivamente [13]: a los elementos del cálculo se les otorga una interpretación según la cual representan clases, pero no cualesquiera, sino sólo las que sean subclases de la clase de las C; hablando en un lenguaje lógico anticuado, el «universo del discurso» al que se refieren los símbolos ha quedado restringido al universo de las cosas que tengan la propiedad que no se ha especificado [14].

Ahora bien, mientras que no cabe interpretar $(\gamma\alpha) \longleftrightarrow (\beta(\gamma\alpha))$ sin saber cuál sea la clase de las C (ya que se ha de interpretar γ como representativa de ella), es posible dar cierto tipo de interpretación de $\alpha \longleftrightarrow (\beta\alpha)$ sin saber tal cosa: podemos algo así como «interpretar» los elementos del cálculo como representantes no de clases ningunas, ni de clases algunas de una clase conocida, sino de subclases cualesquiera de una clase no especificada; y el «sistema deductivo» que así se obtenga se referirá únicamente a esta última. Semejante sistema no constará propiamente de proposiciones, pues no interpretaremos la fórmula $\alpha \longleftrightarrow (\beta\alpha)$ como la *proposición* según la cual todo lo que sea C y A es también B, ya que no hemos dado significado alguno al símbolo de propiedad «C»; mas para ciertos fines podemos pretender que estas cuasi-proposiciones son proposiciones, ya que las relaciones lógicas de este sistema cuasi-deductivo serán análogas a las que existan en un sistema deductivo en que $\alpha \longleftrightarrow (\beta\alpha)$ se interprete como representativa de la proposición según la cual todo A es B.

Si interpretamos $\alpha \longleftrightarrow (\beta\alpha)$, dentro del restringido universo del discurso que no conocemos, como representativa de la cuasi-proposición general según la cual todo lo que tenga cierta propiedad no especificada y la propiedad A tendrá también la propiedad B, esta cuasi-proposición no quedará refutada al descubrir una cosa que sea A y no sea B,

[13] La nueva fórmula expresará también la proposición general si se interpreta β como representativa —igual que antes— de la clase de las B; pero es más sencillo estudiar esta cuestión con una interpretación que restrinja tanto la clase designada por α como la designada por β a subclases de la clase de las C.

[14] La «clase universal» (el complemento de la clase nula) será la de las C, y si se generalizase el cálculo para incluir el de Huntington del capítulo tercero se la designaría con o'.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

ya que puede faltarle perfectamente la propiedad no especificada, y, por tanto, esto no llegará a ser un ejemplo contrario de aquélla (que está representada por $\alpha \longleftrightarrow (\beta\ )$). En consecuencia, el sistema cuasi-deductivo constituido por tales cuasi-proposiciones no será contrastable por la experiencia de la misma forma en que lo son los sistemas deductivos. Y, sin embargo, la experiencia será un factor pertinente para el modo en que se haga uso de aquel sistema: pues si se descubre una *A* que no sea *B*, o bien es necesario rechazar la cuasi-proposición representada por $\alpha \longleftrightarrow (\beta\ )$, o debe admitirse que en este caso faltaba la propiedad especificada; y si admitimos esto último sabremos algo acerca de la propiedad desconocida: justamente que no se aplicaba al caso observado. Si observamos un gran número de casos de esta índole, y mantenemos la determinación de no rechazar la cuasi-proposición a base de los datos que nos proporcionen, llegaremos a saber que la condición no especificada no se cumple en ninguno de aquéllos. Es frecuente que después de observar un buen número de casos podamos adivinar cuál pueda ser ésta; y si cabe tal adivinación cabe sustituir el sistema cuasi-deductivo tendencial por un sistema deductivo ordinario, y convertir el enunciado tendencial en una hipótesis científica normal, contrastable del modo ordinario.

Semejante paso de un enunciado tendencial a una hipótesis corriente depende de nuestra determinación de conservar en el *corpus* racional aquél que afirma que todo lo que satisfaga cierta condición no especificada y tenga la propiedad *A* tiene la propiedad *B*, incluso aunque observemos casos de cosas que sean *A* sin ser *B*. De poco serviría seguir conservando el enunciado tendencial frente a tales ejemplos *prima facie* contrarios, a menos que dicho enunciado no se encuentre como «hipótesis» única de un sistema cuasi-deductivo; pero si existe cierta cantidad de enunciados tendenciales que puedan ser considerados pertenecientes al mismo sistema cuasi-deductivo, con el mismo universo restringido del discurso, podemos examinar sus relaciones lógicas independientemente del conocimiento de las condiciones restrictivas; podremos ver, entonces, cuáles seguirán la misma suerte que otras. Y tal vez nos decidamos a conservar un enunciado tendencial en vista de que abandonarlo exigiría que abandonásemos también otros situados a un nivel superior en el sistema cuasi-deductivo, y a no abandonar estos últimos en caso de que otros enunciados tendenciales de bajo nivel que fuesen también consecuencias suyas —en el sistema cuasi-deductivo— hubieran quedado confirmados y no refutados *prima facie*.

La moraleja de todo esto para ciencias como la psicología y las

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

ciencias sociales, que emplean mucho los enunciados tendenciales, es que aseverar uno de éstos aisladamente no es decir casi nada: lo que con frecuencia tiene utilidad es proponer un sistema cuasi-deductivo de enunciados tendenciales, todos ellos sujetos a las mismas condiciones, si bien desconocidas [15]. En un sistema de esta índole pueden emplearse las observaciones que a primera vista parezcan contrarias a los enunciados tendenciales de nivel ínfimo para conseguir informarnos acerca de aquellas condiciones desconocidas (a las que está sujeto el sistema).

En beneficio de la sencillez hemos tenido en cuenta sólo enunciados tendenciales universales; pero puede haberlos también estadísticos, de la forma «En unas condiciones no especificadas, un tanto por ciento de valor tal y cual de las *A* son *B*». Y se puede tratar este enunciado siguiendo directrices parecidas; o sea, interpretando el cálculo, que en caso de que tales enunciados fuesen hipótesis estadísticas normales representaría un sistema deductivo estadístico, como representativo de cuasi-proposiciones acerca de cosas en un universo del discurso limitado de una manera no especificada.

Lo mismo que antes, cuando parábamos mientes en la condición que tienen los conceptos teoréticos en los sistemas deductivos científicos, para someter a consideración los enunciados científicos tendenciales se requiere que nos hagamos conscientes de nuestra manera de pensar científicamente, y que reflexionemos de modo explícito acerca de la forma en que se otorga significado a estos enunciados. El decir —como yo he hecho— que lo que significan no son proposiciones, sino cuasi-proposiciones, que se parecen a aquéllas en que se las puede disponer de análogo modo en un orden lógico, es sólo una forma indirecta de decir que los sistemas de dichas cuasi-proposiciones son, como los de proposiciones, representables mediante cálculos; y, como

[15] Para que el sistema tenga utilidad ha de ser representable por un cálculo en que las fórmulas verdaderamente se extraigan de otras fórmulas del mismo siguiendo las reglas establecidas para ello. «No hay cálculo si no se calcula»; la mera traducción de los enunciados tendenciales a un lenguaje matemático (como ocurre, por ejemplo, en los *Principles of Topological Psychology*, de KURT LEWIN) no basta para constituir con ellos un sistema cuasi deductivo: la esencia de las matemáticas no es su simbolismo, sino sus métodos de deducción. El valor de la matematización —por Von Neumann y Morgenstern— de los enunciados tendenciales del comportamiento económico mediante su teoría de los juegos, por ejemplo, no reside en el mero emplear el lenguaje de la teoría de los conjuntos de puntos, sino en el hecho de que sea posible calcular en un cálculo que utilice tal lenguaje: por ejemplo —en la interpretación del cálculo como juego—, en lo que respecta a cuándo ha de hacerse una puesta por encima del adversario en una forma sencilla del *póker* entre dos *(NM,* § 19).

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

siempre cuando filosofamos, volvemos a nuestros medios de expresión. La forma en que nuestro pensar científico emplea los cálculos representativos de enunciados tendenciales es diferente de aquélla en que utiliza los cálculos que representan sistemas deductivos científicos normales, si bien está relacionada con ésta; y sólo cabe explicar la diferencia existente entre los enunciados tendenciales y las hipótesis corrientes apoyándose en las diferentes maneras en que es posible interpretar los cálculos.

OBSERVACIONES FINALES: ¿LA CIENCIA ES INVENCIÓN O ES DESCUBRIMIENTO?

Un cálculo es un artefacto, y su interpretación consiste en resolverse a emplear este trabajo artificial para organizar nuestras experiencias de un modo especial —de un modo que sea tanto adecuado para permitirnos que hagamos predicciones en cuanto al curso futuro de las cosas como para satisfacernos intelectualmente, proporcionándonos una explicación matemática—. Entonces, ¿en qué medida hemos de mirar todo sistema deductivo científico ya asentado como una creación libre de la mente humana, y en qué otra hemos de tenerlo por algo que nos da una versión objetiva de los hechos de la Naturaleza?

Esta cuestión no sería nada fácil y tendría mucha importancia si quisiéramos mantener, con Kant, que algunas de las características de las leyes científicas eran productos de la mente humana, de modo que al conocer la ley que fuese estaríamos leyendo en la Naturaleza algo que habríamos escrito en ella por el mismo acto mental del conocer; y entonces sería esencial para el filósofo de la ciencia distinguir, en toda ley científica, entre lo que haya de atribuirse a la Naturaleza y lo que corresponda a la mente cognoscente. Pero si no queremos adoptar el punto de vista kantiano, la cuestión se convierte simplemente en la de distinguir entre lo que se deba a la Naturaleza y lo que se deba a nuestra facultad de representar un sistema ordenado de leyes científicas por medio de nuestros enunciados y nuestras fórmulas —a lo cual es fácil dar una respuesta—. La Naturaleza no nos suministra por separado los hechos y las leyes: al enunciar leyes estamos describiendo de cierta manera los hechos observados y estamos prediciendo hechos no observados hasta el momento; la forma de los

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

enunciados de hipótesis científicas, y su empleo para expresar proposiciones generales, son recursos de que echa mano el hombre, y lo que se debe a la Naturaleza son los hechos observables, que refutarán o no la hipótesis científica del caso. El significado de todos los símbolos que usamos —tanto los que denotan rasgos de nuestra experiencia inmediata como los términos teoréticos que empleamos en las interpretaciones alambicadas— está determinado por nuestra decisión de utilizarlos del modo en que lo hagamos; mas lo que es objetivo, y no cuestión alguna de decisiones nuestras, es el que las cláusulas y fórmulas que los contengan expresen proposiciones verdaderas o que expresen proposiciones falsas. Los sistemas deductivos científicos de hipótesis son artefactos humanos, por ser interpretaciones humanas de cálculos construidos por el hombre; pero el que uno de ellos no sea solamente un sistema deductivo de hipótesis, sino también un sistema deductivo de leyes, exige que las hipótesis sean verdaderas, lo cual no está en nuestra mano decidir.

Podemos construir cálculos a nuestro gusto e interpretarlos como nos plazca. Pero si interpretamos un cálculo determinado como sistema deductivo, por ese mismo acto de interpretación nos comprometemos a suponer que son verdaderas las proposiciones que sean conclusión de premisas del sistema en caso de que éstas sean verdaderas; y si lo interpretamos como sistema deductivo científico, dejamos en manos de la Naturaleza la tarea de decidir cuáles de las conclusiones contingentes de ínfimo nivel hayan de ser falsas. Esta contrastación objetiva de falsedad es lo que convierte el sistema deductivo, para cuya construcción gozamos de gran libertad, en un sistema deductivo de hipótesis científicas. El hombre propone un sistema de hipótesis y la Naturaleza dispone su verdad o su falsedad: el hombre inventa un sistema científico, y descubre luego si concuerda o no con los hechos observados.

La observación puede sugerir el sistema que haya de inventarse, pero hasta que no se hayan propuesto hipótesis no hay nada que pueda ser contrastado por medio de descubrimientos. Uno de los objetos de este libro ha sido el de subrayar la libertad de que gozan los científicos para construir sus sistemas deductivos y para emplear términos teoréticos —del modo que consideren más ventajosos— en los cálculos que representen tales sistemas. Hemos hecho ver que la función de las matemáticas en la ciencia no es la de admitir sólo hipótesis de una forma predeterminada, sino la de proporcionarnos una multiplicidad de métodos de disponer las hipótesis en un sistema; y el cono-

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

cimiento de ramas nuevas de las matemáticas nos despeja nuevas posibilidades de construcción de semejantes sistemas. La ocupación propia del filósofo de la ciencia es primariamente la de poner en claro qué es lo que sucede en el pensar científico; y si esta aclaración produce el efecto secundario de animar a los hombres de ciencia a construir sistemas científicos y a emplear con toda libertad los conceptos teoréticos contribuirá, según creo, al progreso de la ciencia, así como a que se comprenda mejor lo que ésta hace.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Indice analítico

Los números en negrita indican las páginas en que se define el uso del término correspondiente, o en que se lo explica de algún otro modo. Las expresiones empleadas con mayor frecuencia a lo largo de toda la obra se señalan únicamente en las páginas más importantes.

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Descargado de Papeles JPG
www.entretemas.com

Descargado de *Papeles JPG*
www.entretemas.com