MATEMÁTICA... ¿ESTÁS AHÍ?
Sobre números, personajes, problemas y curiosidades

por

ADRIÁN PAENZA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Colección "Ciencia que ladra..."
Dirigida por DIEGO GOLOMBEK

Universidad Nacional de Quilmes

Siglo veintiuno editores Argentina

siglo veintiuno editores

Siglo veintiuno editores Argentina s.a.
TUCUMÁN 1621 7º N (C1050AAG), BUENOS AIRES, REPÚBLICA ARGENTINA

Siglo veintiuno editores, s.a. de c.v.
CERRO DEL AGUA 248, DELEGACIÓN COYOACÁN, 04310, MÉXICO, D. F.

Siglo veintiuno de España editores, s.a.
PRÍNCIPE DE VERGARA 78, 2º (28006) MADRID

Universidad Nacional de Quilmes Editorial

R. Sáenz Peña 180, (B1876BXD) Bernal,
Pcia. de Buenos Aires, República Argentina

Paenza, Adrián
Matemática... ¿estás ahí? Sobre números, personajes, problemas y curiosidades - 1a ed., 3a reimp. - Buenos Aires : Siglo XXI Editores Argentina, 2005.
240 p. ; 19x14 cm. (Ciencia que ladra... dirigida por Diego Golombek)

ISBN 987-1220-19-7

1. Matemática-Enseñaza I. Título
CDD 510.7.

Portada de Mariana Nemitz

ISBN: 987-1220-19-7

Impreso en Artes Gráficas Delsur
Alte. Solier 2450, Avellaneda,
en el mes de noviembre de 2005

Hecho el depósito que marca la ley 11.723
Impreso en Argentina – Made in Argentina

ESTE LIBRO
(y esta colección)

Hay libros que duran un día, y son buenos. Hay otros que duran un año, y son mejores. Hay los que duran muchos años, y son muy buenos. Pero hay los que duran toda la vida: esos son los imprescindibles. Y este libro es uno de los que duran toda la vida: un cofre del tesoro que, al abrirse, nos inunda de preguntas y enigmas, de números que de tan grandes son infinitos (y distintos infinitos), de personajes que uno querría tener enfrente en una charla de amigos.

Adrián Paenza no sólo se pregunta por qué la matemática tiene mala prensa: se preocupa muy especialmente por acercarnos a esta búsqueda de patrones y regularidades y logra contagiarnos su entusiasmo a toda prueba. Preguntón como pocos, Paenza nos envuelve en un universo en el que reina la ciencia, pero donde no quedan afuera los amigos, los enigmas, la educación y las anécdotas de una vida dedicada a contar y enseñar.

Algunos de estos cuentos forman parte de las historias que el autor nos regala en el ciclo *Científicos Industria Argentina*, posiblemente la sección más esperada por el público, que semana a semana se esmera en resolver problemas de sombreros, ruletas o cumpleaños. Pero todas las historias son parte de un universo amplio y generoso que gracias a este libro incorporará nuevos habitantes: el universo de Adrián Paenza.

El libro nos lleva por estos nuevos paisajes a través de numerosos ejemplos con diverso grado de dificultad. Así, hay curiosidades que podrán ser leídas con el mayor deleite y comodidad y también otros capítulos que desafían al lector a razonamientos audaces y demostraciones que a veces se les presentan a los mismísimos estudiantes de ciencias (algunas de las secciones incluyen temas de las mismas materias que Paenza dicta en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA). Entonces, mientras nos maravillamos con las aventuras de Paenza en el país de las matemáticas, podremos también, como lectores, jugar a ser estudiantes de ciencias frente a la pizarra de Álgebra o de Análisis Matemático.

Matemática… ¿Estás ahí? Tal vez se esté "poniendo las preguntas", pero lo que es seguro es que sí, está a la vuelta de la esquina, en nuestra vida cotidiana y esperando a que la descubramos. He aquí una inmejorable guía para lanzarnos a explorar.

Esta colección de divulgación científica está escrita por científicos que creen que ya es hora de asomar la cabeza por fuera del laboratorio y contar las maravillas, grandezas y miserias de la profesión. Porque de eso se trata: de contar, de compartir un saber que, si sigue encerrado, puede volverse inútil.

Ciencia que ladra… no muerde, sólo da señales de que cabalga.

Diego Golombek

Dedico este libro a mis padres, Ernesto y Fruma,
a quienes les debo todo.
A mi querida hermana Laura.
A mis sobrinos: Lorena, Alejandro, Máximo, Paula, Ignacio,
Brenda, Miguelito, Sabina, Viviana, Soledad, María José, Valentín,
Gabriel, Max, Jason, Whitney, Amanda
Jonathan, Meagan y Chad.
A Carlos Griguol.
Y a la memoria de mis tías Elena, Miriam y Delia,
así como a las de Guido Peskin, León Najnudel, Manny Kreiter
y Noemí Cuño.

Agradecimientos

A Diego Golombek: sin él, no habría libro.

A Claudio Martínez: porque fue el primero que insistió para que contara estas historias por televisión y me estimuló para que lo hiciera.

A mis alumnos: de ellos aprendí a enseñar y entendí lo que era aprender. A mis amigos, porque sí, porque son mis amigos, me quieren y eso es lo único que me importa.

A Carmen Sessa, Alicia Dickenstein, Miguel Herrera, Baldomero Rubio Segovia, Eduardo Dubuc, Carlos D'Andrea, Cristian Czubara, Enzo Gentile, Ángel Larotonda y Luis Santaló.

A quienes leyeron el manuscrito (bueno, no tan manuscrito) y lo atacaron tratando de salvarlo pero no sé si lo lograron: Gerardo Garbulsky, Alicia Dickenstein y Carlos D'Andrea.

A Marcelo Bielsa, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky, por su postura ética en la vida. Gracias a ellos soy una mejor persona.

Acerca del autor

Adrián Paenza cql@sigloxxieditores.com.ar

Nació en Buenos Aires en 1949. Es doctor en Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires, en donde se desempeña como Profesor Asociado del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Es, además, periodista. En la actualidad, conduce el ciclo televisivo *Científicos Industria Argentina*. Trabajó en las radios más importantes del país y en los cinco canales de aire de la Argentina. Fue redactor especial de varias revistas y colabora con tres diarios nacionales: *Clarín*, *Página/12* y *La Nación*.

Los *grandes* hombres hablan sobre *ideas*,
los hombres *promedio* hablan sobre *cosas*,
y los hombres *pequeños*
hablan sobre... *otros hombres*.[1]

[1] Ésta es una frase que vi hace muchos años en el paragolpes trasero de un automóvil en Estados Unidos: "Great people talk about *ideas*, average people talk about *things*, small people talk... *about other people*".

Índice

siglo veintiuno editores

La mano de la princesa

Cada vez que tengo que dar una charla de matemática para público no matemático, elijo una forma de empezar. Y es siempre la misma. Pido permiso, y leo un texto que escribió Pablo Amster, el excelente matemático, músico, experto en kabbalah y, además, una extraordinaria persona.

Esta historia la utilizó Pablo en un curso de matemática que dio para un grupo de estudiantes de Bellas Artes en la Capital Federal. Se trata de un texto maravilloso que quiero (con la anuencia de él) compartir con ustedes.

Aquí va. El título es: “La mano de la princesa”.

Una conocida serie checa de dibujos animados cuenta, en sucesivos capítulos, la historia de una princesa cuya mano es disputada por un gran número de pretendientes.

Éstos deben convencerla: distintos episodios muestran los intentos de seducción que despliega cada uno de ellos, de los más variados e imaginativos.

Así, empleando diferentes recursos, algunos más sencillos y otros verdaderamente magníficos, uno tras otro pasan los pretendientes pero nadie logra conmover, siquiera un poco, a la princesa.

Recuerdo por ejemplo a uno de ellos mostrando una lluvia de luces y estrellas; a otro, efectuando un majestuoso vuelo y lle-

nando el espacio con sus movimientos. Nada. Al fin de cada capítulo aparece el rostro de la princesa, el cual nunca deja ver gesto alguno.

El episodio que cierra la serie nos proporciona el impensado final: en contraste con las maravillas ofrecidas por sus antecesores, el último de los pretendientes extrae con humildad de su capa un par de anteojos, que da a probar a la princesa: ésta se los pone, sonríe y le brinda su mano.

***

La historia, más allá de las posibles interpretaciones, es muy atractiva, y cada episodio por separado resulta de una gran belleza. Sin embargo, sólo la resolución final nos da la sensación de que todo cierra adecuadamente.

En efecto: hay un interesante manejo de la tensión, que nos hace pensar, en cierto punto, que nada *conformará a la princesa.*

Con el paso de los episodios y por consiguiente, el agotamiento cada vez mayor de los artilugios de seducción, nos enojamos con esta princesa insaciable. ¿Qué cosa tan extraordinaria es la que está esperando? Hasta que, de pronto, aparece el dato que desconocíamos: la princesa no se emocionaba ante las maravillas ofrecidas, pues no podía verlas.

Así que ése *era el problema. Claro. Si el cuento mencionara este hecho un poco antes, el final no nos sorprendería. Podríamos admirar igualmente la belleza de las imágenes, pero encontraríamos algo tontos a estos galanes y sus múltiples intentos de seducción, ya que* nosotros *sabríamos que la princesa es miope.*

No lo sabemos: nuestra idea es que la falla está en los pretendientes, que ofrecen, al parecer, demasiado poco. Lo que hace el último, ya enterado del fracaso de los otros, es cambiar el enfoque del asunto. Mirar al problema de otra manera.

De no saber ya ustedes [Pablo se refiere aquí a los estudiantes de Bellas Artes que eran sus interlocutores] *de qué trata es-*

te curso, quizás se sorprenderían ahora como se sorprendieron con el final de la historia anterior: vamos a hablar (o estamos hablando) de matemática.

En efecto, hablar de matemática no es solamente demostrar el teorema de Pitágoras: es, además, hablar del amor y contar historias de princesas. También en la matemática hay belleza. Como dijo el poeta Fernando Pessoa: "El binomio de Newton es tan hermoso como la Venus de Milo; lo que pasa es que muy poca gente se da cuenta".

Muy poca gente se da cuenta… Por eso el cuento de la princesa; porque el problema, como adivina el último de los pretendientes, es que "Lo más interesante que hay en este país, no se lo ve" (Henri Michaux, "El país de la magia").

Muchas veces me sentí en el lugar de los primeros galanes. Así, siempre me esforcé por exponer las cuestiones matemáticas más bellas, pero la mayoría de las veces, debo reconocerlo, mis apasionados intentos no tuvieron la respuesta esperada.

Trato esta vez de acercarme al galán humilde del último capítulo. De la matemática, según Whitehead "la creación más original del ingenio humano", hay bastante para decir. Por eso este curso. Sólo que hoy prefiero también yo mirar las cosas de esa otra manera, *y empezar contando un cuento…*

Esta presentación de Pablo Amster apunta directamente al corazón de este libro. La idea es poder recorrer varias historias, pensar libremente, imaginar con osadía y parar cuando uno llega a algo que lo entusiasma. Pero buscar esos puntos. No sólo esperar que lleguen. Estas líneas tienen ese propósito: entusiasmarlos, conmoverlos, enamorarlos, sea con la matemática o con una historia que no conocían. Espero lograrlo.

Números

Números grandes

¿Números grandes? Sí. Grandes. Difíciles de imaginar. Uno escucha que las deudas externas se manejan en miles de millones de dólares, que las estrellas en el cielo están a años luz de la Tierra, que la molécula de ADN contiene tres mil millones de nucleótidos, que la superficie del sol tiene una temperatura de seis mil grados centígrados, etcétera. Estoy seguro de que cada uno que esté leyendo este párrafo tiene sus propios ejemplos para agregar.

Lo que yo hago frente a estas magnitudes es compararlas, contrastarlas con algo que me sea más fácil representar.

En el mundo hay más de seis mil quinientos millones de personas. En realidad ya somos (en agosto de 2005) más de seis mil trescientos millones. Parece mucho. Pero ¿qué es mucho? Veamos. ¿Qué diferencia hay entre un millón y mil millones? (aparte de que el último tiene tres ceros más). Para ponerlo en perspectiva, transformémoslos en segundos. Por ejemplo, supongamos que en un pueblo en donde el tiempo sólo se mide en segundos, una persona está acusada de haber cometido un delito. Se enfrentan el fiscal y el abogado defensor delante del juez que interviene en la causa. El fiscal pide "mil millones de segundos para el reo". El defensor lo tilda de "loco" y sólo está dispuesto a aceptar "un millón de segundos, y sólo como un hecho simbólico". El juez, acostumbrado a medir el tiempo de esa forma, sabe que la diferencia es abismal. ¿Entienden las razones?

siglo veintiuno editores

Piénsenlo así: un millón de segundos son aproximadamente once días y medio. En cambio, mil millones de segundos significan casi… ¡32 años!

Este ejemplo muestra que, en general, nosotros no tenemos idea de lo que representan los números, aun en nuestra vida cotidiana. Volvamos al tema de los habitantes de la Tierra. Si somos seis mil millones, y pusieran fotos de todos en un libro, de manera que las hojas fueran de una décima de milímetro de espesor, colocando diez personas por página y utilizando las dos caras de la hoja… el libro tendría, ¡30 kilómetros de alto! Además, si una persona estuviera muy ávida por mirar fotos, y tardara un segundo por página para recorrer las diez que hay allí, y le dedicara 16 horas diarias, le llevaría 28 años y medio mirarlas todas. Con todo, cuando llegara al final, en el año 2033, el libro ya habría aumentado de tamaño, porque ya seríamos dos mil millones de personas más, y el libro tendría otros diez kilómetros más de espesor.

Pensemos ahora cuánto lugar nos haría falta para poder ponernos a todos juntos. El estado de Texas (el de mayor superficie en los Estados Unidos, exceptuando Alaska) podría albergar a toda la población mundial. Sí. Texas tiene una superficie habitable de aproximadamente 420.000 kilómetros cuadrados. Luego, nosotros, los humanos, podríamos juntarnos en Texas y tener cada uno una parcela de 70 metros cuadrados para vivir. ¿No está mal, no?

Ahora pongámonos en fila, ocupando cada persona una baldosa de 30 centímetros cuadrados. En este caso la humanidad entera formaría una cola de más de 1.680.000 kilómetros. Eso nos permitiría dar 42 veces la vuelta al globo por el Ecuador.

¿Qué pasaría si todos nos quisiéramos transformar en artistas de cine y filmáramos una película con nosotros como estrellas? Si cada persona apareciera nada más que 15 segundos (o sea, un poco menos de siete metros de celuloide por humano), se necesitarían unos ¡40 millones de kilómetros de negativo! Además, si alguien quisiera verla, se tendría que sentar en el cine por 23.333.333 horas, o sea 972.222 días, lo que significan unos 2.663 años. Y esto sucedería siempre que decidamos no dormir, comer ni hacer ninguna otra cosa en la vida. Sugiero que nos distribuyamos para verla y después nos encontremos para contarnos lo mejor.

Más sobre números grandes: peso de un tablero de ajedrez

Otro ejemplo más para este boletín. Hay uno muy conocido por toda persona que quiere ejemplificar el crecimiento exponencial y maravillar a sus interlocutores advirtiendo cómo los números crecen en forma… bueno, justamente, en forma *exponencial*.

El caso típico es el de los granitos de arroz con los que el Rey de un condado quería premiar a un súbdito que le había hecho un favor y le había salvado la vida. Cuando éste le dice que lo único que quiere es que ponga en un tablero de ajedrez un granito de arroz en el primer cuadrado, dos en el segundo, cuatro en el tercero, ocho en el cuarto, dieciséis en el quinto, treinta y dos en el sexto, y así, duplicando cada vez hasta recorrer todos los cuadraditos del tablero, el Rey descubre que no alcanzan los granitos de arroz de todo su reino (ni los de todos los reinos de los alrededores) para poder satisfacer la demanda de su "salvador".

Vamos a actualizar un poco el ejemplo. Supongamos que en lugar de granitos de arroz ponemos pepitas de oro, de un gramo cada una. Obviamente, si el Rey se había tropezado con una dificultad terminal en el caso de los granitos de arroz, mucho peor le iría con las pepitas de oro. Pero la pregunta que quiero hacer es otra: si el Rey hubiera podido satisfacer lo que le pedían, ¿cuánto pesaría el tablero de ajedrez? Es decir, suponiendo que se pudiera poner en el tablero la cantidad de pepitas de oro que el súbdito le había indicado, ¿cómo levantarían el tablero? Y, además, si pudiera ir poniéndose en el bolsillo una pepita por segundo, ¿cuánto tardaría?

Como hay 64 cuadraditos en el tablero de ajedrez, se tendrían ¡un trillón de pepitas de oro! Seguro que aquí los números vuelven a ser confusos, porque uno no tiene la más vaga idea de lo que significa "un trillón" de ningún objeto. Comparémoslo entonces con algo que nos sea más familiar. Si como dijimos antes, cada una de las pepitas pesa sólo un gramo, la pregunta es: ¿*cuánto es un trillón de gramos*?

Esto representa un billón de toneladas. Igual es un problema, porque ¿quién tuvo alguna vez "un billón de algo"? Este peso sería equivalente a tener ¡cuatro mil millones de Boeing 777 con 440 pasajeros a bordo, su tripulación y combustible para viajar 20 horas! Y aun así, si bien avanzamos un poco, uno podría preguntarse cuánto es *cuatro mil millones de algo.*

¿Y cuánto tiempo tardaría uno en ponerse las pepitas de oro en el bolsillo, si uno pudiera hacerlo a una velocidad *súper rápida* de una pepita por segundo? Tardaría, nuevamente, ¡un trillón de segundos! Pero ¿cuánto es un trillón de segundos? ¿Cómo medirlo con algo que nos resulte familiar? Por ejemplo, basta pensar que nos llevaría más de cien mil millones de años. No sé ustedes, pero yo tengo previsto hacer otras cosas con mi tiempo.

Átomos en el universo

Sólo como una curiosidad y a efectos de mostrar *otro número enorme*, piensen que en el universo se estima que hay 2^{300} átomos. Si 2^{10} es aproximadamente 10^3, entonces, 2^{300} es aproximadamente 10^{90}. Y escribí todo esto para poder decir entonces que en el Universo hay tantos átomos como poner el número *uno* seguido de *noventa ceros.*

¿Qué es un año luz?

Un año luz es una medida de distancia y no de tiempo. Mide la distancia que la luz tarda un año en recorrer. Para poner en perspectiva esto, digamos que la velocidad de la luz es de 300.000 kilómetros por segundo. El resultado de multiplicar este número por 60 (para transformarlo en minutos) es 18.000.000 km por *minuto*. Luego, nuevamente multiplicado por 60, lo transforma en 1.080.000.000 kilómetros *por hora* (mil ochenta millones de kilómetros por hora). Multiplicado por 24 resulta que la luz viajó 25.920.000.000 (25 mil millones de kilómetros *en un día*).

Finalmente, multiplicado por 365 días, un año luz (o sea, la distancia que la luz viaja por año) es de (aproximadamente) 9.460.000.000.000 (casi nueve *billones y medio*) de kilómetros.

De manera tal que cada vez que les pregunten cuánto es un año luz, ustedes, convencidos, digan que es una manera de medir una distancia (grande, pero distancia al fin) y que es de casi nueve billones y medio de kilómetros. Es lejos, vean.

Números interesantes

Voy a probar ahora que *todos los números naturales son números "interesantes"*. Claro, la primera pregunta que surge es: ¿qué quiere decir que un número sea *interesante?* Vamos a decir que un número lo es cuando tiene algún atractivo, algo que lo distinga, algo que merezca destacarlo de los otros, que tenga algún borde o alguna particularidad. Creo que todos entendemos ahora lo que quiero decir con *interesante.* Ahora, la demostración.

El número uno es interesante porque es el primero de todos. Lo distingue entonces el hecho de ser el más chico de todos los números naturales.

El número dos es interesante por varias razones: es el primer número par, es el primer número primo.[2] Creo que con estos dos argumentos ya podemos distinguirlo.

El número tres también es interesante, porque es el primer número impar que es primo (por elegir una razón de las muchas que habría).

El número cuatro es interesante porque es una *potencia de dos.*

El número cinco es interesante porque es un número primo. Y de aquí en adelante deberíamos ponernos de acuerdo en que cuando un número es primo, ya tiene una característica fuerte que lo distingue y lo podríamos considerar *interesante sin buscar otros argumentos.*

Sigamos un poco más.

El número seis es interesante porque es el primer número compuesto (o sea, *no es un número primo)* que *no sea una potencia de dos.* Recuerde que el primer número compuesto que apareció es el cuatro, pero es una potencia de dos.

El número siete es interesante, y no hace falta argumentar más porque es *primo.*

Y así podríamos seguir. Lo que quiero *probar con ustedes es que:*

"Dado un número entero positivo *cualquiera* siempre… siempre… hay algo que lo transforma en 'interesante' o 'atractivo' o 'distinguible'".

¿Cómo hacer para probar esto con todos los números, si son infinitos? Supongamos que no fuera así. Entonces, eso quiere decir que hay números que llamaremos *no interesantes.* A esos números los ponemos en una bolsa (y supondremos que esta bolsa no está vacía). Es decir, tenemos una bolsa llena de números *no interesantes.* Vamos a ver que esto nos lleva a una contradicción. Esa bolsa —como todos los números que contiene son

[2] Como se verá más adelante, los números primos son aquellos que sólo son divisibles por uno y por sí mismos.

números *naturales,* o sea, *enteros positivos*— tiene que tener un primer elemento. Es decir, un número que sea el menor de todos los que están en la bolsa.

Pero entonces, el supuesto primer número *no interesante* se transforma en *interesante.* El hecho que lo distingue es que sería *el primero de todos los números no interesantes,* una razón más que suficiente para declararlo *interesante.* ¿No les parece? El error, entonces, provino de haber pensado que había números *no interesantes.* No es así. Esa bolsa (la de los números *no interesantes*) no puede contener elementos, porque si los tiene, alguno tiene que ser el primero, con lo que pasaría a ser *interesante* un número que por estar en la bolsa debería ser *no interesante.*

MORALEJA: "Todo número natural ES interesante".

Cómo conseguir un contrato como consultor usando un poco de matemática

Uno puede hacerse pasar por adivino o por una persona muy entrenada en predecir el futuro o aventurar lo que va a pasar en la Bolsa de Valores: basta con aprovechar la rapidez con la que crecen las potencias de un número.

Éste es un ejemplo muy interesante. Supongamos que tenemos una base de datos de 128.000 personas. (Por las dudas, no crean que son tantas, ya que la mayoría de las grandes empresas las tienen, las compran o las averiguan). De todas formas, para lo que quiero invitarlos a pensar, podríamos empezar con un número más chico, e igualmente el efecto sería el mismo.

Supongamos que uno elige alguna acción o algún *commodity* cuyo precio cotice en la Bolsa. Digamos, para fijar las ideas, que uno elige el precio del oro. Supongamos también que ustedes se sientan frente a su computadora un domingo por la tarde. Buscan la base de datos que tienen y seleccionan las direcciones electrónicas de todas las personas que allí figuran. Entonces, a la mitad de ellas (64.000) les envían un mail diciéndoles que el precio del oro va a subir al día siguiente (lunes). Y a la otra mitad les envían un mail diciéndoles lo contrario: que el precio del oro va a bajar. (Por razones que quedarán más claras a medida que avance con el ejemplo, excluiremos los casos en los que el oro permanece con el precio constante en la apertura y el cierre.)

Cuando llega el lunes, al finalizar el día, el precio del oro o bien subió o bien bajó. Si subió, hay 64.000 personas que habrán recibido un mail de ustedes diciéndoles que subiría.

Claro, qué importancia tendría. Haber acertado un día lo que pasaría con el oro tiene poca relevancia. Pero sigamos con la idea: el lunes a la noche, de las 64.000 personas que habían recibido su primer mail diciéndoles que el precio del oro subiría, ustedes seleccionan la mitad (32.000) y les dicen que el martes volverá a subir. Y a la otra mitad, los otros 32.000, les envían un mail diciéndoles que va a bajar.

Llegado el martes por la noche, ustedes están seguros de que hay 32.000 para los cuales ustedes no sólo acertaron lo del martes, sino que ya habían acertado el lunes. Ahora repitan el proceso. Al dividir por la mitad, a 16.000 les dicen que va a subir y al resto, los otros 16.000, que va a bajar. Resultado, el miércoles ustedes tienen 16.000 personas a las que les avisaron el lunes, el martes y el miércoles lo que pasaría con el precio del oro. Y acertaron las tres veces (para este grupo).

Repítanlo una vez más. Al finalizar el jueves, ustedes tienen 8.000 para los que acertaron cuatro veces. Y el viernes por la noche, tienen 4.000. Piensen bien: el viernes por la noche, ustedes tienen 4.000 personas que los vieron acertar *todos los días* con lo que pasaría con el precio del oro, sin fallar nunca. Claro que el proceso podrían seguirlo a la semana siguiente, y podrían tener dos mil al siguiente lunes, mil al martes y, si queremos estirarlo aún más, el miércoles de la segunda semana, tendrán 500

personas a las que les fueron diciendo, día por día, *durante diez días*, lo que pasaría con el precio del oro.

Si alguno de ustedes pidiera a estas personas que lo contrataran como consultor pagándole, digamos, mil dólares por año (no lo quiero poner por mes, porque tengo cierto pudor aún)… ¿no creen que contratarían sus servicios? Recuerden que ustedes *acertaron siempre por diez días consecutivos*.

Con esta idea, empezando con una base de datos o bien más grande o más chica, o parando antes en el envío de correos electrónicos, ustedes se pueden fabricar su propio grupo de personas que crean en ustedes o que crean sus predicciones. Y ganar dinero en el intento.[3]

Hotel de Hilbert

Los conjuntos infinitos tienen siempre un costado atractivo: atentan contra la intuición. Supongamos que hubiera un número infinito de personas en el mundo. Y supongamos también que hay un hotel, en una ciudad, que contiene infinitas habitaciones. Estas habitaciones están numeradas, y a cada una le corresponde un número natural. Así entonces, la primera lleva el número 1, la segunda el 2, la tercera el 3, etcétera. Es decir: en la puerta de cada habitación hay una placa con un número, que sirve de identificación.

Ahora, supongamos que *todas* las habitaciones están ocupa-

[3] Excluí adrede el caso en que el precio del oro permanece igual en la apertura y en el cierre, porque para el ejemplo es irrelevante. Ustedes podrían decir en sus mensajes a algunos que el precio del oro subirá o permanecerá constante, y al otro grupo que bajará o permanecerá constante. Si el precio del oro queda quieto, repiten el proceso sin dividir por dos. Es como hacer de cuenta que ese día no existió. Y por otro lado, si ustedes pueden conseguir una base de datos más grande que 128.000, sigan adelante. Tendrán más clientes a los diez días.

das y sólo por una persona. En un momento determinado, llega al hotel un señor con cara de muy cansado. Es tarde en la noche y todo lo que este hombre espera es terminar rápido con el papelerío para irse a descansar. Cuando el empleado de la recepción le dice: "lamentablemente no tenemos ninguna habitación disponible ya que *todas* las habitaciones están ocupadas", el recién llegado no lo puede creer. Y le pregunta:

—Pero cómo... ¿No tienen ustedes *infinitas* habitaciones?

—Sí —responde el empleado del hotel.

—Entonces, ¿cómo me dice que no le quedan habitaciones disponibles?

—Y sí, señor. Están todas ocupadas.

—Vea. Lo que me está contestando no tiene sentido. Si usted no tiene la solución al problema, lo ayudo yo.

Y aquí conviene que ustedes piensen la respuesta. ¿Puede ser correcta la respuesta del conserje "no hay más lugar", si el hotel tiene infinitas habitaciones? ¿Se les ocurre alguna solución?

Aquí va:

—Vea —continuó el pasajero—. Llame al señor de la habitación que tiene el número 1 y dígale que pase a la que tiene el 2. A la persona que está en la habitación 2, que vaya a la del 3. A la del 3, que pase a la del 4. Y así siguiendo. De esta forma, toda persona seguirá teniendo una habitación, que "no compartirá" con nadie (tal como era antes), pero con la diferencia de que ahora quedará una habitación libre: la número 1.

El conserje lo miró incrédulo, pero comprendió lo que le decía el pasajero. Y el problema se solucionó.

Ahora bien, algunos problemas más:

a) Si en lugar de llegar un pasajero, llegan dos, ¿qué sucede? ¿Tiene solución el problema?

b) ¿Y si en lugar de dos, llegan cien?

c) ¿Cómo se puede resolver el problema si llegan n pasajeros inesperadamente durante la noche (donde n es un número cualquiera). ¿Siempre tiene solución el problema independientemente del número de personas que aparezcan buscando una pieza para dormir?

d) ¿Y si llegaran *infinitas* personas? ¿Qué pasaría en ese caso?

Las soluciones las pueden buscar en el apéndice.

Repitan conmigo: ¡no se puede dividir por cero!

Imaginen que entran en un negocio en donde toda la mercadería que se puede comprar cuesta mil pesos. Y ustedes entran justamente con esa cantidad: mil pesos. Si yo les preguntara: ¿cuántos artículos pueden comprar?, creo que la respuesta es obvia: uno solo. Si en cambio en el negocio todos los objetos valieran 500 pesos, entonces, con los mil pesos que trajeron podrían comprar, ahora, dos objetos.

Esperen. No crean que enloquecí (estaba loco de antes). Síganme en el razonamiento. Si ahora los objetos que vende el negocio costaran sólo un peso cada uno, ustedes podrían comprar, con los mil pesos, exactamente mil artículos.

Como se aprecia, a medida que disminuye el precio, aumenta la cantidad de objetos que ustedes pueden adquirir. Siguiendo con la misma idea, si ahora los artículos costaran diez centavos, ustedes podrían comprar... diez mil. Y si costaran un centavo, sus mil pesos alcanzarían para adquirir cien mil.

O sea, a medida que los artículos son cada vez más baratos, se pueden comprar más unidades. En todo caso, el número de unidades aumenta tanto como uno quiera, siempre y cuando uno logre que los productos sean cada vez de menor valor.

Ahora bien: ¿y si los objetos fueran gratuitos? Es decir: ¿y si no costaran nada? ¿cuántos se pueden llevar? Piensen un poco.

Se dan cuenta de que si los objetos que se venden en el negocio no costaran nada, tener o no tener mil pesos poco importa, porque ustedes se podrían llevar todo. Con esta idea en la cabeza es que uno podría decir que *no tiene sentido* "dividir" mil pesos entre "objetos que no cuestan nada". En algún sentido, los estoy invitando a que concluyan conmigo que lo que *no tiene sentido es dividir por cero.*

Más aun: si se observa la tendencia de lo que acabamos de hacer, pongamos en una lista la cantidad de artículos que podemos comprar, en función del precio.

Precio por artículo	Cantidad a comprar con mil pesos
$ 1.000	1
$ 500	2
$ 100	10
$ 10	100
$ 1	1.000
$ 0,1	10.000
$ 0,01	100.000

A medida que disminuye el precio, aumenta la cantidad de artículos que podemos comprar *siempre con los mil pesos originales*. Si siguiéramos disminuyendo el precio, la cantidad de la derecha seguiría aumentando… pero, si finalmente llegáramos a un punto en donde el valor por artículo es *cero*, entonces la cantidad que habría que poner en la columna de la derecha, sería… *infinito.* Dicho de otra manera, nos podríamos llevar todo.

MORALEJA: no se puede dividir por cero.

Repitan conmigo: ¡no se puede dividir por cero! ¡No se puede dividir por cero!

1 = 2

Supongamos que uno tiene dos números cualesquiera: *a* y *b*.

Supongamos, además, que

$$a = b$$

Síganme con este razonamiento. Si multiplico a ambos miembros por *a*, se tiene

$$a^2 = ab$$

Sumemos ahora $(a^2 – 2ab)$ en ambos miembros.

Resulta entonces la siguiente igualdad

$$a^2 + (a^2 - 2ab) = ab + (a^2 - 2ab)$$

O sea, agrupando:

$$2a^2 – 2ab = a^2 – ab$$

Sacando factor común en cada miembro,

$$2a (a-b) = a (a-b)$$

Luego, simplificando en ambos lados por (a-b) se tiene:

$$2a = a.$$

Ahora, simplificamos la *a* de ambos lados, y se tiene:

$$2 = 1$$

¿Dónde está el error? Es que tiene que haber alguno, ¿no?

Quizá ustedes ya se dieron cuenta. Quizá todavía no. Les sugiero que lean detenidamente cada paso y traten de descubrir solos *dónde está el error.*

La respuesta, de todas formas, está en la página de soluciones.

El problema 3x + 1

Les propongo un ejercicio para que hagamos juntos. Naturalmente, ni yo estoy aquí para acompañarlos ("aquí" significa donde están ustedes ahora leyendo este libro) ni ustedes están conmigo aquí ("aquí" es donde estoy yo, sentado frente a mi computadora escribiendo estas líneas). De todas formas, digresión aparte, síganme en este razonamiento.

Vamos a construir juntos una *sucesión* de números naturales (enteros positivos). La regla es la siguiente: empezamos por uno cualquiera. Digamos, a manera de ejemplo, que elegimos el número 7. Ése va a ser el primer elemento de nuestra sucesión.

Para generar el segundo elemento, hacemos lo siguiente: si el que elegimos primero es par, lo dividimos por dos. En cambio, si es impar, lo multiplicamos por 3 y le sumamos 1. En nuestro ejemplo, al haber elegido el 7, como *no es par,* tenemos que multiplicarlo por 3 y sumarle 1. Es decir, se obtiene el número 22, ya que 3 x 7 = 21 y sumando uno, queda 22.

Tenemos entonces los primeros dos elementos de *nuestra sucesión:* {7, 22}.

Para generar el tercer elemento de la sucesión, como el 22 es un número par, lo dividimos por dos, y obtenemos 11. Ahora tenemos {7, 22, 11}.

Como 11 es impar, la regla dice: "multiplíquelo por 3 y súmele 1". O sea, 34. Se tiene {7, 22, 11, 34}.

Luego, como 34 es par, el próximo elemento de la sucesión es 17. Y el siguiente es 52. Luego 26. Y después 13. Y sigue 40. Luego 20. (hasta acá tenemos {7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20}) y seguimos dividiendo por dos los pares y multiplicando por 3 y sumando 1 a los impares:

{7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1}

Y en el número 1, paramos.

Los invito ahora a que elijamos cualquier otro número para empezar, digamos el 24. La sucesión que se tiene es:

{24, 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1}

Si ahora empezamos con el 100, se sigue:

{100, 50, 25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1}

Como se alcanza a ver, *todas* las sucesiones que elegí terminan en el número 1.

En realidad, aunque no lo dije antes, al llegar al número 1 el proceso se detiene, porque si uno siguiera, entraría en un *lazo o círculo*, ya que del 1 pasaría al 4, del 4 al 2 y del 2 otra vez al 1. Por eso es que cuando al construir la sucesión llegamos al número 1, detenemos el proceso.

Hasta hoy, agosto de 2005, en *todos* los ejemplos conocidos siempre se termina la sucesión en el número 1. Pero *no se tiene ninguna demostración que pruebe* que el resultado es válido para *cualquier número con el que comencemos el ejercicio.*

Este problema se conoce con el nombre de "problema 3x + 1", o también como el "Problema de Collatz", o "Problema de Syracusa", o "Problema de Kakutani" o "Algoritmo de Hasse" o "Problema de Ulam". Como ven, tiene muchos nombres pero ninguna solución. Es una buena oportunidad para empezar. Con todo, permítanme intercalar algo aquí: es muy poco probable que una persona "lega" tenga las herramientas suficientes para resolverlo. Se estima que hay sólo veinte personas en el mundo capaces de "atacarlo". Pero como escribí en alguna otra parte de este mismo libro, eso no significa que alguno de ustedes, en algún lugar del planeta, por mayor o menor entrenamiento matemático que tengan, esté impedido para que se le ocurra una idea que nadie tuvo antes y el problema quede resuelto por una persona que no pertenezca a ese *privilegiado grupo de veinte.*

Este problema que acaban de leer se inscribe dentro de una larga lista que la matemática tiene sin resolver aún. Es fácil aceptar esto en otras ciencias. Por ejemplo, la medicina no sabe aún cómo resolver algunas variedades de cáncer o del Alzheimer, por poner un par de ejemplos. La física no tiene aún una "teoría" que integre lo *macro con lo micro*, ni conoce *todas las partículas elementales*. La biología no conoce aún cómo funcionan todos los genes ni cuántos son. En fin, estoy seguro de que usted puede agregar muchísimos ejemplos más. La matemática, decía, tiene *su propia lista*.

¿Cuántas veces se puede doblar un papel?

Supongamos que uno tuviera una hoja de papel bien finita, como las que se usan habitualmente para imprimir la Biblia. Es más, en algunas partes del mundo este papel se conoce como el "papel de Biblia". En realidad, parece un papel "de seda".

Para fijar las ideas, digamos que tiene un grosor de 1 milésima de centímetro.

O sea, 10^{-3} cm = 0,001 cm

Supongamos también que uno tiene una hoja grande de ese papel, como si fuera la hoja de un diario.

Ahora, empecemos a doblarlo por la mitad.

¿Cuántas veces creen ustedes que podrían doblarlo? Y tengo otra pregunta: si lo pudieran doblar y doblar tantas veces como quisieran, digamos unas *treinta veces*, ¿cuál creen que sería el grosor del papel que tendrían en la mano entonces?

Antes de seguir leyendo, les sugiero que piensen un rato la respuesta y sigan después (si les parece).

Volvamos al planteo entonces. Luego de doblarlo una vez, tendríamos un papel de un grosor de 2 milésimas de centímetro. Si lo dobláramos una vez más, sería de 4 milésimas de centímetro. Cada doblez que hacemos a la hoja, se *duplica* el grosor. Y si seguimos doblándolo una y otra vez (siempre por la

mitad) tendríamos la siguiente situación, después de diez *dobleces:*

2^{10} (esto significa multiplicar el número 2 diez veces por sí mismo) = 1.024 milésimas de cm = 1 cm aproximadamente.

¿Qué dice esto? Que si uno doblara el papel 10 (diez) veces, obtendríamos un grosor de un poco más de un centímetro. Supongamos que seguimos doblando el papel, siempre por la mitad. ¿Qué pasaría entonces?

Si lo dobláramos 17 veces, tendríamos un grosor de

2^{17} = 131.072 milésimas de cm = un poco más de un metro.

Si pudiéramos doblarlo 27 veces, se tendría:

2^{27} = 134.217.728 milésimas de cm, o sea un poco más de ¡1.342 metros! O sea, ¡casi un kilómetro y medio!

Vale la pena detenerse un instante: doblando un papel, aun tan finito como el papel de Biblia, sólo veintisiete veces, tendríamos un papel que casi alcanzaría el kilómetro y medio de espesor.

¿Qué es más?
¿El 37% de 78 o el 78% de 37?

En general una idea es más importante que una cuenta. Es decir, atacar un problema usando "la fuerza bruta", no siempre es aconsejable. Por ejemplo, en el caso de que a uno le preguntaran: qué número es mayor: ¿el 37% de 78 o el 78% de 37?

Claro, uno puede hacer el cálculo y averiguar el resultado, pero de lo que se trata es de poder decidirlo sin hacer cuentas. La idea reside en advertir que para calcular el 37% de 78, uno tiene que multiplicar 37 por 78 y luego dividir por 100. No hagan la cuenta. No hace falta.

De la misma forma, si uno quiere calcular el 78% de 37, lo que tiene que hacer es multiplicar 78 por 37 y luego dividir por 100.

Como se advierte, es la misma cuenta, ya que la multiplicación es *conmutativa*. Como usted escuchó decir muchas veces, *el orden* *de los factores no altera el producto*. Es decir, independientemente de cuál sea el resultado (que al final es 28,86), da lo mismo cualquiera de los dos. Es decir, los números son iguales.

Cartas binarias

Piensen en el siguiente hecho: no importa si ustedes hablan inglés, alemán, francés, portugués, danés, sueco... Si uno escribe

$$153 + 278 = 431$$

toda persona que viva en Inglaterra o Estados Unidos, o Alemania o Francia o Portugal o Brasil o Dinamarca (por poner algunos ejemplos de países en donde se hablen idiomas distintos), entienden.

Esto quiere decir: el lenguaje de los números es "más universal" que el de los diferentes idiomas. Lo trasciende. Es que nos hemos puesto de acuerdo (aun sin saberlo) en que los números son "sagrados". Bueno, no tanto, pero lo que quiero decir es que hay ciertas convenciones (los números obviamente *son* una convención) que trascienden los acuerdos que hicimos alguna vez para comunicarnos.

Europa tardó más de cuatrocientos años en adoptar la numeración arábiga (o sea, los números que usamos hoy) y cambiar lo que se usaba hasta entonces (los números romanos). El primero que los introdujo en Europa fue el famoso Fibonacci, hacia 1220. Fibonacci, cuyo padre italiano lo había llevado de niño al norte de África, entendió claramente la necesidad de usar otra numeración más apropiada. Pero si bien no quedaban dudas de las ventajas que la nueva numeración tendría, los mercaderes de la época se ocuparon de evitar el progreso que les impediría a ellos hacer trampa en las cuentas.

A propósito, los romanos *ignoraban* al cero. La dificultad para hacer cálculos se puede resumir en algo que escribió Juan Enríquez en *As the Future Catches You*: "trate de multiplicar 436 por 618 en números romanos, y después me cuenta".

Ahora bien. Cuando uno escribe el número

$$2.735.896$$

en realidad, está *abreviando* o *simplificando* la siguiente operación:

(a) $$2.000.000 + 700.000 + 30.000 + 5.000 + 800 + 90 + 6.$$

Claro: uno no se da cuenta de que está haciendo esto (ni necesita hacerlo). Pero en realidad, la notación es un "acuerdo" que hacemos originalmente para "abreviar" todo lo que escribimos en la fila (a).

Puesto de otra manera, sería como escribir:

(b) $$2.10^6 + 7.10^5 + 3.10^4 + 5.10^3 + 8.10^2 + 9.10^1 + 6.10^0,$$

con la convención de que el número $10^0 = 1$

Es lo que estudiábamos en la escuela primaria y que la maestra nos enseñaba como "las unidades de millón", las "centenas de mil", las "decenas de mil", las "unidades de mil", las "centenas", las "decenas" y las "unidades", así, a secas. Uno nunca más utilizó esa nomenclatura ni le hizo falta tampoco.

Lo curioso es que para poder escribir los números de la forma en la que los escribimos, necesitamos decir, por ejemplo, *cuántas* decenas de mil, *cuántas* unidades de mil, *cuántas* centenas, etcétera.

Para eso, necesitamos los números que en la ecuación (b), puse en letras "negritas" y con un tamaño un poco más grande.

Y esos números son los que llamamos *dígitos,* que como todo el mundo sabe, supongo, son diez:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9

Supongamos que ahora uno contara solamente con dos dígitos: 0 y 1.

¿Cómo hacer para poder escribir un número?

Si uno sigue la misma lógica que cuando tiene los *diez dígitos,* primero los usa a todos por separado. Es decir, usa: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Cuando llega hasta aquí, ya no los puede usar a los dígitos solos. Necesita combinarlos. Es decir, necesitamos usar ahora *dos de los dígitos.* Y empieza con el 10. Y sigue, 11, 12, 13, 14… 19… (aquí necesita empezar con el siguiente dígito), y usa el 20, 21, 22, 23… 29, 30… etcétera… hasta que llega al 97, 98, 99. En este punto, ya *agotó* todas las posibilidades de escribir números que tengan *dos dígitos.* Y sirvieron para enumerar los primeros *cien* (porque empezamos con el 0. Hasta el 99, hay justo 100).

¿Y ahora? Necesitamos usar *tres dígitos* (y que no empiecen con cero, porque si no, es como tener *dos dígitos* pero en forma encubierta). Entonces, empezamos con 100, 101, 102… etcétera. Después de llegar a los mil, necesitamos *cuatro dígitos.* Y así siguiendo. Es decir: cada vez que agotamos *todos los posibles números que podemos escribir con un dígito, pasamos a dos. Cuando agotamos los de dos, pasamos a los de tres. Y luego a los de cuatro. Y así siguiendo.*

Cuando uno tiene dos dígitos solamente, digamos el 0 y el 1, ¿cómo hacer? Usamos primero los dos dígitos por separado:

0 = 0
1 = 1

Ahora, necesitamos pasar al siguiente caso, o sea, cuando necesitamos usar *dos dígitos* (y curiosamente, necesitamos ya usar *dos dígitos* para escribir el número *dos):*

10 = 2
11 = 3

Aquí, ya agotamos las posibilidades con dos dígitos. Necesitamos usar más:

100 = 4
101 = 5
110 = 6
111 = 7

Y necesitamos uno más para seguir:

1 000 = 8
1 001 = 9
1 010 = 10
1 011 = 11
1 100 = 12
1 101 = 13
1 110 = 14
1 111 = 15

Escribo sólo un paso más:

10 000 = 16
10 001 = 17
10 010 = 18
10 011 = 19
10 100 = 20
10 101 = 21

10 110 = 22
10 111 = 23
11 000 = 24
11 001 = 25
11 010 = 26
11 011 = 27
11 100 = 28
11 101 = 29
11 110 = 30
11 111 = 31

Y aquí los dejo a ustedes solos. Pero lo que queda claro es que para poder llegar al 32, hace falta agregar un dígito más y usar el 100.000.

Lo notable es que *con sólo dos dígitos* es posible escribir cualquier número. Los números están ahora escritos *en potencias de 2*, de la misma forma en que antes estaban escritos *en potencias de 10*.

Veamos algunos ejemplos:

a) $111 = 1 \,.\, 2^2 + 1 \,.\, 2^1 + 1 \,.\, 2^0 = 7$
b) $1\,010 = 1 \,.\, 2^3 + 0 \,.\, 2^2 + 1 \,.\, 2^1 + 0 \,.\, 2^0 = 10$
c) $1\,100 = 1 \,.\, 2^3 + 1 \,.\, 2^2 + 0 \,.\, 2^1 + 0 \,.\, 2^0 = 12$
d) $110\,101 = 1 \,.\, 2^5 + 1 \,.\, 2^4 + 0 \,.\, 2^3 + 1 \,.\, 2^2 + 0 \,.\, 2^1 + 1 \,.\, 2^0 = 53$
e) $10\,101\,010 = 1 \,.\, 2^7 + 0 \,.\, 2^6 + 1 \,.\, 2^5 + 0 \,.\, 2^4 + 1 \,.\, 2^3 + 0 \,.\, 2^2 + 1 \,.\, 2^1 + 0 \,.\, 2^0 = 170$

(Un dato interesante es que todo número *par* termina en *cero*, y todo número *impar* termina en *uno).*

Creo que a esta altura está claro qué hace uno para "descubrir" de qué número se trata en la escritura "decimal", cuando uno lo tiene escrito en "forma binaria" (se llama binaria, porque se usan sólo dos dígitos: 0 y 1).

Lo que importa también es advertir que como uno usa "sólo" los dígitos 0 y 1 que multiplican a las potencias de dos, pueden pasar sólo dos cosas: o que esa potencia *esté* o que *no esté* involucrada en la escritura del número.

Por ejemplo, en la escritura del número 6 (110), las potencias que están involucradas son 2^2 y 2^1 ya que 2^0 que antecede a 2^1 dice que esa potencia no aparece.

Justamente, éste es el "secreto" que permite resolver el enigma de las "cartas binarias" que aparecen en el apéndice del libro. Es decir: uno le pide a una persona que elija un número cualquiera entre 0 y 255. Y le pide también que no se lo diga: que sólo lo piense. Le da entonces las cartas binarias que acompañan al libro. Y le dice: "¿en cuáles de estas cartas figura el número que elegiste?".

La persona va mirando en cada carta y selecciona lo que le pidieron. Por ejemplo, si eligió el número 170 entrega las cartas que en *el tope superior izquierdo* tienen los siguientes números: 128, 32, 8 y 2.

Si uno suma estos números, obtiene el número 170. Y lo consigue *sin que la persona le hubiera confiado el número*. ¡Es la forma de descubrirlo!

¿Por qué funciona el método? Porque la persona, al elegir las cartas en donde figura el número, le está diciendo a uno (sin que ellos sepan, claro) en dónde están *los unos* en la escritura binaria del número que eligieron.

Por eso, si la persona que eligió mentalmente el número 170, tuviera que escribir el número en notación binaria, habría escrito:

10 101 010

o lo que es lo mismo:

$$10\,101\,010 = 1 \,.\, 2^7 + 0 \,.\, 2^6 + 1 \,.\, 2^5 + 0 \,.\, 2^4 + 1 \,.\, 2^3 + 0 \,.\, 2^2 + 1 \,.\, 2^1 + 0 \,.\, 2^0 = 170$$

Y por eso, al elegir las cartas, es lo mismo que si estuviera "eligiendo" los "unos". Las cartas que "no le entrega" son las cartas que *contienen los ceros*.

Por último, ¿cómo hacer para saber cómo escribir un número cualquiera en forma binaria? Por ejemplo: si yo tengo el número 143, ¿cuál es la escritura? (es importante aprender a resolver este problema, porque si no habría que empezar la lista número por número hasta llegar al 143).

Lo que se hace es *dividir el número 143 por 2. Y al resultado volver a dividirlo por 2. Y seguir así, hasta el cociente que se obtenga, sea 0 o 1.*

En este caso entonces:

143 = 71 . 2 + 1

O sea, acá el cociente es 71 y *el resto es 1.*

Seguimos. Ahora dividimos al 71 por 2.

71 = 35 . 2 + 1

El cociente, acá, es 35. Y el resto, es 1. Dividimos 35 por 2.

35 = 17 . 2 + 1 (cociente 17, resto 1)
17 = 8 . 2 + 1 (cociente 8, resto 1)
8 = 4 . 2 + 0 (cociente 4, resto 0)
4 = 2 . 2 + 0 (cociente 2, resto 0)
2 = 1 . 2 + 0 (cociente 1, resto 0)
1 = 0 . 2 + 1 (cociente 0, resto 1)

Y aquí termina la historia. Lo que uno hace es juntar todos los restos que obtuvo y ponerlos todos juntos, de abajo hacia arriba:

10 001 111

$$1 . 2^7 + 0 . 2^6 + 0 . 2^5 + 0 . 2^4 + 1 . 2^3 + 1 . 2^2 + 1 . 2^1 + 1 . 2^0 = 128 + 8 + 4 + 2 + 1 = 143$$

Ahora, les sugiero que practiquen ustedes con otros números. Yo voy a poner sólo un par de ejemplos más:

82 = 41 . 2 + 0
41 = 20 . 2 + 1
20 = 10 . 2 + 0
10 = 5 . 2 + 0
5 = 2 . 2 + 1
2 = 1 . 2 + 0
1 = 0 . 2 + 1

Luego,

82 = 1 010 010 = $1 . 2^6 + 0 . 2^5 + 1 . 2^4 + 0 . 2^3 + 0 . 2^2 + 1 . 2^1 + 0 . 2^0$ = 64 + 16 + 2 (y el número lo obtuvimos escribiendo de abajo arriba, los restos de las divisiones. Insisto en invitarlos a hacer las cuentas y convencerse de que esto es cierto (y mucho más interesante aún es convencerse de que esto es cierto independientemente del número que elijamos).

Un último ejemplo:

1.357 = 678 . 2 + 1
678 = 339 . 2 + 0
339 = 169 . 2 + 1
169 = 84 . 2 + 1
84 = 42 . 2 + 0
42 = 21 . 2 + 0
21 = 10 . 2 + 1
10 = 5 . 2 + 0
5 = 2 . 2 + 1
2 = 1 . 2 + 0
1 = 0 . 2 + 1

Luego, el número que buscamos es:

10 101 001 101

Lo que significa:

$$1 \,.\, 2^{10} + 0 \,.\, 2^9 + 1 \,.\, 2^8 + 0 \,.\, 2^7 + 1 \,.\, 2^6 + 0 \,.\, 2^5 + 0 \,.\, 2^4 + 1 \,.\, 2^3 + 1 \,.\, 2^2 + 0 \,.\, 2^1 + 1 \,.\, 2^0 = 1.024 + 256 + 64 + 8 + 4 + 1 = 1.357$$

La raíz cuadrada de 2 es un número irracional

Cuando Pitágoras y su gente (hayan existido o no) descubrieron el famoso teorema (el de Pitágoras, digo), tropezaron con un problema... Supongamos que uno tiene un triángulo rectángulo cuyos dos catetos miden *uno*. (Aquí podríamos poner *un metro* o *un centímetro* o *una unidad*, para que la abstracción no sea tan grande).

Entonces, si cada cateto mide *uno*, la hipotenusa* tiene que medir $\sqrt{2}$. Este número presentó inmediatamente un problema. Para entenderlo, pongámonos de acuerdo en un par de puntos:

a) Un número x se llama *racional* si resulta ser el *cociente entre dos números enteros*.

O sea, $x = p/q$,

donde p y q son números enteros, y además debe cumplirse que $q \neq 0$.

Ejemplos:

I) 1,5 es un número racional, porque 1,5 = 3/2
II) 7,6666666... es racional porque 7,6666666... = 23/3
III) 5 es un número racional, porque 5 = 5/1

* Se llama *hipotenusa* de un triángulo rectángulo, al lado de mayor longitud. A los otros dos lados se los llama *catetos*.

En particular, este último ejemplo sugiere que *todo número entero es racional*. Y este resultado es cierto, ya que cualquier número entero se puede escribir como el cociente entre él mismo y *1*.

Hasta ese momento, o sea, en el momento en que Pitágoras demostró su teorema, los *únicos números que se conocían eran los racionales*. El propósito de este subcapítulo es, justamente, introducir el problema con el que tropezaron los pitagóricos.

Un paso más. Para pensar: si un número es par, ¿será verdad que su cuadrado es par?

Como siempre, hago una pausa (virtual) para dejarlos solos con su mente (o un lápiz y papel). En todo caso, yo sigo aquí, porque no los puedo esperar mucho tiempo, pero ustedes vuelvan cuando quieran...

La respuesta es sí. ¿Por qué? Porque si un número x es par, eso significa que x se puede escribir de esta forma:

$$x = 2 \,.\, n$$

(donde n es un número entero también).

Entonces, si elevamos a x al cuadrado, se tiene:

$$x^2 = 4 \,.\, n^2 = 2\,(2 \,.\, n^2)$$

Y esto significa que x^2 es un número par también.

Ahora, al revés: ¿será verdad que si x^2 es par, entonces x tiene que ser par? Veamos: si x no fuera par, entonces, sería impar. En ese caso, x se tendría que escribir así:

$$x = 2k + 1$$

donde k es cualquier número natural.

Pero entonces, al elevarlo al cuadrado, *no puede ser par tampoco, ya que*

$$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4m + 1$$
(en donde llamé $m = k^2 + k$).
Luego, si $x^2 = 4m + 1$, entonces x^2 es un número *impar*.

LA MORALEJA es que si el cuadrado de un número es par, es porque el número ya era par.

Con todos estos datos, ahora estamos en condiciones de abordar el problema que se les planteó a los pitagóricos. ¿Será verdad que el número $\sqrt{2}$ es racional también? Insisto: piensen que, en aquel momento, los *únicos números que se conocían eran los racionales*. Por lo tanto, era natural que uno *tratara de probar* que cualquier número con el que tropezaba *fuera racional*. Es decir: si en esa época los únicos números que se conocían eran los *racionales*, era razonable que trataran de encontrarle una *escritura como p/q* a cualquier número *nuevo* que apareciera.

Supongamos, entonces (como hicieron los griegos) que $\sqrt{2}$ es un número racional. Si es así, entonces, tienen que existir dos números enteros *p* y *q*, de manera tal que

$$\sqrt{2} = (p/q).$$

Al escribir (*p/q*), suponemos ya que hemos "simplificado" los factores comunes que puedan tener *p* y *q*. En particular, suponemos que *ambos no son pares*, ya que si lo fueran, simplificaríamos la fracción y eliminaríamos el *factor dos tanto en el numerador como en el denominador*. O sea: podemos suponer que o bien *p* o bien *q* no son pares.

Luego, elevando al cuadrado ambos miembros, tenemos:

$$2 = (p/q)^2 = p^2/q^2$$

y si ahora "pasamos multiplicando" el denominador del segundo miembro al primer miembro, se tiene:

$$2 \,.\, q^2 = p^2 \qquad (*)$$

Luego, la ecuación (*) dice que el número p^2 es un número par (ya que se escribe como el producto de 2 *por* un entero).

Como vimos un poco más arriba, si el número p^2 es par, es porque el propio número *p* es un número par. Entonces, el número *p*, como es un número par, se puede escribir así:

$$p = 2k$$

Al elevarlo al cuadrado, se tiene:

$$p^2 = 4k^2$$

Reemplazando en la ecuación (*), se tiene:

$$2q^2 = p^2 = 4k^2$$

y simplificando por 2 en ambos lados,

$$q^2 = 2k^2$$

Por lo tanto, el número q^2 es par también. Pero ya vimos que si q^2 es par, es porque el número *q* es par. Y en ese caso, juntando lo que hemos demostrado, resultaría que *tanto p como q serían pares*. Y eso no es posible, porque habíamos supuesto que si fuera así, los habríamos simplificado.

MORALEJA: el número $\sqrt{2}$ *no es racional*. Y eso abrió un campo nuevo, inexplorado y muy fructífero: el de los números *irracionales*. Juntos, los racionales y los irracionales componen el conjunto de números reales. Son todos los números que necesitamos para medir en nuestra vida cotidiana. (Nota: no todos los números irracionales son tan fáciles de *fabricar* como $\sqrt{2}$. En realidad, si bien $\sqrt{2}$ y π son ambos números irracionales, son *esen-*

cialmente bien distintos por razones que escapan al objetivo de este libro. El primero, $\sqrt{2}$, pertenece al conjunto de los "números algebraicos", mientras que π pertenece al de los "números trascendentes").

Suma de cinco números

Cada vez que estoy con un grupo de jóvenes (y no tan jóvenes) y los quiero sorprender con un juego con números, siempre utilizo el siguiente. Voy a hacerlo aquí con un ejemplo, pero después vamos a analizar cómo hacerlo en general y por qué funciona.

Les pido a mis interlocutores que me den un número de cinco dígitos. Digamos 12.345 (aunque los invito a que ustedes, mientras leen, hagan otro ejemplo al mismo tiempo). Entonces anoto *12.345* y les digo que en la parte de atrás del papel (o en otro papel), voy a anotar el resultado de una "suma". Naturalmente, las personas se ven sorprendidas porque no entienden de qué "suma" les estoy hablando si hasta acá sólo me han dado un número.

Les digo que tengan paciencia, y que lo que yo voy a hacer es anotar (como queda dicho en la parte de atrás del papel) otro número que va a ser el resultado de una suma, cuyos sumandos *aún no conocemos*, salvo uno: el 12.345.

En la parte de atrás anoto el siguiente número:

212.343

Ustedes se preguntarán por qué anoto ese número. Se trata de agregar un 2 al principio del número y restarle dos al final.

Por ejemplo, si habían elegido 34.710, el número que anotarán detrás será 23.4708. Una vez hecho esto, pido nuevamente al interlocutor que me dé otro número. Como ejemplo, digamos

73.590

Entonces, ya tenemos dos números que van a formar parte de nuestra "suma". El original, 12.345 y este segundo número 73.590.

Para seguir, les pido otro número de cinco dígitos. Por ejemplo

43.099

Entonces, tenemos ya tres números de cinco dígitos cada uno, que serán tres de los cinco sumandos:

12.345
73.590
43.099

Una vez llegado a este punto, rápidamente anoto encolumnados otros dos números:

26.409

y

56.900

¿De dónde saqué estos números?

Hice así: teniendo en cuenta el 73.590, agrego abajo lo que hace falta para que sume 99.999. O sea, abajo del número 7 un número 2, abajo del 3, un 6. Abajo del 5 un 4, abajo del 9 un 0 y abajo del 0, un 9.

$$\begin{array}{r} 73.590 \\ +\ \underline{26.409} \\ 99.999 \end{array}$$

De la misma forma, teniendo en cuenta el otro número que me dieron, 43.099, el número que hay que poner es el que haga falta para que la suma dé otra vez 99.999. En este caso, el número será 56.900.

Es decir:

56.900
+ 43.099
99.999

Resumiendo todo lo que hicimos, tenemos ahora *cinco números de cinco dígitos cada uno.* Los tres primeros corresponden a números que nos dio nuestro interlocutor:

12.345, 73.590 y 56.900

Con el primero, fabriqué “la suma total” (y escribí detrás del papel, 212.343) y con los otros dos, construí *otros dos números de cinco dígitos* (en este caso, 26.409 y 43.099), de manera tal de garantizar que la suma con cada uno dé 99.999. Ahora, muy tranquilo, invito al interlocutor a que “haga la suma”.

Y los invito a *ustedes* a que la hagan:

12.345
73.590
56.900
26.409
43.099
212.343

Es decir, *uno obtiene el número que había escrito en la parte de atrás del papel.*

Los pasos son los siguientes:

a) Usted primero pide un número de cinco dígitos (43.871).
b) Luego escribe detrás del papel otro número (ahora de seis dígitos) que resulta de agregarle al anterior un número 2 al principio y restar dos (243.869).
c) Pide dos números de cinco dígitos más (35.902 y 71.388).

d) Agrega rápido dos números que sumen con los dos anteriores 99.999 (64.097 y 28.611).
e) Invita a que la persona que tiene adelante haga la suma… ¡Y da!

Ahora bien, ¿por qué da?

Ésta es la parte más interesante. Fíjense que al número inicial que la persona nos dio usted le agrega un 2 adelante y le resta dos, como si estuviéramos sumándole al número 200.000 y luego le restáramos dos. O sea, sería como sumarle (200.000 - 2).

Cuando la persona nos da los otros dos números que completamos hasta que lleguen a sumar 99.999, pensamos que 99.999 es exactamente (100.000 - 1). Pero como usted hace esto *dos veces,* al sumar (100.000 - 1) dos veces, se tiene (200.000 – 2).

¡Y eso es exactamente lo que hicimos! Agregarle al número original (200.000 – 2). Por eso da: porque lo que termina haciendo uno es sumar dos veces (100.000 - 1) o, lo que es lo mismo, (200.000 - 2).

¿Un atentado contra el teorema fundamental de la aritmética?

El teorema fundamental de la aritmética dice que todo número entero (diferente de +1, -1 o 0) o bien es primo o bien se puede descomponer como el producto de números primos.

Ejemplos:

a) 14 = 2 . 7
b) 25 = 5 . 5
c) 18 = 2 . 3 . 3
d) 100 = 2 . 2 . 5 . 5
e) 11 = 11 (ya que 11 es primo)
f) 1.000 = 2 . 2 . 2 . 5 . 5 . 5
g) 73 = 73 (ya que 73 es primo)

Es más: el teorema dice que la *descomposición en primos es única,* salvo el orden en que se escriben (algo así como que el orden de los factores no altera el producto). Sin embargo, tengo algo para proponer. Observen el número 1.001, que se puede escribir de estas dos maneras:

1.001 = 7 . 143

y también

1.001 = 11 . 91

¿Qué es lo que funciona mal? ¿Es que acaso falla el teorema?

La respuesta se encuentra en la página de soluciones.

Infinitos números primos

Ya sabemos lo que son los números primos. Sin embargo, conviene recordar un pasaje de la obra *El burgués gentilhombre*, de Molière, en el que el protagonista, cuando se le pregunta si sabe algo en particular, contesta: "Haced como si no lo supiera y explicádmelo". Así que para partir de un conocimiento común, comenzaremos por algunas definiciones.

En este capítulo, vamos a usar sólo los *números naturales (o enteros positivos).* No quiero dar aquí una definición rigurosa, pero sí ponernos de acuerdo acerca de qué números estoy hablando:

N = {1, 2, 3, 4, 5, 6,..., 100, 101, 102,...,}

Excluyamos al número 1 de las consideraciones que siguen, pero como ustedes pueden comprobar fácilmente, cualquier otro

número tiene *siempre por lo menos dos divisores: sí mismo y 1. (Un número es divisor* de otro, si lo *divide exactamente. O sea, si al dividir uno por otro, no tiene resto o lo que es lo mismo: el resto es cero.)*

Por ejemplo:

El 2 es divisible por 1 y por sí mismo (el 2),
El 3 es divisible por 1 y por sí mismo (el 3),
El 4 es divisible por 1, por 2 y por sí mismo (el 4),
El 5 es divisible por 1 y por sí mismo (el 5),
El 6 es divisible por 1, por 2, por 3 y por sí mismo (el 6),
El 7 es divisible por 1 y por sí mismo (el 7),
El 8 es divisible por 1, por 2, por 4 y por sí mismo (el 8),
El 9 es divisible por 1, por 3 y por sí mismo (el 9),
El 10 es divisible por 1, por 2, por 5 y por sí mismo (el 10).

Uno podría seguir con esta lista indefinidamente. Con todo, revisando lo que pasa con los primeros naturales, uno detecta un patrón: *todos son divisibles por el 1 y por sí mismos. Puede que tengan más divisores, pero siempre tienen por lo menos dos.* Quiero agregar aquí un par de ejemplos más, para invitarlo a pensar en una definición. Observen:

El 11 es divisible solamente por 1 y por sí mismo.
El 13 es divisible solamente por 1 y por sí mismo.
El 17 es divisible solamente por 1 y por sí mismo.
El 19 es divisible solamente por 1 y por sí mismo.
El 23 es divisible solamente por 1 y por sí mismo.
El 29 es divisible solamente por 1 y por sí mismo.
El 31 es divisible solamente por 1 y por sí mismo.

¿Advierten un patrón en todos estos ejemplos? ¿Qué les sugiere que el 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 tengan *únicamente dos divisores mientras que el resto de los números tengan más* *de dos?* Una vez que tienen esa respuesta (y si no la tienen, también) escribo una definición:

Un número natural (distinto de 1) se dice que es un número primo si y sólo si tiene *exactamente dos divisores: el 1 y él mismo.*

Como se ve, pretendo aislar a un grupo de números porque tienen una característica muy especial: son divisibles por sólo dos números, ellos mismos y el número uno.

Ahora escribamos en una lista los que aparecen entre los primeros cien números naturales:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Hay 25 primos entre los primeros cien números.
Hay 21, entre 101 y 200.
Hay 16, entre 201 y 300.
Hay 16, entre 301 y 400.
Hay 17, entre 401 y 500.
Hay 14, entre 501 y 600.
Hay 16, entre 601 y 700.
Hay 14, entre 701 y 800.
Hay 15, entre 801 y 900.
Hay 14, entre 901 y 1.000.

Es decir, hay 168 en los primeros mil números. Si uno se fija en cualquier "tablita" de números primos, la secuencia empieza a hacerse más "fina". Es decir, hay 123 primos entre 1.001 y 2.000, 127 entre 2.001 y 3.000, 120 entre 3.001 y 4.000. Y así podríamos seguir. Aunque surgen algunas preguntas... muchas preguntas. Por ejemplo:

a) ¿Cuántos primos hay?
b) ¿Se acaban en algún momento?
c) Y si no se acaban, ¿cómo encontrarlos todos?

d) ¿Hay alguna fórmula que *produzca* primos?
e) ¿Cómo están distribuidos?
f) Si bien uno *sabe* que no puede haber primos consecutivos, salvo el 2 y el 3, ¿cuántos números consecutivos podemos encontrar sin que aparezca ningún primo?
g) ¿Qué es una laguna de primos?
h) ¿Qué son los *primos gemelos*? (la respuesta estará en el capítulo siguiente).

En este libro sólo me propongo responder algunas, pero lo mejor que podría pasar es que quien esté leyendo estas notas sienta la suficiente curiosidad como para ponerse a pensar algunas de las respuestas o bien a buscar en los diferentes libros del área (Teoría de Números) qué es lo que se sabe de ellos al día de hoy y qué problemas permanecen abiertos.

El objetivo es exhibir ahora una *prueba* de que los números primos son infinitos. Es decir, que la lista no termina nunca. Supongamos que no fuera así. O sea, supongamos que al tratar de "listarlos", se agotan en algún momento.

Los llamaremos entonces

$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, \ldots, p_n$

de manera tal que ya estén ordenados en forma creciente.

$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 < \ldots < p_n$

En nuestro caso sería como poner:

$2 < 3 < 5 < 7 < 11 < 13 < 17 < 19 < \ldots < p_n$

Es decir, estamos suponiendo que hay *n* números primos. Y además, que p_n es el más grande de todos. Está claro que si sólo hay un número finito de números primos, tiene que haber uno que sea el más grande de todos. Es decir: si uno tiene un conjunto finito de números, uno de ellos tiene que ser el más grande de todos. No podríamos decir lo mismo si el conjunto fuera infinito, pero en este caso, como estamos suponiendo que hay sólo finitos primos, uno de ellos tiene que ser el mayor, el más grande. A ese número lo llamamos p_n.

Vamos a fabricar ahora un número que llamaremos **N**.

$$\mathbf{N} = (p_1 \,.\, p_2 \,.\, p_3 \,.\, p_4 \,.\, p_5 \ldots\, p_n\,) + 1$$ [4]

Por ejemplo, si *todos* los números primos fueran:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,

entonces, el nuevo número **N** sería:

2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19 + 1 = 9.699.691

Ahora bien. Como este número **N** es mayor que el *más grande* de todos los primos,[5] es decir, es mayor que p_n, entonces, no puede ser un número primo (ya que hemos supuesto que p_n es el *mayor* de todos).

Luego, como **N** no puede ser primo, tiene que ser *divisible* por un primo.[6] Por lo tanto, como todos los primos son

[4] Al símbolo . lo usaremos para representar "multiplicación" o "producto".
[5] Para convencerse de esto, observe que $N > p_n 2 + 1$, y esto es suficiente para lo que queremos probar.
[6] En realidad, haría falta una demostración de este hecho, pensemos que si un número *no es primo* es porque tiene más divisores que uno y él mismo. Este divisor que tiene es un número menor que el número y mayor que uno. Si este divisor es primo, el problema está resuelto. Si en cambio este divisor no es primo, repetimos el proceso. Y como cada vez vamos obteniendo divisores cada vez más chicos, llegará un momento (y esto es lo que prueba una demostración más formal) en que el proceso se agote. Y ese número al cual uno llega es el *número primo que estamos buscando.*

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ \ldots,\ p_n$$

entonces, alguno de ellos, digamos el p_k tiene que dividirlo. O lo que es lo mismo, **N** tiene que ser *múltiplo* de p_k.

Esto quiere decir que

$$\mathbf{N} = p_k \,.\, A$$

Ahora, como el número (p_1 . p_2 . p_3 . p_4 . p_5... p_n) es también múltiplo de p_k, llegaríamos a la conclusión de que tanto **N** como (**N** – 1) son múltiplos de p_k. Y eso es imposible. Dos números consecutivos no pueden ser nunca múltiplos de un mismo número (salvo del uno).

Ahora miremos en un ejemplo cómo sería esta demostración. Supongamos que la lista de primos (que suponemos es finita) fuera la siguiente:

$$2 < 3 < 5 < 7 < 11 < 13 < 17 < 19$$

O sea, estaríamos suponiendo que 19 es el primo más grande que se puede encontrar. En ese caso, fabricamos el siguiente número **N**:

N = 2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19 + 1 = 9.699.691

Por otro lado, el número

(2 . 3 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19) = 9.699.690 = N – 1.

El número **N** = 9.699.691 no podría ser primo, porque estamos suponiendo que el más grande de todos es el número 19. Luego, este número **N** tiene que ser divisible por un primo. Ahora bien, este primo debería ser uno de los que conocemos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y/o 19. Elijamos uno cualquiera para poder seguir con el argumento (aunque ustedes, si quieren, comprueben que es falso… ninguno de ellos divide a **N**). Supongamos que 7 es el número que divide a **N**.[7] Por otro lado, el número (**N** – 1) es obviamente múltiplo de 7 también.

Entonces tendríamos dos números consecutivos, (**N** – 1) y **N**, que serían ambos múltiplos de 7, lo que es imposible. Por lo tanto, esto demuestra que es falso suponer que hay un número primo que es mayor que todos[8] y concluye la demostración.

Primos gemelos

Sabemos que no puede haber primos consecutivos, salvo el par {2, 3}. Esto resulta obvio si uno piensa que en cualquier par de números consecutivos, uno de ellos será par. Y el único *primo par* es el *2*. Luego, el único par de primos consecutivos es el {2, 3}.

Ahora bien: si bien uno sabe que no va a encontrar primos consecutivos, ¿qué pasa si uno se saltea uno? Es decir, ¿hay dos impares consecutivos que sean primos? Por ejemplo, los pares {3, 5}, {5, 7}, {11, 13}, {17, 19} son primos, y son dos impares consecutivos.

Justamente, se llama *primos gemelos* a dos números primos que difieren en *dos unidades*, como en los ejemplos que acabamos de ver. O sea, son de la forma {p, p+2}.

El primero en llamarlos “primos gemelos” fue Paul Stackel (1892-1919), tal como aparece en la bibliografía que publicó Tietze en 1965.

[7] Haber elegido el número 7 como divisor del número N es sólo para poder invitarlos a pensar cómo es el argumento que se usa, pero claramente hubiera funcionado con cualquier otro.

[8] Esto que hemos hecho suponiendo que 19 era el primo más grande fue sólo como un ejemplo que debería servir para entender el razonamiento general que está expuesto más arriba, en donde el número primo p_n es el que hace el papel del 19.

Más pares de primos gemelos:

{29, 31}, {41, 43}, {59, 61}, {71, 73}, {101, 103}, {107, 109}, {137, 139}, {149, 151}, {179, 181}, {191, 193}, {197, 199}, {227, 229}, {239, 241}, {281, 283}…

La conjetura es que hay *infinitos primos gemelos*. Pero hasta hoy, agosto de 2005, todavía no se sabe si es cierto.

El par de primos gemelos más grande que se conoce hasta hoy es

$$(33.218.925)\ .\ 2^{169.690} - 1$$

y

$$(33.218.925)\ .\ 2^{169.690} + 1$$

Son números que tienen 51.090 dígitos y fueron descubiertos en el año 2002. Hay muchísimo material escrito sobre este tema, pero aún hoy la conjetura de la infinitud de primos gemelos sigue sin solución.

Lagunas de primos

Uno de los problemas más interesantes de la matemática es tratar de descubrir un *patrón* en la distribución de los números primos.

Es decir: ya sabemos que son infinitos. Ya vimos también qué son los *primos gemelos*. Miremos ahora los primeros cien números naturales. En este grupo hay 25 que son primos (aparecen en bastardilla). Es fácil encontrar *tres números consecutivos que no sean primos*: 20, 21, 22. Hay más en la lista, pero no importa. Busquemos ahora una tira de *cuatro números con-*

secutivos que no sean primos: 24, 25, 26, 27 sirven (aunque todavía está el 28 para agregar a la lista). Y así siguiendo, uno puede encontrar "tiras" de números (consecutivos) de manera tal que sean "no primos" o "compuestos".

2, 3, 4, *5,* 6, *7*, 8, 9, 10, *11*,12, *13*, 14,15, 16, *17*, 18, *19*, 20, 21, 22, *23*, 24, 25, 26, 27, 28, *29*, 30, *31*, 32, 33, 34, 35, 36, *37*, 38, 39, 40, *41*, 42, *43*, 44, 45, 46, *47*, 48, 49, 50, 51, 52, *53*, 54, 55, 56, 57, 58, *59*, 60, *61*, 62, 63, 64, 65, 66, *67*, 68, 69, 70, *71*, 72, *73*, 74, 75, 76, 77, 78, *79*, 80, 81, 82, *83*, 84, 85, 86, 87, 88, *89*, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, *97*, 98, 99, 100.

La pregunta es: las tiras, ¿pueden tener cualquier longitud? Es decir: si yo quiero encontrar diez números consecutivos tal que ninguno sea primo, ¿la podré encontrar? ¿Y si quiero encontrar cien seguidos, todos compuestos? ¿Y mil?

Lo que quiero tratar de contestar es que, en verdad, uno puede "fabricarse" tiras de números consecutivos *tan grande como uno quiera,* de manera que *ninguno de ellos sea un número primo.* Este hecho es bastante singular, teniendo en cuenta que el número de primos es infinito. Sin embargo, veamos cómo hacer para demostrarlo.

Primero, quiero dar aquí una notación que es muy útil y muy usada en matemática: se llama *factorial* de un número *n, y se escribe n!,* al producto de *todos los números menores o iguales que n.*

Por ejemplo:

1! = 1 (y se lee, *el factorial de 1 es igual a 1)*
2! = 2 . 1 = 2 *(el factorial de 2 es igual a 2)*
3! = 3 . 2 . 1 = 6 *(el factorial de 3 es igual a 6)*
4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24
5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120
6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720

10! = 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1= 3.628.800

Como se ve, el factorial va aumentando muy rápidamente.

En general,

n! = n . (n-1) . (n-2) . (n-3)... 4 . 3 . 2 . 1

Aunque parezca que esta definición es arbitraria y no se entienda muy claramente su utilidad, definir *el factorial de un número* es una necesidad para atacar *cualquier problema de combinatoria,* o sea, cualquier problema que involucre contar. Pero, una vez más, eso escapa al objeto de este libro.

Ahora bien: es bueno notar (e importante que ustedes lo piensen) que el factorial de un número *n* es, en realidad, *un múltiplo* de *n y de todos los números que lo preceden.*

Es decir:

3! = 3 . 2, es un múltiplo de 3 y de 2
4! = 4 . 3 . 2, es un múltiplo de 4, como de 3, como de 2
5! = 5 . 4 . 3 . 2 = es un múltiplo de 5, de 4, de 3 y de 2.

Luego,

n! es un múltiplo de n, (n-1), (n-2), (n-3),..., 4, 3 y de 2.

Una última cosa antes de atacar el problema de las "tiras" de números *compuestos* o "no primos". Si dos números son pares, su suma es par. O sea, si dos números son múltiplos de 2, la suma también. Si dos números son múltiplos de 3, la suma también. Si dos números son múltiplos de 4, la suma también. ¿Descubren la idea general?

Si dos números son múltiplos de k, entonces la suma es también múltiplo de k (para cualquier k) (les propongo que hagan ustedes la demostración, que es muy fácil).

Resumo:

a) el factorial de n (o sea, n!) es múltiplo del número n y de todos los números menores que n;

b) si dos números son múltiplos de k, entonces la suma también.

Con estos dos datos, vamos a la carga.

Como entrenamiento, voy a hacer algunos ejemplos con la idea de que quien esté leyendo esto sienta que puede "conjeturar" la forma de hacerlo en general.

Busquemos, sin necesidad de mirar en la tabla de los primos y "no primos" o compuestos, tres números compuestos consecutivos:

$$\begin{array}{l} 4! + 2 \\ 4! + 3 \\ 4! + 4 \end{array} \qquad (*)$$

Estos tres números son consecutivos. Ahora *descubramos que, además, son compuestos*. Miremos el primero: 4! + 2. El primer sumando, 4! es múltiplo de 2 (por la parte a). Por el otro lado, el segundo sumando, 2, es obviamente múltiplo de 2. Luego, por la parte b), la suma de los dos números (4! + 2) es múltiplo de 2.

El número 4! + 3 está compuesto de dos sumandos. El primero, 4!, por la parte a), es múltiplo de 3. Y el segundo sumando, 3, es también múltiplo de 3. Por la parte b) entonces, la suma (4! + 3) es múltiplo de 3.

El número 4! + 4 está compuesto también por dos sumandos. El primero, 4! por la parte a), es múltiplo de 4. Y el segundo sumando, 4, es también múltiplo de 4. Por la parte b) entonces, la suma (4! + 4) es múltiplo de 4.

En definitiva, los tres números que aparecen en (*) son consecutivos y ninguno de los tres puede ser primo, porque el primero es múltiplo de 2, el segundo de 3 y el tercero de 4.

Con la misma idea, construyamos ahora diez números *consecutivos* que no sean primos, o bien construyamos diez números *consecutivos* que sean compuestos.

Entonces procedemos así:

11! + 2 (es múltiplo de 2)
11! + 3 (es múltiplo de 3)
11! + 4 (es múltiplo de 4)
11! + 5 (es múltiplo de 5)
11! + 6 (es múltiplo de 6)
11! + 7 (es múltiplo de 7)
11! + 8 (es múltiplo de 8)
11! + 9 (es múltiplo de 9)
11! + 10 (es múltiplo de 10)
11! + 11 (es múltiplo de 11)

Estos diez números son consecutivos y compuestos. Luego, cumplen con lo pedido. Si ahora yo les pidiera que ustedes fabricaran cien números consecutivos compuestos, ¿lo podrían hacer? Yo estoy seguro de que sí, siguiendo la idea de los dos ejemplos anteriores.[9]

En general, si uno tiene que fabricar *n* números consecutivos compuestos, hace lo siguiente:

[9] Ayuda: el primero sería, por ejemplo, 101! + 2. Luego, 101! + 3, 101! + 4,…, 101! + 99, 101! + 100 y 101! + 101. Por supuesto, éstos son números consecutivos. ¿Cuántos son? Hagan la prueba y averígüenlo. Además, son todos compuestos –o no primos– ya que el primero es múltiplo de 2, el segundo es múltiplo de 3, el tercero es múltiplo de 4… y así siguiendo. El último es múltiplo de 101.

(n+1)! + 2
(n+1)! + 3
(n+1)! + 4
(n+1)! + 5
…
(n+1)! + n
(n+1)! + (n+1)

Estos números son *n* (y les pido que los cuenten, háganme caso, porque no los veo muy convencidos…) y son consecutivos; además, el primero es múltiplo de 2, el siguiente de 3, el siguiente de 4, y así siguiendo, hasta el último que es múltiplo de (n+1).

Es decir, esta lista cumple con lo que queríamos: hemos encontrado *n números consecutivos compuestos.*

MORALEJA: esto demuestra que si uno empieza a trabajar con números grandes, muy grandes, aparecen muchos muchos (y no hay error de imprenta… son muchos en serio) números compuestos. Pero, a la vez, esto dice que se pueden encontrar *lagunas* de primos. O sea, una laguna es un segmento de los números naturales en donde *no hay ningún primo.*

Creo que después de la explicación de más arriba, ustedes están en condiciones de aceptar cualquier desafío de encontrar lagunas (tan grandes como les sean propuestas).

El número *e*

Quiero plantear aquí un problema que tiene que ver con poner dinero en un banco que rinda un determinado interés.

Para hacer la exposición más clara, voy a tomar un ejemplo. Vamos a suponer que una persona tiene un capital de un peso. Y vamos a suponer también que el interés que le pagan anualmente por ese peso es del 100%. Ya sé… con este interés, uno sabe que el banco se funde antes de empezar y que el ejemplo está condenado al fracaso. Pero igualmente, síganme que es interesante.

Capital: 1 peso
Interés: 100% anual

Si uno hace la inversión en el banco y se va a su casa, ¿cuánto dinero tiene cuando vuelve justo al año? Claro, como el interés es del 100%, al año el señor tiene dos pesos: uno que corresponde a su capital y otro que es producto del interés que le pagó el banco. Hasta acá, todo claro:

Capital al cabo de un año: 2 pesos

Supongamos ahora que el señor decide poner su dinero no a un año, sino sólo a seis meses. El interés (a lo largo de todo este ejemplo) permanecerá constante: siempre será de un 100%. Al cabo de seis meses entonces, el señor ¿cuánto dinero tiene? ¿Está claro que tiene 1,5 pesos?

Esto es porque el capital permanece intocable: sigue siendo un peso. En cambio, como el interés es del 100% pero sólo dejó el dinero invertido la mitad del año, le corresponde un interés de la mitad de lo que invirtió y, por eso, le corresponden $ 0,50 de interés. Es decir, su nuevo capital es de $ 1,5.

Si ahora el señor decide *reinvertir su nuevo capital en el mismo banco, con el mismo interés (100%) y por otros seis meses* de manera de llegar nuevamente al año como antes, ¿cuánto dinero tiene ahora?

Nuevo capital: 1,5
Interés: 100% anual
Plazo que lo deposita: 6 meses

Al finalizar el año, el señor tiene

$$1{,}5 + 1/2\ (1{,}5) = 2{,}25$$

¿Por qué? Porque el capital que tenía a los 6 meses iniciales, no se toca: $ 1,5. El nuevo interés que cobra es de la mitad del capital, porque el dinero lo pone a un interés del 100% pero sólo por *seis meses*. Por eso, tiene 1/2 (1,5) = 0,75 como nuevo dinero que le aporta el banco como producto de los intereses devengados.

MORALEJA: al señor le conviene (siempre que el banco se lo permita) depositar el dinero primero a seis meses y luego renovar el plazo fijo a otros seis meses. Si comparamos con lo que le hubiera tocado en el primer caso, al finalizar el año tenía dos pesos. En cambio, reinvirtiendo en la mitad, al cabo de 365 días tiene $ 2,25.

Supongamos ahora que el señor coloca el mismo peso que tenía originalmente, pero ahora por cuatro meses. Al cabo de esos cuatro meses, reinvierte el dinero, pero por otros cuatro meses. Y finalmente, hace una última reinversión (siempre con el mismo capital) hasta concluir en el año. ¿Cuánto dinero tiene ahora?

Yo sé que ustedes pueden seguir leyendo en esta misma página y encontrar la solución, pero siempre es deseable que los lectores hagan un mínimo esfuerzo (si así lo desean) de pensar solos.

De todas maneras, aquí va. Veamos si se entiende.

Al principio del año el señor tiene:

$$1$$

A los cuatro meses (o sea, transcurrido 1/3 del año) tiene:

$$(1 + 1/3)$$

A los siguientes cuatro meses (ocho desde el comienzo) tiene:

$$(1+1/3) + 1/3\ (1+1/3) = (1+1/3)(1+1/3) = (1+1/3)^2$$

(Esto sucede porque a los cuatro meses el capital es de (1+1/3) y al cabo de otros cuatro meses, tendrá el *capital más un tercio de ese capital*. La cuenta que sigue después, $(1+1/3)^2$, se obtiene de “sacar factor común” (1+1/3) en el término de la izquierda en la ecuación.

Ahora bien: cuando el señor invierte $(1+1/3)^2$ por otros cuatro meses, al llegar justo al fin del año, el señor tendrá el capital $(1+1/3)^2$ *más* (1/3) de ese capital. O sea:

$$(1+1/3)^2 + 1/3(1+1/3)^2 = (1+1/3)^2(1+1/3) = (1+1/3)^3 = 2{,}37037037\ldots$$ [10]

Como seguramente advierten, ahora nos queda la tentación de hacerlo no sólo cada cuatro meses, sino cada tres meses. Los invito a que hagan la cuenta ustedes, pero el resultado lo escribo yo. Al cabo de un año, el señor tendrá:

$$(1 + 1/4)^4 = 2{,}44140.625$$

Si lo hiciera cada dos meses, tendría que reinvertir su dinero seis veces en el año:

$$(1 + 1/6)^6 = 2{,}521626372\ldots$$

Si lo hiciera una vez por mes, reinvertiría *doce* veces por año

[10] A partir de ahora, voy a usar los primeros dígitos del desarrollo decimal de cualquier número que aparezca en el texto. En este caso, el número $(1+1/3)^3$ no es igual a 2,37037037, sino que es una aproximación o redondeo que usa los primeros nueve dígitos.

$$(1+1/12)^{12} = 2{,}61303529\ldots$$

Como usted ve, al señor le conviene poner su dinero a plazo fijo, pero hacerlo con un plazo cada vez más corto y reinvertir lo que obtiene (siempre con el mismo interés).

Supongamos que el banco le permitiera al señor renovar su plazo *diariamente.* En este caso, el señor tendría

$$(1+1/365)^{365} = 2{,}714567482\ldots$$

Y si lo hiciera una vez por hora (como en el año hay 8.760 horas), tendría:

$$(1+1/8760)^{8.760} = 2{,}718126692\ldots$$

Y si se le permitiera hacerlo una vez por minuto, como en el año hay 525.600 minutos, su capital resultaría

$$(1+1/525.600)^{525.600} = 2{,}718279243\ldots$$

Y por último, supongamos que le permitieran hacerlo *una vez por segundo.*

En ese caso, como en el año hay 34.536.000 segundos, el capital que tendría al cabo de un año sería:

$$(1+1/34.536.000)^{34.536.000} = 2{,}718281793\ldots$$

MORALEJA: si bien uno advierte que el dinero al finalizar el año es cada vez mayor, sin embargo, *el dinero que uno tiene al final no aumenta indiscriminadamente.*

Voy a hacer un resumen de la lista que hemos escrito recién:

Veces que renueva capital al año su depósito

1 vez al año, 2
2 veces al año, 2,25
3 veces al año (cuatrimestral), 2,37037037…
4 veces al año (trimestral), 2,44140625…
6 veces al año (bimestral), 2,521626372…
12 veces al año (mensual), 2,61303529…
365 veces al año (diario), 2,714567482…
8.760 veces al año (por minuto), 2,718126692…
525.600 veces al año
(una vez por minuto), 2,718279243…
34.536.000 veces al año
(una vez por segundo), 2,718281793…

Lo que es muy interesante es que estos números, si bien crecen cada vez que el interés se cobra más frecuentemente, no lo hacen en forma *ni arbitraria* ni *desbocada.* Al contrario: tienen un tope, están *acotados.* Y la cota superior (es decir, si uno pudiera imaginariamente estar renovándolo instantáneamente) es lo que se conoce como el número *e* (que es la base de los logaritmos naturales, cosa que no importa en este contexto). No sólo es una cota superior, sino que es el número al cual se está acercando cada vez más la sucesión que estamos generando al modificar los plazos de reinversión.

El número *e* es un número *irracional,* cuyas primeras cifras decimales son:

$$e = 2{,}718281828\ldots$$ [11]

[11] Este número tiene un desarrollo decimal infinito y pertenece a la misma categoría que el número π (pi), en el sentido de que, además de irracionales, son números trascendentes (dado que no son la raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros).

El número *e* es uno de los números más importantes de la vida cotidiana, aunque su relevancia está generalmente escondida para el gran público. En algún otro momento y lugar, habría que divulgar mucho más sobre él. Por ahora, nos contentamos con celebrar su aparición en este escenario, mostrándolo como *el límite (y también la cota superior) del crecimiento de un capital de $ 1 a un interés del 100% anual y renovado periódicamente.*

Distintos tipos de infinito

Contar

Un niño, desde muy pequeño, sabe contar. Pero ¿qué quiere decir *contar?* En realidad, dado un conjunto de objetos cualquiera, digamos los discos que alguien tiene en su colección, ¿cómo hace para saber cuántos tiene? La respuesta parece obvia (y en realidad, parece porque lo es). Pero quiero contestarla. La respuesta es: para saber cuántos discos tiene uno en su colección, lo que tiene que hacer es ir y contarlos.

De acuerdo. Es un paso que había que dar. Pero ¿qué quiere decir contar? Van al sitio donde tienen guardados los discos y empiezan: 1, 2, 3,… etcétera.

Pero:

a) Para poder contar se necesita conocer los números (en este caso, los números naturales).
b) Los números que usamos están ordenados, pero a nosotros *el orden no nos interesa.* ¿Se entiende esto? A ustedes sólo les importa saber *cuántos tienen* y no en qué orden está cada uno. Si yo les pidiera que los *ordenaran por preferencia,* entonces sí importaría el orden. Pero para saber cuántos hay, el orden es irrelevante.
c) Ustedes saben que el proceso termina. Es decir, su colección de discos, por más grande que sea, en algún momento se termina.

Ahora supongamos que estamos dentro de un cine. Todavía no ha llegado nadie para presenciar la próxima función. Sabemos que hay mucha gente en la calle haciendo cola y esperando que se abran las puertas.

¿Cómo haríamos para saber si las butacas que tiene el cine alcanzarán para poder sentar a las personas que esperan afuera? O, en todo caso, ¿cómo haríamos para saber si hay más butacas que personas, o más personas que butacas, o si hay la misma cantidad? Evidentemente, la respuesta inmediata que todo el mundo está tentado a dar es: “Vea. Yo cuento las butacas que hay. Después cuento las personas. Y para terminar el proceso, comparo los números”.

Pero eso requiere *contar dos conjuntos.* Es decir: hay que *contar las butacas y luego (o antes) hay que contar las personas.*

¿Es necesario *saber contar* para poder contestar si hay más butacas que personas, o personas que butacas o la misma cantidad? La respuesta que podríamos dar es la siguiente: abramos las puertas del cine, permitamos a la gente que entre y se siente en el lugar que quiera, y cuando el proceso termine, repito, *cuando el proceso termine* (ya que tanto las butacas como las personas *son conjuntos finitos),* nos fijamos si quedan butacas vacías; eso significa que había más butacas que personas. Si hay gente parada sin asiento (no se permite más de un asiento por persona), entonces había más gente que lugar. Y si no sobra ninguna butaca y nadie está parado, eso quiere decir que había el *mismo número de butacas que de personas.* Pero lo notable de esto es que uno puede dar la respuesta sin necesidad de haber contado. Sin necesidad de saber cuál es ni el número de personas ni el número de butacas.

Éste no es un dato menor en este contexto: lo que uno está haciendo es *aparear* a los dos conjuntos. Es como si tuviéramos dos bolsas: una en donde están las personas y otra en donde están las butacas. Y lo que hacemos es trazar “flechitas” que le “asignen” a cada persona una butaca. Sería el equivalente a cuando uno compra una entrada en el cine. Si sobran entradas o si faltan entradas o si hay la misma cantidad, es en realidad una manera de haber trazado las flechitas. Pero lo bueno de este proceso es que no hace falta saber contar.

El segundo paso importante es que cuando yo quiera comparar el número de elementos de dos conjuntos, no necesito saber contar. Lo que tengo que hacer es *aparearlos*, establecer *flechitas* entre uno y otro.

Sólo para ponernos de acuerdo con las notaciones, vamos a llamar *cardinal* de un conjunto A (y lo vamos a *notar* #(A)) al *número de elementos de ese conjunto.*

Por ejemplo,

- (el cardinal del conjunto "jugadores titulares de un equipo de fútbol profesional") = # {jugadores titulares de un equipo de fútbol profesional} = 11,
- (el cardinal del conjunto "presidentes de la nación") = # {presidentes de la nación} = 1,
- (el cardinal del conjunto "universidades nacionales en la argentina") = # {universidades nacionales en la argentina} = 36,
- (el cardinal del conjunto "puntos cardinales") = # {puntos cardinales} = 4.

Como hemos visto, si queremos *comparar los cardinales de dos conjuntos* no hace falta *saber el cardinal de cada uno para saber cuál es el más grande o si son iguales.* Basta con aparear los elementos de cada uno. Debe quedar claro, entonces, que para comparar cardinales uno se *libera* del proceso de contar. Y esto será muy importante cuando tengamos que "generalizar" la noción de contar, justamente.

Una última observación antes de pasar a los conjuntos infinitos. Los números naturales son los conocidos e hipermencionados en este libro:

N = {1, 2, 3 ,4, 5… }

Vamos a llamar *segmento de los naturales de longitud n al subconjunto {1, 2, 3,…, (n-2), (n-1), n}.* A este segmento lo vamos a denotar [1, n]

Por ejemplo, el *segmento natural de longitud cinco,*

[1, 5] = {1, 2, 3, 4, 5}
[1, 35] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…, 30, 31, 32, 33, 34, 35}
[1, 2] = {1, 2}
[1, 1] = {1}

Creo que se entiende entonces que todos estos "segmentos naturales" o "segmentos de números naturales" comienzan con el número uno; la definición entonces es:

[1, n] = {1, 2, 3, 4, 5,…, (n-3), (n-2), (n-1), n}.

En realidad podemos decir que *contar los elementos de un conjunto finito* significa "aparear" o *coordinar* o "poner las flechitas" entre los elementos del conjunto que nos dieron y algún *segmento natural.* Dependiendo del *n* vamos a decir que el conjunto tiene *cardinal n.* O, lo que es lo mismo, vamos a decir que el conjunto tiene *n* elementos.

Una vez entendido esto, ya sabemos entonces lo que son los conjuntos *finitos.* Lo bueno es que también podemos aprovecharnos de esta definición para entender lo que significa un conjunto *infinito.*

¿Qué definición dar? Intuitivamente, y antes de que yo escriba una definición tentativa, piensen un instante: ¿cuándo dirían que un conjunto es infinito? Y por otro lado, cuando piensan en esa definición, ¿en qué conjunto piensan?, ¿qué ejemplo tienen a mano?

La definición que voy a dar de conjunto *infinito* les va a parecer sorprendente, pero lo curioso es que es la más obvia: vamos a decir que un conjunto es *infinito* si no es finito. ¿Qué quiere decir esto? Que si nos dan un conjunto A y nos piden que decidamos si es finito o infinito, lo que uno tiene que tratar de hacer es buscar un *segmento natural para coordinarlo o aparearlo con él.* Si uno encuentra algún *número natural n,* de manera tal que el segmento [1, n] y el conjunto A se pueden aparear, uno tiene la respuesta: el conjunto *es finito.* Pero, si por más que uno trate, no puede encontrar el tal segmento natural, o lo que es lo mismo, cualquier segmento natural que uno busca siempre se queda *corto,* entonces es porque el conjunto A es *infinito.*

Ejemplos de conjuntos infinitos:

a) Los números naturales (todos)
b) Los números pares
c) Los números múltiplos de cinco
d) Los puntos de un segmento
e) Los puntos de un triángulo
f) Los números *que no son múltiplos de 7.*

Los invito a que busquen otros ejemplos.[12]

Hablemos ahora un poco de los conjuntos infinitos. En este mismo libro hay varios ejemplos (hotel de Hilbert, cantidad y distribución de los números de primos) que atentan contra la

[12] El conjunto vacío es el único que tiene “cardinal” cero. Esto, para salvar el “bache” lógico que se generaría, ya que como el “conjunto vacío” no se puede “aparear” con ningún segmento natural, entonces, no sería “finito”. Luego, sería “infinito”. Ese obstáculo lógico se salva o bien excluyendo al “vacío” de la discusión o bien, como elijo hacer, diciendo que el “conjunto vacío” es el único que tiene “cardinal cero”.

intuición. Y eso es maravilloso: la intuición, como cualquier otra cosa, se *desarrolla, se mejora.* Uno *intuye distinto* cuanto más datos tiene. Cuanto más acostumbrado está a pensar en cosas diferentes, *mejor se prepara para tener ideas nuevas.*

Agárrense fuerte entonces, porque empezamos ahora un viaje por el mundo de los conjuntos *infinitos.* Abróchense el cinturón y prepárense para pensar distinto.

PROBLEMA

Unos párrafos más arriba vimos cómo hacer para decidir cuál de dos conjuntos tiene más elementos (o si tienen el mismo cardinal). Decimos, para fijar las ideas, que dos conjuntos son *coordinables* si tienen *el mismo cardinal.* O sea, si tienen el *mismo número de elementos.* Como vimos, ya no necesitamos contar en el sentido clásico. Por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales sabemos que es un conjunto *infinito.*

¿Qué pasará con los números pares? Les propongo que hagan el ejercicio de *demostrar* que también son infinitos, o lo que es lo mismo, los números pares *son un conjunto infinito.*

Pero la pregunta cuya respuesta parece atentar contra la intuición es la siguiente: si N son todos los números y P son los números pares, ¿en qué conjunto hay más elementos? Yo sé que esto invita a una respuesta inmediata (*todos los números tienen que ser más, porque los números pares están contenidos* entre todos). Pero esta respuesta está basada en algo que no sabemos más si es cierto para conjuntos infinitos: ¿es verdad que por el *simple hecho de que los pares forman parte de todos los números entonces son menos?* ¿Por qué no tratamos de ver si podemos usar lo que aprendimos en el ejemplo de las butacas y las personas? ¿Qué habría que hacer? Deberíamos tratar de *coordinar o aparear o unir con flechitas* a todos los números y a los números pares. Eso nos va a dar la respuesta correcta.

Veamos. De un lado, en una bolsa, están todos los números naturales, los que forman el conjunto N. Del otro lado, en otra bolsa, están los números pares, los que forman el conjunto P.

Si yo hago la siguiente asignación (teniendo en cuenta que a la izquierda están los números del conjunto N y a la derecha, los elementos del conjunto P):

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longleftrightarrow & 2 \\ 2 & \longleftrightarrow & 4 \\ 3 & \longleftrightarrow & 6 \\ 4 & \longleftrightarrow & 8 \\ 5 & \longleftrightarrow & 10 \\ 6 & \longleftrightarrow & 12 \\ 7 & \longleftrightarrow & 14 \end{array}$$

(¿Entienden lo que estoy haciendo? Estamos *asignando a cada número de N un número de P)*

Es decir, a cada número de la izquierda, le hacemos corresponder *su doble.* Si siguiéramos así, al número *n* le hacemos corresponder el número *2n*. Por ejemplo, al número 103 le corresponde el 206. Al número 1.751, le corresponde el 3.502, etcétera.

Ahora bien: ¿está claro que a todo número de la izquierda le corresponde un número de la derecha? ¿Y que cada número de la derecha es par? ¿Y está claro también que a cada número par (de la derecha) le corresponde un número de la izquierda (justamente la mitad)? ¿Queda claro que hay *una correspondencia biunívoca o una coordinación entre ambos conjuntos?* ¿Queda claro que este proceso muestra que *hay la misma cantidad de números naturales que de números pares?* Esta afirmación es algo que en principio atenta contra la intuición. Pero es así. Liberados del problema de tener que *contar,* ya que en este caso no podríamos hacerlo porque el proceso no terminaría nunca en la medida en que los conjuntos son infinitos, lo que acabamos de hacer es mostrar que N y P son coordinables. O sea, que tienen el mismo número de elementos.

En el camino queda destruido un argumento que sólo es válido para conjuntos finitos: *aunque un conjunto esté contenido en otro, eso no significa que por eso tenga menos elementos.* Para conjuntos infinitos, eso no necesariamente es cierto, como acabamos de ver en el ejemplo de todos los números y los números pares.[13]

Éste es ya un juguete nuevo. Con esto podemos divertirnos un rato y empezar a preguntar: ¿y los impares? Bueno, supongo que cualquiera que haya seguido el argumento de los párrafos anteriores está en condiciones de decir que también hay tantos impares como números todos. Y por supuesto que hay tantos impares como pares.

A esta altura, conviene que diga que al *cardinal* de estos conjuntos infinitos que vimos hasta acá (naturales, pares, impares), se lo llama "aleph cero". (Aleph es la primera letra del alfabeto hebreo, y aleph cero es la notación que se usa universalmente para *indicar el número de elementos de conjuntos infinitos coordinables con el conjunto de los números naturales).*

¿Qué pasará ahora si consideramos los números enteros? Recuerden que los números enteros son *todos los naturales,* pero a los que se les agregan *el cero y todos los números negativos.* A los enteros se los denomina con la letra Z (del alemán Zahl) y son:

$$\{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Está claro, entonces, que los enteros forman un conjunto infinito. De paso, es bueno observar que si un conjunto contiene como *subconjunto* a un conjunto infinito, éste tiene que ser infinito también (¿no les dan ganas de pensarlo solos?).

[13] Es más: en algunos libros se da como *definición de conjunto infinito* a un conjunto que tiene subconjuntos propios (o sea, que no *son todo el conjunto)* coordinables con el *todo.*

Pero volvamos al problema original. ¿Qué pasa con Z? Es decir, ¿qué pasa con los enteros? ¿Son más que los naturales?

Para mostrar que el cardinal de ambos conjuntos es el mismo, lo que tenemos que hacer es encontrar una correspondencia biunívoca (es decir, flechitas que salgan de un conjunto y lleguen al otro sin dejar "libre" ningún elemento de ninguno de los dos conjuntos).

Hagamos las siguientes asignaciones:

Al 0 le asignamos el 1
Al -1 le asignamos el 2
Al +1 le asignamos el 3
Al -2 le asignamos el 4
Al +2 le asignamos el 5
Al -3 le asignamos el 6
Al +3 le asignamos el 7

Y así podremos asignarle a *cada número entero* un número natural. Está claro que no quedará ningún entero sin que le corresponda un natural, ni recíprocamente, ningún natural sin que tenga un entero asignado a su vez. Es decir, hemos comprobado con esto *que el conjunto Z* de los números enteros *y el conjunto N* de los números naturales tienen el mismo cardinal. Ambos tienen cardinal aleph cero. Es decir, los enteros y naturales tienen la misma cantidad de elementos.

Como ejercicio, los invito a que prueben que también tienen cardinal aleph cero (y por lo tanto tienen la misma cantidad de elementos que los enteros o los naturales) los números múltiplos de cinco, las potencias de dos, de tres, etcétera. Si llegaron hasta acá y todavía están interesados, no dejen de pensar los distintos casos y cómo encontrar la *correspondencia* que demuestra que todos estos conjuntos (aunque parezca que no) tienen todos el mismo cardinal.

Ahora peguemos un pequeño salto de calidad. Consideremos

los *números racionales*, que llevan el nombre de Q (por "quotient", o "cociente" en inglés). Un número se llama *racional* si es el cociente de dos números enteros: a/b (excluyendo el caso, obviamente, en que b sea cero). Ya sabemos, como hemos visto en otra parte del libro, que *no se puede dividir por cero.*

En realidad, los números racionales son los que se conocen como "las fracciones", con numerador y denominador números enteros. Por ejemplo, (-7/3), (17/5), (1/2), 7, son números racionales. Es interesante notar, que cualquier número entero *es también un número racional*, porque todo número entero *a* se puede escribir como una fracción o como cociente de él mismo por 1. O sea:

$$a = a/1$$

Lo interesante es tratar de ver que, aunque *parezcan muchísimos más, los racionales también tienen a aleph cero como cardinal.* O sea, también son coordinables con los naturales. Así, en el lenguaje común (que es el útil), *hay tantos racionales como naturales.*

La demostración es interesante porque lo que vamos a hacer es una asignación que irá en espiral. Ya se va a entender. Hacemos así:

Al 0/1 le asignamos el 1	Al 1/3 le asignamos el 10
Al 1/1 le asignamos el 2	Al 1/4 le asignamos el 11
Al 1/2 le asignamos el 3	Al 2/4 le asignamos el 12
Al 2/2 le asignamos el 4	Al 3/4 le asignamos el 13
Al 2/1 le asignamos el 5	Al 4/4 le asignamos el 14
Al 3/1 le asignamos el 6	Al 4/3 le asignamos el 15
Al 3/2 le asignamos el 7	Al 4/2 le asignamos el 16
Al 3/3 le asignamos el 8	Al 4/1 le asignamos el 17
Al 2/3 le asignamos el 9	Al 5/1 le asignamos el 18

Al 5/2 le asignamos el 19
Al 5/3 le asignamos el 20
Al 5/4 le asignamos el 21
Al 5/5 le asignamos el 22
Al 4/5 le asignamos el 23
Al 3/5 le asignamos el 24
Al 2/5 le asignamos el 25
Al 1/5 le asignamos el 26
Al 1/6 le asignamos el 27…

Como se ve, a cada número racional *no negativo (o sea, mayor o igual que cero)* le asignamos un número natural. Esta asignación es biunívoca, en el sentido de que a todo racional le corresponde un natural y viceversa. La única observación que habría que considerar es que hice todo esto para los racionales positivos. Si uno quiere agregar los negativos, la asignación *debe* ser diferente, pero creo que el lector sabrá ingeniarse para hacerla (en todo caso, en la página de soluciones hay una propuesta para hacerlo).

Una observación que surge es que en la columna de la izquierda yo estoy *pasando* varias veces por el mismo número. Por ejemplo, el 1 en la columna de la izquierda aparece como 1/1, 2/2, 3/3, 4/4, etcétera; o sea, aparece muchas veces. ¿Afecta esto la cardinalidad? Al contrario. En todo caso, si uno tiene que conjeturar algo a priori, es que el conjunto de los racionales *parece tener más elementos* que los naturales y, sin embargo, la asignación que acabo de ofrecer muestra que *tienen el mismo cardinal*. En todo caso, muestra que a pesar de repetir varias veces el mismo racional, sigue habiendo naturales para todos ellos. Lo cual es un hecho francamente notable y antiintuitivo.

Y ahora llegamos al punto central. La pregunta que uno tiene que hacerse es la siguiente: da la sensación de que *todos los conjuntos infinitos tienen el mismo cardinal*. Es decir, hemos revisado los naturales, los pares, los impares, los enteros, los racionales, etcétera. *Todos* los ejemplos que hemos visto de conjuntos infinitos resultaron ser coordinables a los naturales, o lo que es lo mismo, tienen todos el mismo cardinal: aleph cero.

Con todo derecho, entonces, uno podría decir: "Bueno. Ya sabemos cuáles son los conjuntos infinitos. Habrá muchos o pocos, pero todos tienen el mismo cardinal". Y aquí es donde aparece un punto central en la teoría de conjuntos. Hubo un señor que hace muchos años, alrededor de 1880, se tropezó con un problema. Tratando de demostrar que todos los conjuntos infinitos tenían el mismo cardinal, encontró uno que no. El señor, por más esfuerzos que hacía por encontrar "las flechitas" para poder coordinar *su conjunto* con los números naturales, *no podía*. Tal era su desesperación que en un momento cambió de idea (e hizo algo genial, claro, porque tuvo una idea maravillosa) y pensó: "¿y si no puedo encontrar las flechitas porque no es posible encontrarlas? ¿No será preferible que trate de *demostrar que no se pueden encontrar las flechitas porque no existen?*".

Este señor se llamó Georg Cantor. Van a encontrar una breve reseña biográfica de él en otra parte del libro, pero al margen de lo que allí diga, a Cantor lo volvieron loco. La comunidad científica especialista en el tema lo enloqueció, literalmente.

Cuando Cantor descubrió que había *infinitos más grandes que otros*, dijo: "Lo veo y no lo creo".

Pero ¿qué es lo que hizo Cantor? Para entenderlo, necesito recordar aquí por un momento qué es el desarrollo decimal de un número (sin entrar en demasiados detalles). Por ejemplo, cuando definí los números racionales, digamos el número 1/2, quedó claro que este número también se puede escribir así:

1/2 = 0,5

Y agrego otros ejemplos:

1/3 = 0,33333…
7/3 = 2,33333…
15/18 = 0,8333…
37/49 = 0,75510204…

Es decir, cada número racional tiene un desarrollo decimal (que se obtiene, justamente, haciendo el cociente entre los dos números enteros). Lo que sabemos de los números racionales es que al hacer el cociente, el desarrollo decimal es, o bien finito (como en el caso de 1/2 = 0,5, porque después vendrían sólo ceros a la derecha de la coma), o bien es periódico, como 1/3 = 0,33333…, en donde se repite un número (en este caso el 3), o podría ser un conjunto de números (que se llama *período),* como en el caso de (17/99) = 0,17171717… en donde *el período es 17,* o bien, en el caso de (1743/9900) = 0,176060606… en donde el *período* es 60.

Es más: podemos decir que todo número racional tiene un desarrollo decimal finito o periódico. Y al revés: dado un desarrollo decimal finito o periódico cualquiera, eso corresponde a un único número racional.

A esta altura, yo creo que puedo suponer que los lectores *entienden lo que es el desarrollo decimal.*

Con todo, hay números que *no son racionales.* Son números *que tienen un desarrollo decimal* pero que se sabe que no son racionales. El ejemplo más famoso es π (pi). Se sabe (no lo voy a probar aquí) que π no es un número racional. Si siguen interesados en más ejemplos, en este mismo libro está la demostración que "enloqueció" a los pitagóricos de que "la raíz cuadrada de 2" (√2) *no es racional.* Y por otro lado, por allí también anda el número *e*, que *tampoco es racional.*

Ustedes saben que el número π tiene un desarrollo decimal que empieza así:

$$\pi = 3{,}14159\ldots$$

El número √2 tiene un desarrollo decimal que empieza así:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$$

El número *e* tiene un desarrollo decimal que empieza así:

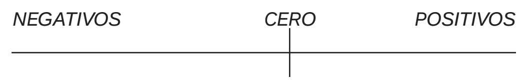
$$e = 2{,}71828183\ldots$$

La particularidad que tienen *todos estos números* es que tienen un desarrollo decimal que *no termina nunca (*en el sentido de que no aparecen ceros a la derecha de la coma a partir de ningún momento) y *tampoco son periódicos* (en el sentido de que no hay un lugar del desarrollo a partir del cual *se repita indefinidamente un segmento de números).* Estos dos hechos están garantizados porque los *números en cuestión no son racionales.* Es más: las cifras de cada número son imposibles de predecir en función de las anteriores. No siguen ningún patrón.

Creo que se entiende entonces cuáles son esta clase de números. Más aún: todo número *real* que no sea *racional* se llama *irracional.* Los tres ejemplos que acabo de poner son tres números irracionales.

Cantor propuso entonces: "voy a probar que hay un conjunto infinito que *no se puede coordinar con los naturales".* Y para eso, siguió diciendo: "el conjunto que voy a tomar es el de *todos los números reales* que están en el segmento [0,1]".[14]

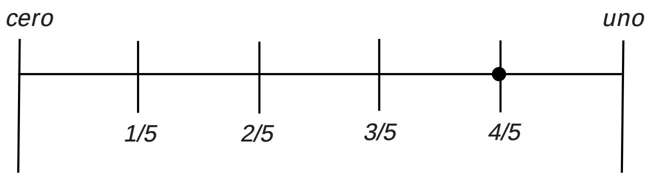
Un momento: tomen una recta, marquen un punto cualquiera y llámenlo *cero.* Los puntos que están a la derecha se llaman *positivos* y los que están a la izquierda *se llaman negativos.*



Cada punto de la recta corresponde a una *distancia del cero.* Ahora marquen un punto cualquiera más a la derecha del ce-

[14] Aquí conviene decir que los números *reales* consisten en la unión del conjunto de los *racionales* y el de los *irracionales* (o sea, los que *no son racionales).*

ro. Ése va a ser el número 1 para ustedes. A partir de allí, uno puede construir los números *reales*. Cualquier otro punto de la recta está a una distancia del cero que está medida por la longitud del segmento que va desde el cero hasta el punto que usted eligió. Ese punto es un número real. Si está a la derecha del cero, es un número real positivo. Si está a la izquierda, es un número real negativo. Por ejemplo el 1/2 es el punto que está a la mitad de la distancia de la que usted marcó como 1. El (4/5) está a cuatro quintas partes del cero (es como haber partido el segmento que va desde el 0 hasta el 1 en cinco partes iguales, y uno se queda con el punto que queda al elegir las primeras cuatro).



Está claro, entonces, que a cada punto del segmento que va entre el 0 y el 1, le corresponde un número real. Ese número real, puede ser *racional o irracional*. Por ejemplo, el número ($\sqrt{2}$ - 1) = 0.41421356…. es un número irracional que está en ese segmento. El número (π/4), también. Lo mismo que el número (*e* - 2).

Cantor tomó entonces el segmento [0,1]. Son todos los números reales del segmento *unitario*. Este conjunto es un conjunto *infinito de puntos*. Piénsenlo así: tomen el 1, dividan al segmento por la mitad: tienen el 1/2. Divídanlo ahora por la mitad: tienen el número (1/4). Divídanlo por la mitad: tienen el (1/8). Como se advierte, dividiendo por la mitad cada vez, uno obtiene siempre un punto que está en la mitad de la distancia del que tenía antes. Eso va generando una sucesión *infinita* de puntos: ($1/2^n$), *todos* los cuales están en el segmento [0,1].

Falta poco. Cantor dijo entonces: "voy a suponer que este

conjunto (segmento unitario) se puede *coordinar con los naturales*". O sea, supuso que *tenían el mismo cardinal*. Si esto fuera cierto, entonces debería haber una asignación (o lo que llamamos "las flechitas") entre los elementos del segmento [0,1] y los números naturales. Resultaría posible, como en los ejemplos anteriores, que podríamos poner en una *lista* a todos los elementos del segmento [0,1].

Y eso hizo:

1	$0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\, a_{15}\, a_{16}\ldots$
2	$0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24}\, a_{25}\, a_{26}\ldots$
3	$0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, a_{34}\, a_{35}\, a_{36}\ldots$
4	$0, a_{41}\, a_{42}\, a_{43}\, a_{44}\, a_{45}\, a_{46}\ldots$
…	
n	$0, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3}\, a_{n4}\, a_{n5}\, a_{n6}\ldots$

En este caso, lo que representan los distintos símbolos de la forma a_{pq}, son los dígitos del desarrollo de cada número. Por ejemplo, supongamos que éstos son los desarrollos decimales de los primeros números de la lista:

1	0,783798099937…
2	0,523787123478…
3	0,528734340002…
4	0,001732845…

Es decir,

$0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, a_{14}\, a_{15}\, a_{16}\ldots = 0{,}783798099937\ldots$

$0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, a_{24}\, a_{25}\, a_{26}\ldots = 0{,}523787123478\ldots$

y así siguiendo.

O sea, lo que Cantor hizo fue suponer que existe una manera de "poner flechitas", o de hacer "asignaciones", de manera tal que *todos los números reales* del segmento [0,1] estuvieran coordinados con los naturales.

Y ahora, la genialidad de Cantor: "voy a construir un número que *está* en el segmento [0,1], pero que *no está en la lista"*.

Y lo fabricó así: se construyó el número

$$A = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 \ldots$$

Uno *sabe* que este número está en el segmento [0,1], porque empieza con 0,...

¿Pero quiénes son las letras b_k? Bueno, Cantor dijo:

Tomo

b_1 de manera que sea un dígito diferente de a_{11}
b_2 de manera que sea un dígito diferente de a_{22}
b_3 de manera que sea un dígito diferente de a_{33}
...
b_n de manera que sea un dígito diferente de a_{nn}

De esta forma, tengo garantizado que el número A no está en la lista. ¿Por qué? No puede ser el primero de la lista, porque el b_1 *difiere de* a_{11}. No puede ser el segundo, porque el b_2 difiere de a_{22}. No puede ser el tercero, porque el b_3 difiere de a_{33}. No puede ser el enésimo, porque el b_n difiere de a_{nn}.[15] Luego, Cantor se fabricó un número *real* que está en el segmento [0,1] *que no está en la lista*. Y esto lo pudo construir independientemente de cuál fuera la lista.

Es decir, si viene cualquier otra persona y le dice "yo tengo una lista diferente de la suya, y la mía sí funciona y contiene *todos los números reales del intervalo [0,1]"*, Cantor puede *aceptarle cualquier desafío, porque él puede construir un número real que debería estar en la lista, pero que no puede estar.*

[15] Para poder usar este argumento hay que saber que la *escritura decimal* de un número es *única*, pero se requeriría el uso de una herramienta un poco más sutil.

Y eso culmina la demostración, porque prueba que si uno quiere hacer una correspondencia biunívoca entre los números reales y los números naturales, *va a fracasar*. Cualquier lista que *presuma de tenerlos a todos* pecará por dejar alguno afuera. Y no hay manera de arreglarlo.[16]

Este método se conoce con el nombre de *método diagonal de Cantor*; fue uno de los saltos cualitativos más importantes de la historia, en términos de los conjuntos infinitos. A partir de ese momento, se supo entonces que había infinitos más grandes que otros.

La historia sigue y es muy profusa. Daría para escribir muchísimos libros sobre el tema (que de hecho están escritos). Pero sólo para dejarnos a todos con un sabor bien dulce en la boca, quiero proponerles pensar algunas cosas:

a) Supongamos que uno tiene un "dado" con *diez caras* y no seis, como los habituales. Cada cara tiene anotado un dígito, del 0 al 9. Supongamos que uno empieza a tirar el dado hacia arriba. Y va anotando el numerito que va saliendo. Empieza poniendo 0,... de manera que el resultado termine siendo un número real del intervalo [0,1]. Piensen lo siguiente: para que el resultado sea un número racional, el "dado" de diez caras tiene que empezar a repetirse a partir de un determinado momento, ya sea porque da siempre cero, o bien porque repite un *período*. En cualquier caso, si no repite o *no empieza a dar cero cons-*

[16] El número 0,0999999... y el número 0,1 son iguales. Es decir, para que dos números racionales sean iguales, no es necesario que lo sean dígito a dígito. Este problema se genera cada vez que uno "admite" que haya "infinitos" números *nueve* en el desarrollo decimal. Para que la "construcción" que hice del número que "no figura" en la lista sea *estrictamente correcta*, hay que *elegir un número que sea diferente de* a_{11} *y de 9* en cada paso. Eso "evita", por ejemplo, que si uno tiene el número 0,1 en la lista, y empieza poniendo un 0 en el lugar a_{11} y luego elige *siempre* números 9, termina por construir el mismo número que figuraba en el primer lugar.

tantemente, es porque dio un número irracional. Si repite o empieza a dar siempre *cero* es racional. ¿Qué les parece que es más posible que pase? De las dos alternativas, ¿cuál les parece más factible? Esto sirve para que intuitivamente advirtamos *cuántos más son los irracionales que los racionales.*

b) Si uno tuviera una recta, y pudiera *excluir los racionales*, no se notarían virtualmente los agujeros. En cambio, si excluyéramos a los irracionales, *casi* no se verían los puntos que quedan. Tanto más grande en tamaño es el conjunto de los reales comparado con el de los naturales. (La palabra *casi* está usada adrede, porque no es que *no se verían los racionales sino que la idea que quiero dar es que los irracionales son muchísimos más que los racionales).*

c) Hay muchas preguntas para hacerse, pero la más inmediata es la siguiente: ¿es el conjunto de números reales el que tiene infinito más grande? La respuesta es no. Uno puede construirse conjuntos arbitrariamente grandes y con un cardinal infinito "más grande" que el anterior. Y este proceso no termina nunca.

d) Otra dirección de pregunta podría ser la siguiente: vimos recién que los reales *son más* que los naturales, pero ¿hay algún conjunto infinito que tenga cardinal más grande que el de los naturales y más chico que el de los reales? Este problema es un problema *abierto* de la matemática, pero se supone que no hay conjuntos infinitos *en el medio*. Sin embargo, *la hipótesis del continuo* dice que la matemática seguirá siendo consistente, se pruebe que hay o no hay conjuntos con infinitos más grandes que el de los naturales y más chicos que el de los reales.

Segmentos de distinta longitud

Como hemos visto reiteradamente en este libro, todo lo que tenga que ver con los conjuntos infinitos es ciertamente fascinante. La intuición es puesta a prueba y los sentidos también. La famosa frase de Cantor ("lo veo, pero no lo creo") caracteriza bien lo que nos ocurre cuando tropezamos con ellos (los conjuntos infinitos) las primeras veces.

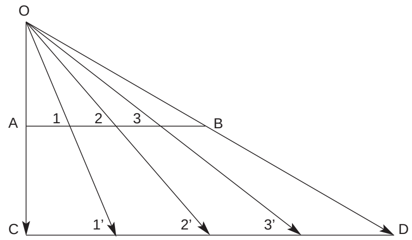
Otro ejemplo muy ilustrativo es el de los segmentos.

Tomemos dos segmentos de *distinta longitud*. Llamémolos [A,B] y [C,D]. Uno *sabe (¿sabe?)* que todo segmento tiene infinitos puntos. Si necesitan una confirmación, marquen el punto medio del segmento. Ahora tienen dos segmentos iguales. Tomen cualquiera de ellos, marquen el punto medio y continúen con el proceso. Como advierten, *siempre* hay un punto en el medio de dos y, por lo tanto, el número de puntos que contiene un segmento es *siempre infinito*.[17]

Lo interesante es preguntarse, ¿cómo se comparan los infinitos? Es decir, ¿quién tiene más puntos si dos segmentos tienen distintas longitudes como [A,B] y [C,D]? La respuesta es sorprendente también y es que *ambos tienen el mismo número de puntos. Infinitos, ciertamente, pero el mismo número.* ¿Cómo convencerse de esto?

Como ya hemos visto en el capítulo de los distintos tipos de infinitos, es imposible tratar de *contar*. Necesitamos otros métodos de comparación. Y la herramienta que usé en otras partes, es la de las "asignaciones" o "flechitas" que unen los elementos de uno con los elementos de otro (recuerden el apareamiento de números naturales con los enteros, o con los racionales, etcétera). En este caso, entonces, hago lo mismo.[18]

[17] Este argumento ya lo utilicé en el capítulo sobre los diferentes infinitos de Cantor.
[18] Excluyo los segmentos que contienen un solo punto, lo que podríamos llamar un *segmento degenerado* [A,A]. Este segmento contiene *un solo punto: A.*



Ponemos los dos segmentos, [A,B] y [C,D], uno debajo del otro (como se ve en la figura). Colocamos un punto O más arriba, de manera tal de que queden ALINEADOS (es decir, encima de la misma recta) los puntos O, B y D, y por otro lado, también están alineados los puntos O, A y C. Para ver que ambos segmentos tienen el número de puntos, necesitamos "aparear" o "trazar flechitas" entre los puntos de uno y otro segmento. Por ejemplo, al punto 1 le corresponde al punto 1', porque lo que hacemos es trazar DESDE O, un segmento que empiece en O y pase por 1. El punto en donde "corta" al segmento [C,D], lo llamamos 1'. De la misma forma, si queremos averiguar cuál es el que le corresponde al punto 2, hacemos lo mismo: trazamos el segmento que une al punto O con el punto 2, y nos fijamos en qué punto "corta" al segmento [C,D]. A ese punto, lo llamamos 2'. Es evidente entonces, que para cada punto del segmento [A,B], repitiendo el proceso explicado arriba, le corresponde un punto del segmento [C,D]. Y viceversa: dado el punto 3' en el segmento [C,D], si queremos saber qué punto del segmento [A,B] le corresponde, "unimos" ese punto 3' con el punto O , y el lugar en donde corta a [A,B], lo llamamos 3. Y listo.

Este hecho, naturalmente, atenta contra la intuición, porque se desprende que un segmento que una la parte externa de la página que ustedes están leyendo con la parte interna, tiene *la misma cantidad de puntos que un segmento que una la Ciudad de Buenos Aires con la de Tucumán.* O un segmento que una la Tierra con la Luna.

Un punto en un segmento

Les propongo el siguiente ejercicio para comprobar su familiaridad con los *grandes números*.

1) Tomen una hoja y algo con qué escribir.
2) Tracen un segmento (háganlo grande, no ahorren papel justo ahora, aunque el ejemplo funciona igual).

3) Pongan el número *cero* en el extremo izquierdo de su segmento.
4) Pongan el número un billón en el extremo derecho.
   Es decir, ustedes van a suponer que el segmento que dibujaron mide un billón. Marquen en el mismo segmento el número mil millones. ¿Dónde lo pondrían?

La respuesta, en las páginas de soluciones.

Suma de las inversas de las potencias de 2 (suma infinita)

Supongamos que dos personas (A y B) están paradas a dos metros de distancia, una de otra. Ambas personas van a ser *virtuales*, en el sentido de que funcionarán como *puntos*, como los extremos de un segmento. Este segmento va a tener dos metros de distancia.

Ahora el señor A va a empezar a caminar hacia B, pero no lo va a hacer en forma libre, sino que va a seguir las siguientes instrucciones: cada paso que dé va a cubrir exactamente la *mitad de la distancia* de lo que le falta recorrer para llegar hasta B. Es decir, el primer paso que A va a dar será de *un metro* (ya que la distancia que lo separa de B es de dos metros).

Luego el señor A (que ahora esta parado en la mitad del segmento [A,B] va a seguir caminando y su próximo paso va a ser medio metro (1/2 = 0,5) porque la distancia que le falta recorrer hasta llegar a B es justo un metro (y la instrucción para él es bien precisa: sus pasos son siempre la *mitad del terreno que le falta recorrer).*

Una vez que A haya dado ese paso, estará parado en el punto 1,5. Como estará a medio metro de B, su paso siguiente será de 0,25 centímetros (1/4 que es la mitad de 1/2). Y cuando llegue estará a 1,75 de distancia del lugar de origen.

El señor A sigue caminando. Sus próximos pasos van a ser: 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256, 1/512, 1/1024, etcétera.

Como ustedes advierten, el señor A *no va a llegar nunca a* *destino (si es que su destino era llegar hasta el señor B)*. No importa cuánto tiempo camine, sus pasos van a ser cada vez más pequeños (en realidad, cada vez se verán reducidos a la mitad), pero si bien *siempre va a avanzar* (lo que no es poco decir) y, además, va a avanzar *nada menos* que la mitad de lo que le falta, el pobre A no va a llegar nunca a destino.

Por otro lado, los pasos que da el señor A son siempre hacia adelante, por lo que A está cada vez más cerca de B.

Uno podría poner todo esto en números y decir lo siguiente:

1 = 1 = 2 - 1
1 + 1/2 = 3/2 = 2 - 1/2
1 + 1/2 + 1/4 = 7/4 = 2 - 1/4
1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 15/8 = 2 - 1/8
1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 31/16 = 2 - 1/16
1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 = 63/32 = 2 - 1/32
1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 = 127/64 = 2 – 1/64

Supongo que ustedes habrán advertido ya un patrón (que es en definitiva lo que hacemos los matemáticos... no necesariamente con éxito). Las sumas van siendo cada vez mayores y los resultados que se van obteniendo con estas *sumas parciales* de pasos del señor A, son cada vez números más grandes. Es decir, estamos construyéndonos una sucesión de números *estrictamente creciente* (en el sentido de que van creciendo en cada renglón). Por otro lado, es claro que no sólo crecen sino que podemos saber, además, *cómo crecen*, porque cada vez están más cerca de 2. Si uno mira los resultados de la columna de la derecha, uno advierte que queda:

2-1
2-1/2
2-1/4
2-1/8

2-1/16
2-1/32
2-1/64...

... así es que de estos hallazgos uno podría sacar varias moralejas pero, en principio, quiero establecer dos hechos:

a) uno puede sumar números positivos indefinidamente y la suma no se hace un número arbitrariamente grande. En este ejemplo, es claro que la suma de todos esos números (si es que uno hipotéticamente pudiera *sumar infinitamente*) no superaría a dos. Es más: si uno *efectivamente pudiera* sumar infinitamente, el resultado final *sería dos*.

b) Este proceso asegura que a medida que el señor A va caminando, uno puede acercarse a un número *tanto como quiera* (en este caso al *dos*), pero nunca llegar. La distancia que separa al señor A de B es cada vez más pequeña, y se puede hacer tan pequeña como yo quiera, pero A *nunca llega a tocar a* B.

Esto que hemos visto aquí encubre varias nociones importantes y profundas de la matemática, pero la más importante es la de límite, que fue un descubrimiento conjunto hecho por Newton y Leibniz al empezar el siglo XVIII, uno en Inglaterra y el otro en Alemania.

Y con esta noción cambió el mundo de la ciencia para siempre.

Personajes

Por qué uno no entiende algo

Esta breve historia reproduce lo que escribió un amigo íntimo que falleció ya hace muchos años: Ricardo Noriega. Ricardo fue un matemático argentino, fallecido a una edad muy temprana, especialista en geometría diferencial. Trabajó durante muchos años con Luis Santaló[19] y, más allá de sus condiciones profesionales, fue un tipo bárbaro. Siempre de buen humor, educado y muy generoso con su tiempo y en la actitud siempre paternal con alumnos y otros colegas. Un gran tipo.

Con él estudié cuando ambos éramos jóvenes. En su libro *Cálculo Diferencial e Integral* escribió sobre una idea que me subyugó siempre: ¿por qué uno no entiende algo? ¿Y por qué lo entiende después? ¿Y por qué se lo olvida más tarde?

Ricardo escribió, y no lo voy a parafrasear porque prefiero contar mi propia versión:

"Muchas veces, cuando uno está leyendo algo de matemática tropieza con un problema: no entiende lo que leyó. Entonces, para, piensa y relee el texto. Y la mayoría de las veces, sigue sin entender. Uno no avanza. Quiere comprender, pero no puede. Lee el párrafo nuevamente. Piensa. Y dedica mucho tiem-

[19] Santaló fue uno de los geómetras más importantes de la historia. Nació en España, pero escapando de la guerra civil española, pasó la mayor parte de su vida en la Argentina. Fue un verdadero maestro y sus contribuciones tanto personales como profesionales son invalorables.

siglo veintiuno editores

po (eventualmente)… hasta que de pronto… entiende…. algo se abre en el cerebro de uno, algo se conecta… y uno *pasa a entender*. ¡Uno entiende! Pero no es todo: lo maravilloso es que uno *no puede entender por qué no entendía antes"*.

Ésa es una reflexión que merece en algún momento una respuesta. ¿Qué nos detiene? ¿Por qué no entendemos en un momento y después sí? ¿Por qué? ¿Qué pasa en nuestro cerebro? ¿Qué conexiones se producen? ¿Qué es lo que juega para que durante un buen rato no entendamos algo y, de pronto, se produzca un "click" y pasemos a entender? ¿No es maravilloso ponerse a pensar por qué uno no entendía antes? ¿Se podrá reproducir esto? ¿Se podrá utilizar para cooperar con la comprensión de otra persona? ¿Servirá la experiencia de uno para mejorar la velocidad y profundidad de aprendizaje de otro?

Conversación entre Einstein y Poincaré

Creo que no hace falta que presente a Einstein. Pero sí creo que merece algunas palabras Poincaré, no porque hubiera sido menos importante su aporte a la ciencia de fines del siglo XIX y principios del XX, sino porque sus trabajos y trayectoria son menos conocidos por el público en general.

Los medios se han ocupado (y con justa razón) de ubicar a Einstein como una de las personas más famosas de la historia. Es difícil encontrar a alguien que sepa leer y escribir y no sepa quién fue Einstein. Pero supongo que no yerro si digo que el número de personas que desconocen a Einstein coincide con el número de los que conocen a Poincaré. Y quizá exagero…

Henri Poincaré nació el 28 de abril de 1854 en Nancy (Francia) y murió el 17 de julio de 1912 en París. Era ambidiestro y miope. Sufrió de difteria durante buena parte de su vida y eso le trajo severos problemas motrices y de coordinación. Pero Poincaré es considerado una de las mentes más privilegiadas que pobló la Tierra. Se dedicó a la matemática, la física y la filosofía y se lo describe como el último de los "universalistas" (en el sentido de que con su conocimiento lograba borrar las fronteras entre las ciencias que investigaba).

Contribuyó en forma profusa a diversas ramas de la matemática, mecánica celeste, mecánica de fluidos, la teoría especial de la relatividad y la filosofía de la ciencia.

Aún hoy permanece sin respuesta su famosa conjetura sobre la existencia de *variedades tridimensionales sin borde con grupo de homotopía nulo y que no fueran homeomorfas a la esfera en cuatro dimensiones*.

Más allá de haber entendido el enunciado, cosa que posiblemente no ocurrió salvo para un grupo muy reducido de personas, especialistas en el tema, el hecho es que Poincaré conjeturó este resultado cuya demostración ha eludido a los mejores matemáticos del mundo desde hace más de un siglo.[20]

Toda esta introducción me permite ahora presentar un diálogo entre dos de las figuras más prominentes de la ciencia en la primera mitad del siglo XX, poniendo énfasis en una discusión eterna entre la matemática y la física. Aquí va.

Einstein: —Vos sabés, Henri, al principio, yo estudiaba matemática. Pero dejé y me dediqué a la física…

Poincaré: —Ah… No sabía, Alberto. ¿Y por qué fue?

Einstein: —Bueno, lo que pasaba era que si bien yo podía darme cuenta de cuáles afirmaciones eran verdaderas y cuáles eran falsas, lo que no podía hacer era decidir cuáles eran las importantes….

Poincaré: —Es muy interesante lo que me decís, Alberto, porque, originalmente, yo me había dedicado a la física, pero me cambié al campo de la matemática…

[20] En mayo de 2005, anda dando vuelta una potencial demostración de esta conjetura, pero aún no ha sido *oficialmente* aceptada por la comunidad matemática.

Einstein: —¿Ah, sí? ¿Y por qué?

Poincaré: —Porque si bien yo podía decidir cuáles de las afirmaciones eran importantes y separarlas de las triviales, mi problema… ¡es que nunca podía diferenciar las que eran ciertas!

Fleming y Churchill[21]

Su nombre era Fleming, un granjero escocés pobre. Un día, mientras intentaba ganar el pan para su familia, oyó un lamento pidiendo ayuda que provenía de un pantano cercano.

Dejó caer sus herramientas y corrió hacia el lugar. Allí encontró, hundido hasta la cintura, dentro del estiércol húmedo y negro del pantano, a un muchacho aterrorizado, gritando y esforzándose por liberarse. El granjero Fleming salvó al muchacho de lo que podría haber sido una agonía lenta y espantosa.

Al día siguiente, llegó a la granja un carruaje muy ostentoso que traía a un noble, elegantemente vestido, que bajó y se presentó como padre del muchacho salvado por el granjero Fleming.

—Quiero recompensarlo —dijo el noble—. Usted salvó la vida de mi hijo.

—No, yo no puedo aceptar un pago por lo que hice. Era mi deber —contestó el granjero escocés.

En ese momento, el hijo del granjero se acercó a la puerta de la cabaña.

—¿Ese que asoma ahí es su hijo? —preguntó el noble.

—Sí —contestó el granjero orgulloso.

—Le propongo entonces hacer un trato. Permítame proporcionarle a su hijo el mismo nivel de educación que mi hijo recibe. Si el muchacho se parece a su padre no dudo que crecerá hasta convertirse en el hombre del que ambos estaremos orgullosos.

[21] Esta historia me la envió Gerardo Garbulsky, un ex alumno y muy buen amigo mío. Gerry siempre tuvo un ojo atento y sensible para la ciencia y sus aplicaciones, y gracias a él supe de esta historia.

Y el granjero aceptó.

El hijo del granjero Fleming asistió a las mejores escuelas y luego de un tiempo se graduó en la Escuela Médica del Saint Mary's Hospital, en Londres, convirtiéndose en un renombrado científico conocido en todo el mundo por el descubrimiento que revolucionó el tratamiento de las infecciones: la penicilina.

Años después, el hijo del mismo noble que fue salvado de la muerte en el pantano enfermó de pulmonía. ¿Qué salvó su vida esta vez? La penicilina, ¡¡¡por supuesto!!!

¿El nombre del noble? Sir Randolph Churchill…

¿El nombre de su hijo? Sir Winston Churchill.

Los matemáticos hacemos razonamientos, no números

Luis Caffarelli me dio una serie de ejemplos sobre el trabajo de los matemáticos, que quiero compartir aquí. Caffarelli es uno de los mejores matemáticos argentinos de la historia (y casi con seguridad el mejor hoy, en 2005). A él le pedí que me diera argumentos para publicar sobre lo que hacía un matemático profesional. Lo primero que hizo fue darme el título que utilizo para este capítulo.

Pero antes de compartir sus reflexiones, vale la pena recordar que Caffarelli nació en 1948, obtuvo el título de licenciado en matemática cuando tenía veinte años y se doctoró cuando tenía veinticuatro. En 1994 fue nombrado miembro de la Academia Pointificia de Ciencias, una institución creada en 1603, que cuenta con sólo ochenta miembros en todo el mundo. Ser integrante de esta Academia implica una extraordinaria calidad científica. Es, o fue, profesor en el Courant en Nueva York, en la Universidad de Chicago, en el MIT, en Berkeley, en Stanford, en la Universidad de Bonn y por supuesto, en la Universidad de Princeton en Nueva Jersey, el centro de excelencia mundial donde hicieron parte de sus investigaciones Einstein, Von Neumann, Alan Turing, John Nash, entre muchos otros.

Una anécdota personal: Caffarelli y yo fuimos ayudantes de una materia en la facultad de Ciencias Exactas y Naturales sobre el final de la década de 1960. La materia se llamaba Funciones Reales I. Necesitábamos preparar ejercicios para las prácticas y los exámenes. La materia presentaba un constante desafío, no sólo para los estudiantes, sino también para los docentes. En esencia, era la primera materia del ciclo superior para los estudiantes de matemática. Un viernes, al finalizar la clase, quedamos en que cada uno pensaría problemas durante el fin de semana y nos encontraríamos el lunes siguiente para discutirlos. Y así fue. Yo hice mi parte, y traje cinco problemas. Caffarelli también hizo la suya. Pero con una diferencia. Trajo 123. Sí, ciento veintitrés. Algo más: nunca hubo un gesto de arrogancia o de superioridad. Para él la matemática es algo natural, que fluye por su vida como el aire que respira cualquiera de nosotros. Sólo que él piensa diferente, ve distinto, imagina de otra forma. Sin duda, una mente privilegiada. Ahora sí, vamos a lo que hace un matemático profesional de acuerdo con Luis Caffarelli:

Estudiar lo que sucede con el whisky y los cubitos de hielo está relacionado con el impacto de una nave espacial cuando reingresa en la atmósfera, con la explosión demográfica y con la predicción climática.

El investigador genera un modelo matemático de un sistema, presume que éste refleja la realidad, y testea los resultados de un simulador numérico para ver si sus cuentas son acertadas o no.

En el caso del cubito de hielo, se analiza la superficie de contacto del hielo con el agua. Si es estable, se estudia qué pasaría si echáramos un chorrito más de whisky, si se produciría un cambio dramático en el sistema, si se va a derretir el hielo, etcétera.

Lo mismo sucede cuando uno estudia el flujo de aire alrededor del ala de un avión, o la dinámica demográfica. El matemático trata de encontrar ecuaciones que representen estos problemas e introducir factores de corrección adecuados para representar el fenómeno que se pretende estudiar.

La relación entre las matemáticas y la sociedad se pone de manifiesto cuando uno enciende la TV, recibe un fax, manda un e-mail, enciende un microondas y la comida se calienta. *Pero los científicos que pensaron acerca de los fenómenos básicos del horno a microondas, no intentaban resolver el problema de calentar la mamadera de un chico, sino en qué interesante sería comprender cómo se excitan las moléculas frente a un cierto efecto.*

Más adelante, le pedí que hiciera una reflexión respecto de los problemas de comunicación entre los científicos y la sociedad que los cobija:

No es que exista una escisión entre ciencia y sociedad, sino que la gama de relaciones es muy extensa y tortuosa y a menudo no es obvia. La ciencia está muy relacionada con la sociedad, lo que pasa es que cada vez hace falta más especialización para llegar a ella.

En el futuro las ciencias se van a matematizar más todavía. Hay un desafío inmenso para entender las cosas, para matematizarlas y entender por qué son así. Las matemáticas tratan de sintetizar qué tienen en común cosas dispares para luego poder decir: éste es el fenómeno y éstas son variaciones de la misma fórmula.

siglo veintiuno editores

Las paradojas de Bertrand Russell

Bertrand Russell vivió 97 años: desde 1872 hasta 1970.[22] Nació en Inglaterra como miembro de una familia muy rica y ligada con la realeza británica. Vivió una vida llena de matices, abogó en contra de la guerra, peleó contra la religión (cualquier manifestación de ella), estuvo preso en varias oportunidades, se casó cuatro veces (la última a los 80 años) y tuvo múltiples experiencias sexuales de las que siempre se manifestó orgulloso. Si bien fue uno de los grandes pensadores y matemáticos del siglo XX, ganó un premio Nobel de *Literatura* en 1950. Fue profesor en Harvard, en Cambridge y en Berkeley.

En fin: fue un sujeto muy especial. Ahora bien: escapa al objetivo de este libro contar todos sus logros dentro del terreno de la lógica. Pero sin ninguna duda, uno de los capítulos más interesantes tiene que ver con su célebre paradoja *de los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos.*

Antes de que pase a la sección siguiente, le propongo que me siga con tres ejemplos. Y después volvemos sobre el tema.

A) SOBRE LOS BARBEROS EN ALTA MAR

Un barco sale lleno de marineros y se dirige a una misión que lo tendrá muchos días en alta mar. El capitán advierte con disgusto que alguno de los integrantes del barco no se afeitan todos los días. Y como en el barco había un marinero-barbero, lo convoca a su camarote y le da la siguiente instrucción:

"Desde mañana, toda persona del barco que no se afeite a sí misma, la afeita usted. A los que quieren afeitarse solos, no hay

[22] Hay una excelente biografía de Russell (*The Life of Bertrand Russell —La vida de Bertrand Rusell—* publicada en 1976 en la que aparece una pintura perfecta de esta personalidad del siglo XX).

problemas. Usted ocúpese de los que no lo hacen. Es una orden".

El barbero se retiró y a la mañana siguiente, ni bien se despertó (aún en su camarote), se dispuso a cumplir la orden del capitán. Pero antes, naturalmente, fue hasta el baño. Cuando se disponía a afeitarse, se dio cuenta de que *no podía hacerlo*, porque el capitán había sido muy claro: él sólo podía afeitar a los que no se afeitaban a sí mismos. O sea, que en tanto que barbero no podía intervenir en afeitarse. Debía dejarse la barba para no infringir la norma de sólo afeitar a los que no se afeitan a sí mismos. Pero al mismo tiempo, advirtió que no podía dejarse crecer la barba porque incumpliría también la orden del capitán, que le dijo que no permitiera que ningún integrante del barco no se afeitara. Él, entonces, tenía que afeitarse.

Desesperado porque ni podía afeitarse (porque el capitán le dijo que sólo se ocupe de los que no se afeitaban a sí mismos) ni podía dejarse la barba (ya que el capitán no lo hubiera tolerado), el barbero decidió tirarse por la borda (o pedirle a alguien que lo afeite a él…)

B) SOBRE QUIEN DEBÍA MORIR AHORCADO

En una ciudad en donde las cosas erradas se pagaban caras, el rey decidió que una persona debía ser ejecutada. Y para ello, decidió ahorcarlo. Para darle un poco más de sabor, colocaron en dos plataformas dos horcas. A una la llamaron "altar de la verdad" y a la otra, "el altar de la mentira".

Cuando estuvieron frente al reo, le explicaron las reglas:

"Tendrás oportunidad de decir tus últimas palabras, como es de estilo. De acuerdo con que lo que digas sea verdad o mentira, serás ejecutado en este altar (señalando el de la verdad) o en el otro. Es tu decisión".

El preso pensó un rato y dijo que estaba listo para pronunciar sus últimas palabras. Se hizo silencio y todos se prepararon para escucharlo. Y dijo: "ustedes me van a colgar en el altar de la mentira".

"¿Es todo?", le preguntaron.

"Sí", respondió.

Los verdugos se acercaron a esta persona y se dispusieron a llevarla al altar de la mentira. Cuando lo tuvieron al lado, uno de ellos dijo:

"Un momento por favor. No podemos colgarlo acá, porque si lo hiciéramos sus últimas palabras habrían sido ciertas. Y para cumplir con las reglas, nosotros le dijimos que lo colgaríamos de acuerdo con la validez de sus últimas palabras. Él dijo que 'lo colgaríamos en el altar de la mentira'. Luego, allí no podemos colgarlo porque sus palabras serían ciertas".

Otro de los que participaba arriesgó: "Claro. Corresponde que lo colguemos en el altar de la verdad".

"Falso", gritó uno de atrás. "Si fuera así, lo estaríamos premiando ya que sus últimas palabras fueron mentira. No lo podemos colgar en el altar de la verdad".

Ciertamente confundidos, todos los que pensaban ejecutar al preso se trenzaron en una discusión eterna. El reo escapó y hoy escribe libros de lógica.

c) DIOS NO EXISTE

Seguramente, de todas las maneras de presentar la paradoja de Bertrand Russell, ésta es la más llamativa. Se pretende probar que Dios no existe, nada menos.

Pongámonos primero de acuerdo con lo que quiere decir Dios. Por definición, la existencia de Dios está igualada con la existencia de un ser todopoderoso. En la medida en que nosotros podamos probar que *nada ni nadie puede ser omnipotente*, entonces, nadie podrá adjudicarse el "ser Dios".

Vamos a probar esto "por el absurdo"; o sea, vamos a suponer que el resultado es cierto y eso nos va a llevar a una contradicción.

Supongamos que Dios existe. Entonces, como hemos dicho, en tanto que Dios, debe ser todopoderoso. Lo que vamos

a hacer es probar que *no puede haber nadie todopoderoso*. O lo que es lo mismo: no puede haber nadie que tenga *todos los poderes*.

Y hacemos así: si existiera alguien que tuviera todos los poderes, debería tener el poder de hacer piedras muy grandes. No le puede faltar este poder, porque si no, ya demostraría que no es todopoderoso. Entonces, concluimos que *tiene* que tener el poder de hacer *piedras muy grandes*. No sólo tiene que tener el poder de hacer piedras muy grandes, sino que tiene que ser capaz de hacer piedras *que él no pueda mover*... no le puede faltar este poder (ni ningún otro si vamos al caso). Luego, tiene que ser capaz de hacer piedras y que esas piedras sean muy grandes. Tan grandes, que eventualmente él no las pueda mover.

Ésta es la contradicción, porque si hay piedras que él no pueda mover, eso significa que le falta un poder. Y si tales piedras no las puede hacer, eso significa que le falta ese poder. En definitiva, cualquiera que pretenda ser todopoderoso adolecerá de un problema: o bien le falta el poder de hacer piedras tan grandes que él no pueda mover, o bien existen piedras que él no puede mover. De una u otra forma, no puede haber nadie *todopoderoso* (y eso era lo que queríamos probar).

Ahora bien. Una vez que hemos visto estas tres manifestaciones de la paradoja de Bertrand Russell, pensemos qué hay detrás.

En principio, un problema no trivial es dar una definición *correcta* de lo que es un *conjunto*. Si uno trata de hacerlo (y lo invito a que pruebe), termina usando algún sinónimo: *una colección, un agrupamiento, un agregado*, etcétera.

De todas formas, aceptemos la definición *intuitiva de lo que es un conjunto*, digamos, una *colección* de objetos que distinguimos por alguna característica: todos los números enteros, todos mis hermanos, los equipos que participaron en el último mundial de fútbol, las pizzas grandes que comí en mi vida, etcétera.

En general, "los elementos" de un conjunto, son los "miembros", los "que pertenecen". Si uno sigue con los ejemplos del párrafo anterior, los "números enteros" son los elementos del primer conjunto, "mis hermanos" son los elementos del segundo, la lista de países que participaron del último mundial serían los elementos del tercero, cada una de las pizzas que comí, son los elementos del cuarto, etcétera.

Uno suele denominar o llamar un conjunto con una letra mayúscula (por ejemplo: A, B, X, N) y a los elementos de cada conjunto, los pone "entre llaves":

A = {1,2,3,4,5}
B = {Argentina, Uruguay, Brasil, Chile, Cuba, Venezuela, México}
C = {Laura, Lorena, Máximo, Alejandro, Paula, Ignacio, Viviana, Sabina, Brenda, Miguel, Valentín}
N = {números naturales} = {1, 2, 3, 4, 5,…, 173, 174, 175…}
P = {números primos} = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31…}
M = {{Néstor y Graciela}, {Pedro y Pablo}, {Timo y Betty}}
L = {{Números Pares}, {Números Impares}}

Algunos conjuntos son finitos, como A, B y C. Otros son infinitos, como N y P.

Algunos conjuntos tienen como elementos a otros conjuntos, como M, que tiene como miembros a "parejas".

L, en cambio, tiene dos elementos, que son conjuntos a su vez. Es decir, *los elementos de un conjunto pueden ser conjuntos también*.

Una vez hechas todas las presentaciones, quiero plantear lo que se preguntó Russell:

"¿Puede un conjunto *tenerse a sí mismo como elemento*?"

Russell escribió: "me parece que hay una clase de conjuntos que sí y otra clase que no". Y dio como ejemplo el conjunto de las cucharitas de té. Obviamente, el conjunto de todas las cucharitas de té *no es una cucharita*, y por lo tanto, *no se contiene a sí mismo como elemento*. De la misma forma, *el conjunto de todas las personas que habitan la Tierra* no es una persona, y, por lo tanto, *no es un elemento de sí mismo*.

Aunque parezca antiintuitivo, Russell pensó también en conjuntos que *sí se contienen a sí mismos como elementos*. Por ejemplo: el conjunto de todas las cosas que *no son cucharitas de té*. Este conjunto es el que contiene cucharitas, sí, pero no de té, tenedores, jugadores de fútbol, pelotas, almohadas, aviones de distinto tipo, etcétera. Todo, *menos cucharitas de té*.

Lo que queda claro es que este nuevo conjunto (el que consiste en todo lo que *no sea una cucharita de té)* ¡no es una cucharita de té! Y por lo tanto, como no es una cucharita de té, *tiene que ser un elemento de sí mismo*.

Otro ejemplo que dio Russell es el siguiente: llamemos A al conjunto de todos los conjuntos que pueden describir sus miembros usando veinte palabras o menos. (En realidad, Russell lo planteó en inglés, pero para este argumento, poco importa.)

Por ejemplo, el conjunto de "todos los libros de matemática", es un elemento de A, ya que se usan sólo cinco palabras para describir los elementos de él. De la misma forma, "todos los animales de la Patagonia" también es un elemento de A. Y el conjunto de "todas las sillas que hay en Europa" es otro elemento de A.

Ahora bien, los invito a pensar lo siguiente: ¿pertenece A a sí mismo? Es decir: ¿es A un elemento de sí mismo? Para que esto sea cierto, los elementos de A deberían poder ser descriptos usando veinte palabras o menos. Y justamente, hemos definido a A como el conjunto cuyos elementos son "conjuntos cuyos elementos puedan ser descriptos usando veinte palabras o menos". De esta forma, A resulta un subconjunto de sí mismo.

A partir de este momento, entonces, podemos considerar dos clases de conjuntos: los que se contienen a sí mismos como elementos y los que no.

Hasta acá, todo bien. Pero Russell dio un paso más. Consideró

R = "el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos"
= {todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos} (**)

Por ejemplo, R tiene como elementos al conjunto de "todas las capitales de países sudamericanos", al conjunto de "todos mis hermanos", "todos los canguros de Australia", etcétera. Y muchos más, obviamente.

Y por fin, *la* pregunta (del millón):

"¿Es R un conjunto que se contiene a sí mismo como elemento?"

Analicemos las dos posibles respuestas.

a) Si la respuesta es sí, entonces R se contiene a sí mismo como elemento. O sea, R es un elemento de R. Pero como se ve en (**), R *no puede ser elemento de sí mismo, porque si lo fuera, no podría ser un elemento de R*. Luego, R no puede ser un elemento de sí mismo.
b) Si la respuesta es no, o sea, R no es un elemento de sí mismo, *entonces R debería pertenecer a R*, ya que R está formado, justamente, por los conjuntos que *no se contienen a sí mismos como elementos*.

Este problema es el que subyace en los tres ejemplos que presenté al principio de este capítulo. Es la *paradoja de Bertrand Russell*.

Parece imposible decidir si el conjunto cuyos elementos son los conjuntos que no se contienen a sí mismos como elementos *pertenece o no pertenece al conjunto*.

Luego de muchos años, los científicos dedicados a la investigación en lógica se pusieron de acuerdo en establecer que cualquier conjunto que se tuviera a sí mismo como elemento *no es un conjunto*, y de esa forma resolvieron (en apariencia) la discusión. En realidad, el problema quedó escondido "debajo de la alfombra".

Biografía de Pitágoras

Pitágoras de Samos es considerado un profeta y místico, nacido en Samos, una de las islas Dodecanesas, no muy lejos de Mileto, el lugar en donde nació Tales. Algunos pintan a Pitágoras como alumno de Tales, pero eso no parece muy probable debido a la diferencia de casi medio siglo entre ambos. Lo que sí es muy probable es que Pitágoras haya ido a Babilonia y a Egipto, e incluso a la India, para tener información de primera mano sobre matemática y astronomía, y eventualmente, también sobre religión.

Pitágoras fue, casualmente, contemporáneo de Budha, de Confucius y de Lao-Tze, de manera que el siglo estaba en plena ebullición tanto desde el punto de vista de la religión, así como de la matemática.

Cuando retornó a Grecia, se estableció en Crotón, en la costa sudeste de lo que ahora es Italia, pero en ese momento se conocía como "La Magna Grecia". Ahí estableció una sociedad secreta que hacía recordar un culto órfico salvo por su base matemática y filosófica.

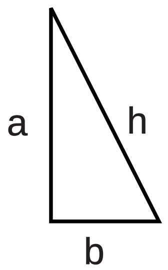
Que Pitágoras permanezca como una figura oscura se debe en parte a la pérdida de todos los documentos de esa época. Algunas biografías de Pitágoras fueron escritas en la antigüedad, inclusive por Aristóteles, pero no sobrevivieron. Otra dificultad en identificar claramente la figura de Pitágoras obedece al hecho de que la orden que él estableció era comunal y secreta. El conocimiento y la propiedad eran comunes, de manera tal que la atribución de los descubrimientos no se le hacía a alguien en particular, sino que era considerado patrimonio del grupo. Es por eso que es mejor no hablar del trabajo de Pitágoras, sino de las contribuciones de "los pitagóricos".

El teorema de Pitágoras

Hace muchos años, Carmen Sessa, mi amiga y extraordinaria referente en cualquier tema que tenga que ver con la matemática, me acercó un sobre con varias demostraciones del Teorema de Pitágoras. No recuerdo de dónde las había sacado, pero ella estaba entusiasmada al ver cuántas maneras distintas había de comprobar un mismo hecho. Es más: tiempo después supe que hay un libro (*The Pythagorean Proposition*) que contiene 367 pruebas de este teorema y que fue reeditado en 1968.

De todas formas, y volviendo a las pruebas que me había dado Carmen, hubo una que me dejó fascinado por su simpleza. Mas aún: a partir de ese momento (última parte de la década del 80) nunca paro de repetirla. Y de disfrutarla. Aquí va:

Se tiene un triángulo rectángulo T, de lados *a, b* y *h*. (Se llama triángulo rectángulo a un triángulo en el que uno de los án-



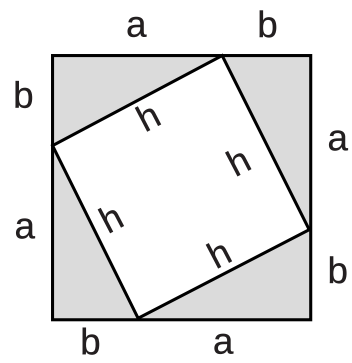
gulos es de 90 grados, también llamado ángulo recto.)

Imaginemos que el triángulo T está hecho "pegando" tres hilos. Supongamos que se le puede "cortar" el lado *h,* y que uno

puede "estirar" los lados *a* y *b.*

Con este nuevo "lado", de longitud (a+b), fabricamos dos cuadrados iguales. Cada lado del cuadrado mide (a+b).

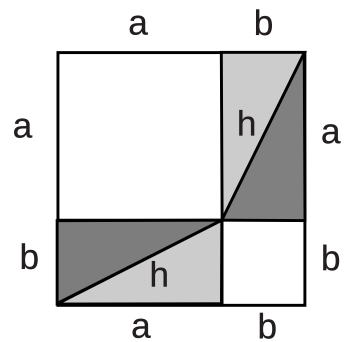
Marcamos en cada cuadrado los lados *a* y *b,* de manera tal



de poder dibujar estas figuras:

Ahora, observemos en cada cuadrado cuántas veces aparece el triángulo T (para lo cual hay que marcar en un dibujo los cuatro triángulos T en cada cuadrado).

Como los cuadrados son iguales, una vez que hemos descubierto los cuatro cuadrados en cada uno de ellos, la superficie que



queda “libre” en cada uno *tiene* que ser la misma.

En el primer cuadrado, quedan dos “cuadraditos” de superficies a^2 y b^2 respectivamente. Por otro lado, en el otro cuadrado, queda dibujado un “nuevo” cuadrado de área h^2.

Conclusión: “tiene” que ser

$$a^2 + b^2 = h^2$$

que es justamente lo que queríamos probar: “en todo triángulo rectángulo se verifica que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”.

En este caso, los catetos son a y b, mientras que la hipotenusa es h.

¿No es una demostración preciosa? Es sólo producto de una idea maravillosa que no requiere ninguna herramienta complicada.[23] Sólo sentido común.[24]

Historia de Carl Friedrich Gauss

Muchas veces solemos decirles a los jóvenes que lo que están pensando está mal, simplemente porque no lo están pensando como lo pensamos nosotros. Así les enviamos un mensaje enloquecedor, equivalente al que hacemos cuando les enseñamos a hablar y caminar en los primeros doce meses de vida, para pedirles que se queden callados y quietos en los siguientes doce años.

[23] Este teorema fue descubierto en una escritura en Babilonia, entre 1900 y 1600 antes de Cristo. Pitágoras vivió entre 560 y 480 antes de Cristo, pero si bien se le adjudica a él la solución del problema, no está claro si fue él o alguno de sus discípulos. E incluso esta posibilidad tampoco es necesariamente cierta.

[24] El teorema es *reversible*, en el sentido de que si un triángulo de lados *a, b* y *h*, cumple con la ecuación

$$a^2 + b^2 = h^2$$

entonces, el triángulo tiene que ser rectángulo. Piensen que éste es un resultado muy interesante. Es que podría pasar que fuera cierto el teorema de Pitágoras para otros triángulos que no fueran rectángulos. Sin embargo, lo que dice este apartado es que la propiedad de que el cuadrado de la hipotenusa sea igual a la suma de los cuadrados de los catetos, “caracteriza” a un triángulo: lo obliga a ser rectángulo.

El hecho es que esta historia tiene que ver con alguien que pensó diferente. Y en el camino, resolvió un problema en forma impensada (para el docente). La historia se sitúa alrededor de 1784, en Brunswick, Alemania.

Una maestra de segundo grado de la escuela primaria (de nombre Buttner, aunque los datos afirman que estaba acompañada por un asistente, Martin Bartels también) estaba cansada del “lío” que hacían los chicos, y para tenerlos quietos un poco, les dio el siguiente problema: “calculen la suma de los primeros cien números”. La idea era tenerlos callados durante un rato. El hecho es que un niño levantó la mano casi inmediatamente, sin siquiera darle tiempo a la maestra para que terminara de acomodarse en su silla.

—¿Sí? —preguntó la maestra mirando al niño.

—Ya está, señorita —respondió el pequeño—. El resultado es 5.050.

La maestra no podía creer lo que había escuchado, no porque la respuesta fuera falsa, que no lo era, sino porque estaba desconcertada ante la rapidez.

—¿Ya lo habías hecho antes? —preguntó.

—No, lo acabo de hacer.

Mientras tanto, los otros niños recién habían llegado a escribir en el papel los primeros dígitos, y no entendían el intercambio entre su compañero y la maestra.

—Vení y contanos a todos cómo lo hiciste.

El jovencito, se levantó de su asiento y sin llevar siquiera el papel que tenía adelante se acercó humildemente hasta el pizarrón y comenzó a escribir los números:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

—Bien —siguió el jovencito—. Lo que hice fue sumar el primero y el último número (o sea, el 1 y el 100). Esa suma da 101.

—Después, seguí con el segundo y el penúltimo (el 2 y el 99). Esta suma vuelve a dar 101.

—Luego, separé el tercero y el antepenúltimo (el 3 y el 98). Sumando estos dos, vuelve a dar 101.

—De esta forma, "apareando" los números así y sumándolos, se tienen 50 pares de números cuya suma da 101. Luego, 50 veces 101 resulta en el número 5.050 que es lo que usted quería.

La anécdota termina aquí. El jovencito se llamaba Carl Friedrich Gauss. Nació en Brunswick, el 30 de abril de 1777 y murió en 1855 en Gottingen, Hanover, Alemania. Gauss es considerado el "príncipe de la matemática" y fue uno de los mejores (si no el mejor) de la historia.

De todas formas, no importa aquí cuán famoso terminó siendo el niñito, sino que lo que yo quiero enfatizar es que en general, uno tiende a pensar de una determinada manera, como si fuera "lo natural".

Hay gente que desmiente esto y encara los problemas desde un lugar diferente. Esto no significa que los vea así a *todos* los problemas que se le presentan, pero eso importa poco también.

¿Por qué no permitir que cada uno piense como quiera? Justamente, la tendencia en los colegios y las escuelas, e incluso la de los propios padres, es la de "domar" a los niños (en un sentido figurado, claro), en donde lo que se pretende es que vayan por un camino que otros ya recorrieron.

Es razonable que así sea, porque esto ofrece a los adultos, sin ninguna duda, mayores seguridades, pero inexorablemente termina por limitar la capacidad creativa de quienes todavía tienen virgen parte de la película de la vida.

Gauss y su manera sutil, pero elemental, de sumar los primeros cien números, son sólo un ejemplo.[25]

[25] ¿Cómo harían ustedes para sumar ahora los primeros mil números? ¿Y los primeros n números? ¿Es posible concluir una fórmula general?

La respuesta es sí:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \{n(n+1)\}/2$$

Conjetura de Goldbach

Estoy seguro de que a ustedes les habrá pasado alguna vez que se tropezaron con una idea pero no estaban tan seguros de que fuera cierta y se quedaron un rato pensándola. Si no les ocurrió nunca, empiecen ahora, porque nunca es tarde. Pero lo maravilloso es poder "entretener" en la cabeza de uno algún problema cuya solución sea incierta. Y darle vueltas, mirarlo desde distintos ángulos, dudar, empezar de nuevo. Enfurecerse con él. Abandonarlo para reencontrarlo más tarde. Es una experiencia inigualable: se las recomiendo.

En la historia de la ciencia, de las distintas ciencias, hay muchos ejemplos de situaciones como las que expuse en el párrafo anterior. En algunos casos, los problemas planteados pudieron resolverse sencillamente. En otros, las soluciones fueron mucho más difíciles, llevaron años (hasta siglos). Pero como ustedes ya sospechan a esta altura, hay muchos de los que todavía no se sabe si son ciertos o falsos. Es decir: hay gente que ha dedicado su vida a pensar que el problema tenía solución, pero no la pudieron encontrar. Y otros muchos que pensaron que era falso, pero no pudieron encontrar un contraejemplo para exhibir.

De todas formas, resolver alguna de las que aún permanecen "abiertas", traería fama, prestigio y también dinero al autor.

En este capítulo quiero contar un poco sobre una conjetura conocida con el nombre de "La Conjetura de Goldbach". El 7 de junio de 1742 (piensen entonces que ya pasaron 263 años), Christian Goldbach le escribió una carta a Leonhard Euler (uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos), sugiriéndole que pensara una demostración para la siguiente afirmación:

"todo número par positivo, mayor que dos, se puede escribir como la suma de dos números primos".

Por ejemplo, veamos los casos más fáciles:

4 = 2 + 2
6 = 3 + 3
8 = 3 + 5
10 = 5 + 5
12 = 5 + 7
14 = 7 + 7 = 3 + 11
16 = 5 + 11
18 = 7 + 11 = 5 + 13
20 = 3 + 17 = 7 + 13
22 = 11 + 11
24 = 11 + 13 = 7 + 17
…
864 = 431 + 433
866 = 3 + 863
868 = 5 + 863
870 = 7 + 863

y así podríamos seguir.

Hasta hoy (agosto de 2005), se sabe que la conjetura es cierta para todos los números pares que sean menores que $4 \cdot 10^{13}$.

La novela *Uncle Petros & Goldbach's Conjecture*[26] del escritor australiano (aunque creció en Grecia) Apostolos Doxiadis, publicada en 1992, en griego y traducida a diversos idiomas en el año 2000, es la que promovió que las compañías editoras Faber y Faber de Gran Bretaña y Bloomsbury Publishing de Estados Unidos ofrecieran *un millón de dólares* a quien pudiera resolver *la Conjetura*. Doxiadis es también reconocido como uno

[26] La traducción es *Tío Petros y la Conjetura de Goldbach*; cabe destacar que el libro resultó *un best-seller* internacional.

de los iniciadores de las novelas con "trama matemática" y ha dirigido además teatro y cine. Pero lo que importa en este caso es que la popularidad alcanzada por la novela devino en la oferta (que nadie pudo reclamar aún) de los editores.

Hay otra Conjetura también planteada por Goldbach, conocida con el nombre de "La Conjetura Impar de Goldbach", que dice que todo número *impar* mayor que cinco se escribe como la suma de *tres números primos.* Hasta el día de hoy (agosto del 2005) también permanece como un problema abierto de la matemática, aunque se sabe que es cierta hasta números impares de siete millones de dígitos. Si bien toda conjetura puede resultar falsa, la opinión "educada" de los expertos en teoría de números es que lo que pensó Goldbach *es cierto* y sólo es una cuestión de tiempo hasta que aparezca la demostración.

Historia de Srinivasa Ramanujan

Conocemos muy poco de la historia y la ciencia oriental. O en todo caso, todo lo que no sea americano o europeo nos queda *entre lejos y desconocido.* Sin embargo, hay varias historias interesantísimas, por no decir que hay toda una ciencia que nos queda a trasmano y que goza de extraordinaria salud.

Srinivasa Ramanujan (1887-1920) fue un matemático indio que profesaba la religión hindú. De origen muy humilde, sólo pudo asistir a una escuela pública gracias a una beca. Sus biógrafos dicen que les recitaba a sus compañeros las cifras decimales del número π *(pi)* y a los doce años se sentía muy cómodo con todo lo que tuviera que ver con *trigonometría.* A los 15 años le presentaron un libro con ¡seis mil! teoremas conocidos, pero sin demostración. Ésa fue su formación matemática básica.

Entre 1903 y 1907, decidió no dar más exámenes en la universidad y dedicó su tiempo a investigar y pensar sobre las curiosidades matemáticas. En 1912, sus amigos lo estimularon a comunicar todos sus resultados a tres distinguidos matemáticos. Dos de ellos no le contestaron nunca. El tercero, Godfrey Harold Hardy (1877-1947), matemático inglés de Cambridge, fue el único que lo hizo. Hardy era considerado, en ese momento, el matemático más prominente de su generación.

Hardy escribiría después que cuando recibió la carta, estuvo a punto de tirarla, pero esa misma noche se sentó con su amigo John Littlewood y se pusieron a descifrar la lista de 120 fórmulas y teoremas que proponía este señor tan curioso que escribía desde la India. Horas más tarde, creían estar ante la obra de un genio.

Hardy fue un hombre de una personalidad muy difícil. Tenía su propia escala de valores para el genio matemático. Con el tiempo, ésta se hizo pública:

100 para Ramanujan
80 para David Hilbert
30 para Littlewood
25 para sí mismo

Algunas de las fórmulas de Ramanujan lo desbordaron; y comentando su asombro, Hardy escribió: "forzoso es que fueran verdaderas, porque de no serlo, nadie habría tenido la imaginación necesaria para inventarlas".

Hardy invitó a Ramanujan a Inglaterra en 1914 y comenzaron a trabajar juntos. En 1917, Ramanujan fue admitido en la Royal Society de Londres y en el Trinity College, transformandose en el primer matemático de origen *indio* que lograba tal honor.

Sin embargo, la salud de Ramanujan fue siempre una preocupación. Falleció tres años después de mudarse a Londres cuando su cuerpo ya no pudo resistir en una batalla desigual con la tuberculosis…

Ahora, una anécdota. Se cuenta que Ramanujan ya estaba in-

ternado en el hospital en Londres del cual ya no saldría. Hardy lo fue a visitar. Llegó en un taxi y subió a la habitación. Con la idea de romper el hielo, le dijo que había viajado en un taxi cuya patente era 1.729, *un número aburrido e insulso.*

Ramanujan, sentado a medias en la cama, lo miró y le dijo: "No crea. Me parece un número muy interesante: es el primer número entero que se puede escribir como suma de dos cubos de diferentes maneras".

Ramanujan tenía razón:

$$1.729 = 1^3 + 12^3$$

y también

$$1.729 = 9^3 + 10^3$$

Además 1.729 es divisible por la suma de sus dígitos: 19
1.729 = 19 . 91
Otros números que cumplen esto:

(9, 15) y (2, 16)
(15, 33) y (2, 34)
(16, 33) y (9, 34)
(19, 24) y (10, 27)

Es decir:

$$9^3 + 15^3 = 729 + 3.375 = 4104 = 2^3 + 16^3 = 8 + 4.096$$
$$15^3 + 33^3 = 3.375 + 35.937 = 39.312 = 2^3 + 34^3 = 8 + 39.304$$
$$16^3 + 33^3 = 4.096 + 35.937 = 40.033 = 9^3 + 34^3 = 729 + 39.304$$
$$19^3 + 24^3 = 6.859 + 13.824 = 20.683 = 10^3 + 27^3 = 1.000 + 19.683$$

En definitiva, Ramanujan estaba muy en lo cierto… 1.729 no es un número tan insulso.

Los modelos matemáticos de Oscar Bruno

Oscar Bruno es doctor en matemática. Trabaja en el California Institute of Technology, más conocido como CalTech. Se dedica a la investigación en áreas de matemática aplicada, ecuaciones en derivadas parciales y ciencia computacional. En su trabajo se ocupa de predecir las características de diseños de ingeniería, usando métodos matemáticos y programas de computadoras.

Hace un par de años le pedí que me diera algunas referencias sobre lo que hacía. Y me escribió estas líneas que ahora transcribo, con su autorización, claro.

—¿Cómo se usan los modelos matemáticos para mejorar la calidad de un objeto antes de construirlo?

Las ventajas ofrecidas por tales métodos son muchas y claras. Por un lado es mucho más sencillo y menos costoso simular un diseño que construirlo. Por el otro, un modelo matemático puede revelar información que es muy difícil o imposible de adquirir experimentalmente.

Por supuesto, la validez de estos modelos debe ser verificada a través de comparaciones con experimentos, pero, una vez que un modelo está verificado, se puede tener un alto grado de confiabilidad en sus predicciones.

Yo me dedico a generar y verificar modelos matemáticos para problemas de ciencia de materiales. Y también me ocupo de diseñar métodos numéricos para una variedad de áreas de la ciencia. Estos métodos numéricos permiten implementar los modelos matemáticos en computadoras.

Últimamente he estado trabajando en una variedad de problemas:

a) Producción de radares,
b) Producción de diamante a partir de grafito por medio de ondas de choque,
c) Diseño de un microscopio basado en rayos láser, en conjunto con un grupo de biólogos y de físicos,
d) Predicción financiera,
e) Diseño de materiales compuestos de goma y pequeñísimas partículas de hierro, llamados sólidos magnetoreológicos (cuya elasticidad y forma pueden ser alterados a través de la aplicación de un campo magnético).

No quiero dejar de mencionar que progresos en estos tipos de problemas de predicción pueden llevar a:

a) nuevos conocimientos científicos,
b) mejoras o abaratamientos en procesos de producción,
c) diseños de nuevos artefactos.

Por ejemplo, el microscopio que mencioné antes está siendo diseñado con la intención de hacer posible la observación de la actividad de células vivas, sus intercambios de fluidos, interacciones con microorganismos, etcétera.

Los materiales compuestos basados en goma, por otro lado, son buscados para mejorar los mecanismos de reducción de vibraciones en automóviles: dependiendo del tipo de camino, es preferible combinar gomas con distintos grados de dureza.

Usando campos magnéticos y materiales compuestos basados en goma, se puede variar el tipo de dureza y obtener una reducción sensible de vibraciones que son más efectivas para todo tipo de caminos.

El diseño del compuesto más conveniente (qué tipos de partículas utilizar, en qué cantidad, qué tipo de goma es más ventajoso) se facilita enormemente gracias a los métodos numéricos. Ciertamente, en vez de producir un prototipo con cada combinación posible de materiales básicos, se utiliza un programa de *computadora por medio del cual, para determinar las características de un cierto compuesto, sólo es necesario especificar —cuando la computadora lo requiere— una serie de números que caracterizan las propiedades básicas de los componentes utilizados.*

Hasta aquí, las reflexiones de Oscar. Ahora agrego yo: muchas veces, como matemáticos, recibimos la pregunta: "¿para qué sirve lo que usted hace? ¿Cómo se usa? ¿Gana plata con eso?"

Cuando se trata de matemáticos que dedican su vida a la producción de ciencia con aplicaciones más evidentes o más directas, las respuestas, como las de Bruno, suelen ser más claras o más contundentes. En cambio, cuando esas respuestas provienen de científicos que dedican su vida a la investigación básica o a la vida académica, no suelen convencer al interlocutor. El ciudadano común se siente apabullado y calla, pero no está seguro de que le hayan contestado lo que preguntó. No entiende.

Uno de los propósitos de este libro es acercar a las partes. Mostrar la belleza que contiene pensar un problema cuya respuesta uno ignora. Sobre todo eso: pensar, imaginar caminos, disfrutar de la duda. Y en todo caso, aprender a coexistir con el desconocimiento, pero siempre con la idea de derrotarlo, de descubrir el velo que esconde la verdad.

Respuesta de Alan Turing sobre diferencias entre una máquina y una persona

De acuerdo con lo que leí en un *Diccionario de Ideas* de Chris Rohmann, esto fue lo que dijo Alan Turing cuando le preguntaron cómo se podía saber si una máquina era inteligente:

La máquina es inteligente si puede pasar este test: poner una

persona a hacerle preguntas en paralelo a una máquina y a otra persona, sin que el que pregunte sepa quién es el que da las respuestas.

Si después de un tiempo el interrogador no puede distinguir si las respuestas provenían del humano, entonces la máquina podrá ser declarada inteligente.

Probabilidades y estimaciones

Un poco de combinatoria y probabilidades

El número de resultados posibles al tirar una moneda es *dos*. Obviamente, cara y ceca. Si ahora tiramos *dos monedas* y queremos contar el número de resultados posibles, tenemos:

Cara-Cara
Cara-Ceca
Ceca-Cara
Ceca-Ceca

Es decir, hay cuatro resultados posibles. Noten la importancia del orden, porque si no habría *sólo tres resultados posibles:*

Cara-Cara
Cara-Ceca o Ceca-Cara (que serían el mismo)
Ceca-Ceca

Al tirar tres monedas, los casos posibles *si importa el orden* son $2^3 = 8$.

En cambio, si no importa el orden sólo quedan *cuatro casos*. (Los invito a que piensen en cada caso por qué pasa esto; es más: los invito a que piensen qué pasaría si tirara *n* monedas

siglo veintiuno editores

y queremos calcular la cantidad de resultados posibles *si importa y si no importa el orden)*. Y ahora pasemos a los dados.

El número de resultados posibles al tirar un dado es seis.
El número de resultados posibles al tirar dos dados es:

$$6 \,.\, 6 = 6^2 = 36$$

Ahora bien: si uno tira un dado rojo primero y un dado verde después, ¿cuál es el número de resultados posibles en donde el dado verde dé un resultado *diferente* del rojo?

La respuesta es 6 . 5 = 30 (hagan la cuenta si no están convencidos)

Ahora, si tenemos tres dados, el número de resultados posibles es:

$$6^3 = 216$$

Pero si queremos que el resultado que apareció en el primero sea diferente del segundo y diferente del tercero, entonces los casos posibles son:

$$6 \,.\, 5 \,.\, 4 = 120$$

Estos ejemplos nos permiten pensar qué pasa en otros casos. Por ejemplo, cuando uno juega a la lotería. Se trata de extraer seis números entre el 1 y el 40, pero *ordenados*. Luego, los casos posibles son:

40 . 39 . 38 . 37 . 36 . 35 = 2.763.633.600 posibles.

Recuerden que la *definición de probabilidad de que ocurra un evento resulta del cociente entre los casos favorables sobre los*

casos posibles.[27] De allí que la probabilidad de que salga cara al tirar una moneda es 1/2, porque hay *un solo caso favorable (cara)* y dos casos posibles (cara y ceca). La probabilidad de que salgan primero *cara* y después *ceca* al tirar dos monedas (siempre que importe el orden) es de 1/4, porque hay *un solo caso favorable (cara-ceca) y* cuatro casos posibles (cara-cara, cara-ceca, ceca-cara y ceca-ceca).

Ahora volvamos al ejemplo que aparece en los casos posibles de la lotería. Es interesante revisar este número, porque la probabilidad de ganar la lotería es ciertamente muy baja. Uno tiene *una posibilidad entre más de dos mil setecientos sesenta millones.* Es difícil, vea.

Si uno fuera generoso, y decide olvidarse del orden, uno tiene que dividir por 6! (¿recuerdan cuando definimos el número factorial en la página 58?). Esto sucede porque una vez que uno eligió los seis números, hay 120 maneras de reordenarlos sin cambiarlos. Lo que en matemática se llama una *permutación.*

Luego, si uno divide el número (2.763.633.600) por 120, se obtiene 3.838.380. Es decir, si a uno lo dejaran jugar a la lotería extrayendo seis números entre los primeros cuarenta, pero sin importar el orden en que salen, entonces la probabilidad de ganar aumenta fuertemente. Ahora es una entre 3.838.380.

Seguimos con el juego: pasemos ahora a los juegos de cartas. En un mazo de 52 cartas, ¿cuántas posibles manos de cinco cartas nos pueden tocar? (observen que cuando a uno le reparten cartas en un juego, el orden es irrelevante. Lo que importa es la

[27] Estoy suponiendo que los casos tienen igual probabilidad de salir. O sea, ni una moneda está cargada, ni un dado tiene una cara más pesada, ni el tambor de la ruleta tiene algún sector más favorable, etcétera. En otras palabras: los casos tienen la misma probabilidad de salir.

mano que se obtuvo y no el orden en el que las tiene tomadas con la mano).El resultado es:

$$52 . 51 . 50 . 49 . 48 / (5!) = 2.598.960$$

Si ahora la pregunta es de cuántas maneras me pueden tocar cuatro ases, la respuesta es 48, ya que ésas son las únicas posibilidades para la quinta carta (las otras cuatro ya están elegidas: son ases, y como en total eran 52 cartas menos los cuatro ases, quedan 48). La probabilidad de que toque una mano con cuatro ases es 48/(2.598.960) que es casi 1 en 50.000. O sea que para los que juegan al póquer y tienen intriga por saber cuál es la probabilidad de tener un póquer de ases, es bastante baja también (estoy suponiendo que se reparten sólo cinco cartas y que no hay reposiciones. Esto lo escribo para los puristas que van a observar que uno puede desprenderse de ciertas cartas y pedir otras).

¿Y si uno quisiera saber la probabilidad de tener un póquer de reyes? ¿Variaría la probabilidad? La respuesta es no, porque que las cartas que se repitan sean ases o reyes o reinas o lo que sea no modifica en nada el argumento que se usa. Lo hace más pintoresco, en todo caso.

El que sigue es un hecho importante: si dos eventos son independientes, en el sentido que el resultado de uno es independiente del resultado del otro, entonces *la probabilidad de que ambos sucedan se obtiene multiplicando las probabilidades de ambos.*

Por ejemplo, la probabilidad de que salgan dos caras en dos tiradas de una moneda es:

$$(1/2) . (1/2) = 1/4$$

(hay cuatro casos posibles: cara-cara, cara-ceca, ceca-cara y ceca-ceca; de ellos, sólo uno es favorable: cara-cara. De allí el 1/4).

La probabilidad de que salga un número en la ruleta es:

$$1/37 = 0{,}027\ldots$$

La de que salga un número "colorado" es 18/37 = 0,48648...

Pero que salga cinco veces seguidas "colorado" está medida por $(0.48648)^5 = 0{,}027\ldots$

O sea, el 2,7% de las veces. Éste es un episodio importante, porque lo que estamos midiendo tiene que ver con la probabilidad de que salgan cinco números "colorados" seguidos. Pero la probabilidad está calculada antes de que el croupier empiece a tirar.

Eso no es lo mismo que saber que si uno llega a jugar a una mesa de ruleta en un casino y pregunta "¿qué salió hasta acá?" Si le contestan que salieron cuatro números "colorados" seguidos, *eso no afecta la probabilidad del número que está por salir:* la probabilidad de que salga "colorado" es 18/37 = 0,48648... otra vez, y de que salga negro es también 18/37 = 0,48648... Y de que salga cero es 1/37 = 0,027027...

Pasemos ahora de juegos a personas (que pueden estar jugando juegos). Si una persona es tomada al azar, la probabilidad de que *no* hubiera nacido en el mes de julio es de 11/12 = 0,9166666... (Es decir, hay casi un 92% de posibilidades de que no haya nacido en julio.)[28] Pero la probabilidad tiene que ser un número mayor o igual que cero y menor o igual que uno. Por eso, si uno habla en términos probabilísticos, debe decir: la probabilidad es 0,916666... En cambio, si uno prefiere hablar de *porcentajes*, debe decir que el porcentaje de posibilidades de que no hubiera nacido en julio supera el 91,66%.

(Nota: la probabilidad de que un evento suceda es siempre un número entre cero y uno. En cambio, el porcentaje de posibilidades de que ese mismo evento suceda, es siempre un número entre 0 y 100.)

[28] Para que esto sea estrictamente cierto, estoy suponiendo que todos los meses tienen el mismo número de días. Si no, sería como tener una *moneda cargada.*

Si uno toma cinco personas al azar, la probabilidad de que ninguna haya nacido en julio es

$$(11/12)^5 = 0{,}352\ldots$$

o sea, aproximadamente el 35,2% de las veces. Entienda esto bien: dadas cinco personas al azar la probabilidad de que *ninguna* de las cinco haya nacido en julio es aproximadamente 0,352 o, lo que es lo mismo, en más del 35% de las veces ninguna de las personas nació en julio.

Como escribí antes, que el mes en consideración sea julio es irrelevante. Lo mismo serviría para cualquier mes. Pero eso sí: hay que determinarlo de antemano. La pregunta (para que tenga la misma respuesta) tiene que ser ¿cuál es la probabilidad de que tomando cinco personas al azar, ninguna de las cinco hubiera nacido en el mes de… (y el lugar en blanco es para que sea rellenado por cualquier mes)?

Volvamos a los dados. ¿Qué es más probable: sacar al menos un 6 al tirar cuatro dados o sacar *dos seis al tirar dos dados*, si uno los tira 24 veces?

La probabilidad de "no" sacar un 6, es

$$5/6 = 0{,}833\ldots$$

En este caso, como se tira cuatro veces el dado, la probabilidad de "no" sacar un 6 es:

$$(5/6)^4 = 0{,}48\ldots$$

Luego, la probabilidad de sacar al menos un 6 al tirar un dado cuatro veces es aproximadamente

$$1 - 0{,}48 = 0{,}52$$

Por otro lado, la probabilidad de "no" sacar *dos seis al tirar dos dados, es*

$$(35/36) = 0{,}972\ldots$$

(los casos favorables de *no* sacar dos seis, son 35 de los 36 posibles).

De acuerdo con lo que aprendimos hasta aquí, si uno va a iterar el proceso 24 veces, se tiene el siguiente número:

$$(0{,}972)^{24} = 0{,}51\ldots$$

Es decir, la probabilidad de sacar dos números seis al tirar dos dados 24 veces, es

$$1 - (0{,}51) = 0{,}49\ldots$$

MORALEJA: es más probable sacar un seis al tirar un dado cuatro veces que sacar dos seis tirando dos dados 24 veces.

Encuesta con pregunta prohibida[29]

Este ejemplo muestra una manera sutil de evitar un problema. Supongamos que uno quiere encuestar un grupo de personas sobre un tema crítico, delicado. Pongamos, por caso, que uno

[29] Lo que sigue aquí es un extracto de lo que contó Alicia Dickenstein en el marco del Primer Festival de Ciencias que se hizo en Buenos Aires (*Buenos Aires Piensa*). Cuando la consulté a Alicia, ella me dijo que quien le comentó este método fue el doctor Eduardo Cattani, un matemático argentino que reside en Amherst, Massachusets. Y no es raro, ya que Eduardo es una persona de una curiosidad insaciable, gran profesional y, más que eso, un gran amigo. Fue el primer ayudante alumno que tuve en la facultad de Ciencias Exactas y Naturales, allí por el año 1965. Pasaron nada menos que cuarenta años.

quiere averiguar el porcentaje de jóvenes que consumieron alguna droga durante el colegio secundario.

Es muy posible que la mayoría se sienta incómodo si tuviera que contestar que sí. Naturalmente, eso arruinaría el valor de verdad de la encuesta.

¿Cómo hacer entonces para "circunvalar" el obstáculo del pudor o molestia que genera la pregunta?

En el ejemplo, el entrevistador le quiere preguntar a cada alumno si consumió alguna droga durante el secundario. Pero le dice que el método que van a usar es el siguiente:

El joven entrará en un "cuarto oscuro", como si fuera a votar, y se dispondrá a tirar una moneda. Nadie está viendo lo que él hace. Sólo se le pide que sea respetuoso de las reglas:

1) si salió cara debe responder "sí" (cualquiera sea la respuesta verdadera),
2) si salió ceca, debe responder la verdad.

De todas formas, el único testigo de lo que el joven hace o dice es él mismo.

Con este método, se espera al menos un 50% de respuestas positivas (que son las que provienen de que uno "estime" que la moneda salió cara la mitad de las veces). En cambio, cuando alguien dice que *no*, es porque la respuesta verdadera es que *no*. O sea, este joven *no se drogó*. Sin embargo, supongamos que hay un 70% de respuestas positivas (dijeron que *sí*). ¿No dice algo esto? Es decir, ¿no lo tienta decir que con estos datos uno podría sacar alguna conclusión?

Como siempre, los invito a que *piensen un poco solos*. Y después, sigan con el razonamiento. Más allá del número de respuestas positivas, uno *esperaba de antemano* que habría (al menos) un 50% de ellas. Y esto se produce porque uno supone que como la moneda *no está cargada*, la mitad de las veces debería salir cara. Con ese dato solo, uno sabe que, al salir del cuarto oscuro, la mitad de los participantes *debe decir que sí*. Pero al mismo tiempo, hay otro 20% de respuestas que son afirmativas y *NO provienen del hecho de que la moneda salió cara*. ¿Cómo interpretar este dato?

El hecho es que eso está diciendo que, de las veces que salió ceca (que es la otra mitad de las veces), un 20% de los alumnos dijo que *sí se había drogado*. En consecuencia, uno podría inferir (y lo invito a pensar conmigo), que al menos un 40% de los alumnos fue consumidor de alguna droga. ¿Por qué? Porque del 50% restante, el 20% (¡nada menos!) contestó que sí. Y, justamente, el 20% de ese 50% implica un 40% de las personas.

Este sistema evita "señalar" a quien contesta que sí y exponerlo a una situación embarazosa. Pero, por otro lado, mantiene viva la posibilidad de encuestar lo que uno pretende.

Para aquellos que conocen un poquito más de probabilidad y saben lo que es la *probabilidad condicional,* podemos exponer algunas fórmulas.

Si llamamos x a la probabilidad de responder que *sí,* entonces:

x = p ("salga cara") . p ("sí", si cara) + p ("salga ceca") . p ("sí", si ceca),

en donde definimos:

p ("salga cara") = probabilidad de que la moneda salga cara
p ("sí", si cara) = probabilidad de que el joven diga que sí, habiendo salido *cara* al tirar la moneda
p ("salga ceca") = probabilidad de que la moneda salga *ceca,*
p ("sí", si ceca) = probabilidad de que el joven diga que *sí,* habiendo salido *ceca* al tirar la moneda.

Por otro lado,

p (cara) = p (ceca) =1/2
p ("sí", si cara) = 1
p ("sí", si ceca) = es la probabilidad de drogarse, que es justamente lo que queremos calcular. Llamémosla P.[30]

Luego

x = 1/2 . 1 + 1/2 . P => P = 2 . (x-1/2) (*)

Por ejemplo, si el porcentaje de respuestas positivas hubiera sido de un 75% (o sea, 3/4 del total de las respuestas), reemplazando x por 3/4 en la fórmula (*), se tiene:

P = 2 . (3/4 – 1/2) = 2 . (1/4) = 1/2

Esto significaría que la *mitad* de la población estudiantil consumió alguna droga durante el colegio secundario.

Cómo estimar el número de peces en una laguna

Uno de los mayores déficits que tienen nuestros sistemas educativos, cuando se habla de matemática al menos, es que no se nos enseña a *estimar*. Sí. *A estimar.*

Eso sirve, en principio, para aprender a desarrollar el sentido común. ¿Cuántas manzanas tiene una ciudad? ¿Cuántas hojas

[30] En realidad, yo estoy suponiendo que las personas van a decir la verdad siempre. Como eso no siempre sucede, para ser más exacto habría que multiplicar aquí por un factor *corrector* que estimara esa probabilidad. Con todo, el ejemplo pretende *ilustrar* un camino, aunque no sea *todo lo preciso* que debiera.

puede tener un árbol? ¿Cuántos días vive en promedio una persona? ¿Cuántos ladrillos hacen falta para construir un edificio?

Para este capítulo tengo esta propuesta: aprender a estimar la cantidad de peces que hay en un determinado lago. Supongamos que uno está en los alrededores de una laguna. Es decir, un cuerpo de agua de proporciones razonables. Uno sabe que allí es posible pescar, pero querría estimar cuántos peces hay. ¿Cómo hacer?

Naturalmente, *estimar* no quiere decir *contar*. Se trata de poder adquirir una *idea* de lo que hay. Por ejemplo, uno podría conjeturar que en la laguna hay mil peces o que hay mil millones de peces. Obviamente, no es lo mismo. Pero ¿cómo hacer?

Vamos a hacer juntos una reflexión. Supongamos que uno consigue una red que pide prestada a unos pescadores. Y se pone a pescar hasta conseguir mil peces. Es importante que cualquier procedimiento que se haga para conseguir los mil peces no los mate, porque habrá que devolverlos al agua vivos. Lo que se hace inmediatamente una vez que uno los tiene todos, es *pintarlos de un color que no se borre con el agua o marcarlos* de alguna manera. Digamos que, para fijar las ideas, los pintamos de amarillo.

Los devolvemos al agua y esperamos un tiempo razonable, en donde "razonable" significa que les damos tiempo para que vuelvan a mezclarse con la población que habitaba la laguna. Una vez que estamos seguros, volvemos a sacar *con el mismo método*, otra vez, *mil peces*. Claro, algunos de los peces que obtenemos ahora estarán pintados y otros, no. Supongamos, siempre a los efectos de hacer las cuentas más fáciles, que entre los mil que acabamos de pescar ahora, aparecen sólo *diez* pintados de amarillo.

Esto quiere decir que *diez entre mil* es la proporción de *peces pintados* que hay en la laguna. (No avance si no comprende este argumento. Si entendió, siga en el párrafo siguiente. Si no, piense conmigo. Lo que hicimos después de pintarlos es tirar los mil peces a la laguna y darles tiempo a que se mezclen con los que había antes. Cuando volvemos a sacar nuevamente mil peces, es porque ya les dimos tiempo para que se mezclaran todos y que no se note ninguna diferencia entre los que pintamos antes y los que quedaron en el agua.)

Cuando volvemos a extraer los mil peces y vemos que hay *diez pintados de amarillo*, quiere decir que *diez de cada mil de los que hay en la laguna* están pintados. Pero si bien nosotros no sabemos cuántos peces hay, lo que sí sabemos es cuántos *peces pintados hay*. Sabemos que son mil. Pero entonces, si de cada mil, hay diez pintados (o sea, *uno de cada cien*), y en la laguna *sabemos* que hay mil pintados, y que los pintados representan el *uno por ciento del total de peces*, entonces, eso significa que el *uno por ciento de los peces que hay en la laguna es mil*. Luego, en la laguna tiene que haber *cien mil peces*.

Este método, obviamente *no exacto*, provee una estimación, no una certeza. Pero, ante la imposibilidad de *contar* todos los peces que hay, es preferible tener una idea.

El problema del palomar o *pigeon hole*

Una de las cosas que hacen (hacemos) los matemáticos, es buscar *patrones*. Es decir, buscar situaciones que se "repiten", se asemejan. Algo así como buscar peculiaridades, o cosas que varios objetos tengan en común. Así, tratamos de sacar algunas conclusiones (o teoremas) que permitan *deducir* que *ante ciertos antecedentes* (si se verifican ciertas hipótesis), se producen *ciertos consecuentes* (se deduce tal tesis). En lugar de conjeturar, justamente, en abstracto, déjenme mostrarles ciertos ejemplos.

Si yo preguntara ¿cuántas personas tiene que haber en un cine para estar seguros… (dije *seguros)*… de que al menos *dos de ellos* cumplen años el mismo día? (no quiere decir que hubieran nacido el mismo año, sólo que festejen el cumpleaños el mismo día).

(Por supuesto, ustedes piensen solos, sin leer la respuesta que sigue.)

Antes de escribir la respuesta, quiero pensar un momento con

ustedes (si es que no contestaron solos antes). Por ejemplo: si hubiera dos personas, obviamente no hay garantías de que los dos cumplan años el mismo día. Lo más probable es que no sea así. Pero más allá de *probable* o *no probable*, el hecho es que estamos buscando *seguridades*. Y habiendo *dos personas* en la sala, nunca podríamos estar seguros de que los dos nacieron el mismo día.

Lo mismo sucedería si hubiera tres personas. O incluso diez. O cincuenta. ¿No? O cien. O doscientos. O incluso trescientos. ¿Por qué? Bueno, porque si bien habiendo trescientas personas dentro de una sala, es probable que haya dos que celebren sus cumpleaños respectivos el mismo día, todavía no podemos *asegurar o garantizar* que sea cierto lo que queremos. Es que podríamos tener la "mala" suerte de que todos hubieran nacido en diferentes días del año.

Nos vamos acercando a un punto interesante (y estoy seguro de que ustedes ya se dieron cuenta de lo que voy a escribir ahora). Porque si hubiera 365 personas en la sala, todavía *no estaríamos en condiciones de asegurar que dos cumplen años el mismo día*. Podría suceder que *todos hubieran nacido en todos los posibles días de un año*. Peor aun: ni siquiera con 366 (por los años bisiestos). Podría ser que justo con los 366 personas que tenemos en la sala, cubran exactamente *todos los posibles días de un año sin repetición*.

Sin embargo, hay un argumento categórico: si en la sala hay 367 personas, *no hay manera* de que se escapen: al menos *dos* tienen que soplar las velitas el mismo día.

Claro: uno no sabe cuáles son esas personas (pero ésa no era la pregunta), ni tampoco si hay nada más que dos que cumplen con la propiedad pedida. Puede ser que haya más… muchos más, pero eso no nos interesa. La garantía es que con 367 resolvemos el problema.

Ahora, teniendo en cuenta esta idea que acabamos de discutir, propongo otro problema: ¿qué argumento podemos encontrar para demostrarle a alguien que en la ciudad de Buenos Aires hay, por lo menos, dos personas con el mismo número de pelos en la cabeza?

Claramente, la pregunta se podría contestar rápido apelando a la gente "pelada". Seguro que en Buenos Aires hay dos personas que no tienen pelo, y por lo tanto, tienen el mismo número de pelos: ¡cero! De acuerdo. Pero obviemos estos casos. Encontremos un argumento que convenza a quien preguntó de lo que quiere saber, y sin apelar al recurso de *cero pelos*.

Antes de que yo escriba aquí la respuesta, una posibilidad es imaginar que si estoy proponiendo este problema en este lugar, *inmediatamente después* de haber discutido el problema de los cumpleaños, es que *alguna relación debe haber entre ambos*. No es seguro, pero es muy probable. ¿Entonces? ¿Alguna idea?

Una pregunta, entonces: ¿tiene usted idea de cuántos pelos puede tener una persona en la cabeza? ¿Alguna vez se lo cuestionó? No es que haga falta para vivir, pero... si uno tiene en cuenta el grosor de un pelo y la superficie del cuero cabelludo de cualquier persona, el resultado es que *no hay manera de que nadie tenga más de 200.000 pelos*. Y eso sería ya en el caso de King-Kong o algo así. Es imposible imaginar una persona con 200.000 pelos. Pero, de todas formas, sigamos con la idea.

Con este dato nuevo ahora, ¿de qué sirve saber que hay *a lo sumo* 200.000 pelos en la cabeza de una persona? ¿Qué hacer con él?

¿Cuántas personas viven en Buenos Aires? ¿Alguna idea? De acuerdo con el censo del año 2000, viven 2.965.403 personas en la Ciudad de Buenos Aires. Para la solución del problema, no hace falta tener el dato con tanta precisión. Basta con decir, entonces, que hay más de dos millones novecientas sesenta mil personas. ¿Por qué con estos datos es suficiente? ¿Por qué este problema es el mismo ahora que el de los cumpleaños? ¿Podrían tener acaso todos los habitantes de Buenos Aires un diferente número de pelos en la cabeza?

Creo que la respuesta clara. Juntando los dos datos que tenemos (el de la cota superior de pelos que una persona puede tener en su cabeza y el del número de habitantes de la ciudad), se deduce que *inexorablemente se tiene que repetir el número de pelos entre personas*. Y no sólo una vez, sino *muchas muchas veces*. Pero esto ya no nos importa. Lo que nos interesa es que podemos contestar la pregunta.

MORALEJA: hemos usado un mismo principio para sacar dos conclusiones. Tanto en el problema del cumpleaños como en el de los pelos, hay algo en común: es como si uno tuviera un número de agujeritos y un número de bolitas. Si uno tiene 366 agujeritos y 367 bolitas, y las tiene que distribuir todas, *es inexorable que tenga que haber por lo menos un agujerito que tiene dos bolitas*. Y si uno tiene 200.000 agujeritos y casi tres millones de bolitas que piensa repartir, se reproduce el mismo escenario: seguro que hay agujeritos con más de una bolita.

Este principio se conoce con el nombre de "pigeon hole principle", o principio del "palomar". Si uno tiene un número de nidos (digamos "n") y un número de palomas (digamos "m"), si el número m es mayor que el número n entonces tiene que haber *por lo menos dos palomas en algún nido*.

Afinadores de piano (en Boston)

Gerardo Garbulsky fue un gran proveedor de ideas y de material, no sólo para aportar historias al programa de televisión, sino para mi vida en general y mis clases en la facultad, en particular.

Gerardo y su mujer, Marcela, vivieron en Boston durante varios años. Se fueron de la Argentina inmediatamente después de la graduación de Gerardo como Licenciado en Física en la Universidad de Buenos Aires. Luego, él se doctoró —también en Física— en el MIT (Massachussets Institute of Technology).

En un momento determinado, ya con el título en la mano, se propuso dejar la vida académica y buscar algún contrato en una empresa privada en donde pudiera utilizar sus capacidades. Y en la búsqueda de empleo, tropezó con una institución que, en la selección del potencial personal que contrataría, sometía a los candidatos a una serie de entrevistas y tests.

En una de esas citas, en una conversación mano a mano con un ejecutivo de la empresa, éste le dijo que le haría algunas preguntas que tendían a estimar "el sentido común". Gerardo, sorprendido, no entendía bien de qué se trataba, pero se dispuso a escuchar.

—¿Cuántos afinadores de piano cree usted que hay en la ciudad de Boston? (La entrevista se hacía ahí, en esa ciudad de los Estados Unidos).

No se trataba, obviamente, de que él pudiera contestar con *exactitud*. Posiblemente *nadie* sepa con precisión el número *exacto* de afinadores de piano que hay en una ciudad. De lo que sí se trataba es de que alguien que viviera en una ciudad pudiera *estimar*. No pretendían que él dijera ni 23 ni 450.000. Pero sí querían escucharlo razonar. Y verlo llegar a una conclusión. Supongamos, por un momento, que había alrededor de mil. No querían que él concluyera ni 23 ni 450.000, por supuesto, porque hubiera estado alejadísimo del número aproximado.

De la misma forma, si a una persona le preguntaran cuál podría ser la máxima temperatura en un día en la ciudad de Buenos Aires, nadie va a decir 450 grados, ni tampoco 150 grados bajo cero. Se pretende, entonces, *una estimación*. Pero mucho más aún: lo querían escuchar "razonar".

Mientras tanto, yo fui a buscar los datos para poder hacer *mi propia conjetura*. Y los invito a seguirla. En el momento en el que estoy escribiendo estas líneas (mayo de 2005), viven en Boston aproximadamente 589.000 personas y hay unas 250.000 casas.

Entonces, hasta aquí:

Personas: 600.000
Casas: 250.000

Aquí uno tiene que conjeturar otra vez. ¿Cada cuántas casas uno diría que hay un piano? ¿Cien? ¿Mil? ¿Diez mil? Yo voy a elegir cien, que es lo que me deja más satisfecho.

Luego, con 250.000 casas, y un piano cada cien, eso significa que estoy suponiendo que en Boston hay 2.500 pianos.

Ahora bien: hace falta volver a hacer una nueva *estimación*. Cada afinador, ¿cuántos pianos atiende? ¿Cien? ¿Mil? ¿Diez mil? Otra vez, voy a hacer mi propia estimación, y vuelvo a elegir cien. Luego, si hay 2.500 pianos, y cada afinador atiende cien pianos (en promedio, obviamente), resulta que hay, de acuerdo con mis conjeturas, aproximadamente 25 afinadores de piano.[31]

Otra anécdota dentro del mismo contexto. Luego de la preselección, invitaron a todos los precandidatos a un encuentro de capacitación en el Babson College. Cada postulante debería pasar tres semanas completas (de lunes a sábado) asistiendo a cursos y seminarios preparatorios. Para ello, unas semanas antes de la cita, cada uno de ellos recibió una caja que contenía varios libros.

Gerardo, al recibir la caja en su casa y ver el contenido, tuvo que hacer una nueva estimación: descubrió que si el objetivo era que leyera todos los libros "antes" de tener que presentarse en el Babson College, eso sería una tarea imposible. Haciendo un cálculo más o menos elemental, descubrió que aunque leyera día y noche, y no hiciera ninguna otra cosa, no podría terminar con todos (ni mucho menos). Entonces, optó por leer en forma "selectiva". Eligió "qué leería" y "qué no". De alguna forma, trató de separar lo "importante" de lo "accesorio".

[31] Ustedes no tienen por qué coincidir ni con mi razonamiento ni con los números que propongo. Es sólo una conjetura. Pero los invito a que hagan las suyas y concluyan lo que a ustedes les parece. Ah, la firma que hacía la selección del personal era The Boston Consulting Group, que contrató a Gerardo en ese momento; aún hoy sigue ligado a la empresa en la sucursal que tienen en la Argentina.

El objetivo, que descubrió más adelante, es que la empresa quería mandar un mensaje más: "es imposible que un ser humano pueda hacer el ciento por ciento de las cosas que tiene que hacer. Lo que importa es ser capaz de seleccionar el veinte por ciento más importante, para cubrir los temas más relevantes, y evitar dedicarle un tiempo más largo al 80% de los temas que son menos relevantes".

En todo caso, fue una lección más.

Aldea global

Si pudiéramos en este momento encoger la población de la Tierra hasta llevarla al tamaño de una villa de exactamente cien personas, manteniendo todas las proporciones humanas existentes en la actualidad, el resultado sería el siguiente:

- Habría 57 asiáticos, 21 europeos, 14 americanos y 8 africanos
- 70 serían no blancos; 30 blancos
- 70 serían no cristianos; 30 cristianos
- 50% de la riqueza de todo el planeta estaría en manos de seis personas. Los seis serían ciudadanos de los Estados Unidos
- 70 serían analfabetos
- 50 sufrirían de malnutrición
- 80 habitarían viviendas de construcción precaria
- Sólo uno tendría educación de nivel universitario.

¿No es cierto que creíamos que la Humanidad había alcanzado un mayor nivel de desarrollo?

Estos datos corresponden a una publicación de las Naciones Unidas del 10 de agosto de 1996. Si bien han pasado casi diez años, no dejan de ser datos sorprendentes.

Historia de las patentes de los automóviles

En la Argentina, hasta hace algunos años, los autos tenían en las "chapas patentes" que los identificaban, una combinación de una letra y luego seis o siete números.

La letra se utilizaba para distinguir la provincia. El número que seguía identificaba el auto. Por ejemplo, una "chapa patente" de un auto radicado en la provincia de Córdoba era así:

X357892

Y uno de la provincia de San Juan,

J243781

Los de la provincia de Buenos Aires y los de la Capital Federal comenzaron a presentar un problema. Como el parque automotor superaba el millón de vehículos,[32] se utilizaba —aparte de la letra B para Buenos Aires y C para la Capital— un número que ahora consistía en siete dígitos. Por ejemplo, se podían ver por la calle autos con patentes como éstas:

$B_1793852$

$C_1007253$

Es decir, se necesitaba "empequeñecer" el número después de la letra (que indicaba a "qué millón" pertenecía el auto) porque ya no había más espacio disponible.

[32] En realidad, se trata de *todos los automóviles que fueron patentados* en algún momento los que formaban parte del parque en ese momento, más todos los que habían sido *patentados* previamente, aunque no existían más, pero sus números seguían sin poder utilizarse.

Toda esta introducción es para presentar la "solución" que se encontró. Se propuso cambiar *todo el sistema de patentamiento de vehículos del país*, y utilizar tres letras y tres dígitos.

Por ejemplo, serían patentes posibles:

NDC 378

XEE 599

La idea era conservar la primera letra como identificatoria de la provincia y aprovechar que, como el número de letras en el alfabeto es mayor que el número de dígitos, se tendría la cantidad deseada de "patentes" para resolver el problema. Ahora bien: antes de exhibir qué tropiezo tuvieron las autoridades que decidieron hacer la modificación, quiero que pensemos juntos cuántas patentes se pueden escribir de esta forma.

Piensen en la información que viene en una "chapa patente": se tienen *tres* letras y *tres* números. Pero como la primera letra va a estar fija para cada provincia, en realidad, hay *dos* letras y *tres* números con los que "jugar" en cada provincia.

Si el número de letras que tiene el alfabeto castellano (excluyendo la "ñ") es veintiséis, ¿cómo hacer para contar los pares diferentes que se pueden formar? En lugar de mirar la respuesta que voy a escribir en las siguientes líneas, piensen (un poquito) solos.

Una ayuda: los pares podrían ser AA, AB, AC, AD, AE, AF, …, AX, AY, AZ (o sea, hay 26 que empiezan con la letra A). Luego, seguirían (si los pensamos ordenadamente) BA, BB, BC, BD, BE, …, BX, BY, BZ (otra vez 26, que son los que empiezan con la letra B). Podríamos ahora escribir los que empiezan con la letra C, y tendríamos otros 26. Y así siguiendo. Entonces, por cada letra para empezar, tenemos 26 posibilidades para *aparear*. O sea, hay en total, 26 x 26 = 676 pares de letras.

Ya hemos contabilizado todas las combinaciones posibles de

tres letras. La primera identifica la provincia, y para las dos siguientes tenemos 676 posibilidades.

Ahora, nos falta "contar" cuántas posibilidades tenemos para los tres números. Pero esto es más fácil. ¿Cuántas ternas se pueden formar con tres números? Si uno empieza con la terna

000

y sigue, 001, 002, 003, hasta llegar a 997, 998, 999. El total es entonces 1.000 (mil) (¿entiende por qué es mil y no 999?) (si quieren pensar solos, mejor. Si no, piensen que las ternas comienzan en el "triple cero"). Ya tenemos todas las herramientas que necesitamos.

Cada provincia (luego, eso fija la primera letra) tiene 676 posibilidades para las letras y mil posibilidades para las ternas de números. En total, entonces, hay 676.000 combinaciones. Como ustedes advierten, este número hubiera sido suficiente para algunas provincias de la Argentina, pero no para las más pobladas y mucho menos, con la idea de resolver el problema que había originado todo el cambio.

¿Qué solución encontraron entonces, luego de haber hecho la campaña para "modernizar" el patentamiento y "actualizar" la base de datos del parque automotor? Tuvieron que "liberar" la primera letra. En ese caso, cuando ya no hay restricción para la primera letra (que no necesita estar asociada a una provincia) hay entonces 26 posibilidades más para cada una de las 676.000 combinaciones de los "cinco" lugares restantes (las dos letras y los tres dígitos).[33]

[33] Para entender esto: tomen una de las 676.000 combinaciones posibles. Agréguenles la letra A al principio. Ahora, tomen las mismas 676.000 y agréguenles la letra B al principio. Como se ve, ahora uno ha duplicado el número de "patentes". Si uno ahora agrega la letra C al principio, triplica el número. Si sigue con este proceso y va utilizando cada una de las 26 letras del alfabeto, encuentra que ha multiplicado por 26 las posibilidades que tenía antes.

Luego, el número total es

26 x 676.000 = 17.576.000

Con más de 17 millones de "chapas patentes" disponibles, no hay más conflictos. Eso sí: ya no se sabe a qué provincia pertenece cada auto. Y por otro lado, no queda claro quiénes fueron los que hicieron las cuentas iniciales que ocasionaron semejante escándalo. Todo por no hacer una cuenta trivial.

¿Cuánta sangre hay en el mundo?

Para tener una idea de los números que nos rodean, queremos saber cómo estimar la cantidad de sangre que hay en el mundo.

Hagamos el siguiente cálculo: ¿Cuánta sangre circula por el cuerpo de una persona adulta? La cantidad es, obviamente, variable, dependiendo de diferentes circunstancias, pero si uno quiere hacer una estimación *por exceso*, es decir, si uno trata de evaluar *lo máximo posible*, digamos que una *cota superior* es de cinco litros (y sé que estoy escribiendo *una barbaridad* porque el promedio está mucho más cerca de cuatro que de cinco litros. Pero no importa. Se trata de una estimación). Un niño, en cambio, tiene considerablemente menos, pero, aun así, voy a suponer que *toda persona, adulta o no,* tiene cinco litros en su cuerpo.

Sabemos que hay un poco más de 6 mil millones de personas en el mundo (en realidad, se estima que ya somos alrededor de 6.300 millones).

Luego, 6 mil millones a cinco litros por persona resultan un total (aproximado, claro), de 30 mil millones de litros de sangre en el mundo.

O sea, si somos

$$6.000.000.000 = 6 \cdot 10^9 \text{ (personas)},$$

multiplicando por cinco, se tiene:

$$30.000.000.000 = 30 \cdot 10^9 \text{ litros de sangre}$$

Por otro lado,

$$\text{cada } 10^3 \text{ litros} = 1.000 \text{ litros} = 1\text{m}^3 \qquad (*)$$

Luego, si queremos averiguar cuántos metros cúbicos de sangre hay, sabiendo que hay 30 mil millones de litros, hay que usar la conversión (*):

$$\{30 \cdot 10^9 \text{ litros}\} / \{10^3 \text{ litros}\} = x \cdot m^3$$

en donde *x* representa nuestra incógnita.

Luego

$$x = 30 \cdot 10^6 = 30.000.000$$

Por lo tanto, hay 30 millones de metros cúbicos de sangre.

Si uno quiere tener una *mejor idea* de lo que esto representa, supongamos que uno quisiera poner toda esta sangre en un cubo. ¿De qué dimensiones tendría que ser el cubo? Para eso, lo que necesitamos, es conseguir *la raíz cúbica del número x*.

$$\sqrt[3]{(x)} = [(\sqrt[3]{30}) \cdot 10^2] \approx [(3,1) \cdot 10^2],$$

(ya que la raíz cúbica de 30 es aproximadamente igual a 3,1).

Luego, si fabricamos un *cubo* de 310 metros de lado, cabría *toda la sangre que hay en el mundo*. No parece tanto, ¿no?

Para tener otra referencia de cuánto representa este número, consideremos el lago Nahuel Huapi, en el sudoeste de la Argentina. Este lago tiene aproximadamente 500 km^2 de superficie. La pregunta ahora es: si le agregáramos al lago toda la sangre que hay en el mundo, ¿en cuánto aumentaría su altura?

Para poder hacer la estimación, supongamos que el lago fuera como una caja de zapatos. ¿Cómo se calcula el volumen? Se multiplica la superficie de la base por la altura de la caja. En este caso, sabemos que la base es de 500 kilómetros cuadrados. Y sabemos que le vamos a agregar un volumen de 30 millones de metros cúbicos. Lo que necesitamos es averiguar en cuánto aumentó la altura (que vamos a llamar *h*).

Escribiendo las ecuaciones se tiene:

$$500\ km^2 .\ h = 30\ .\ 10^6\ .\ m^3$$
$$500\ .\ 10^6\ m^2\ .\ h = 30\ .\ 10^6\ m^3 \qquad (**)$$

(en donde hemos usado la fórmula que dice que 1 $km^2 = 10^6\ m^2$)

Luego, despejando h de la ecuación (**), se tiene:

$$h = (30\ .\ 10^6 m^3)\ /\ 500\ .\ 10^6 m^2 = (3/50)\ m = 0,\ 06\ m = 6\ cm$$

Es decir que después de todas estas cuentas, la estimación que hicimos nos permite afirmar que si tiráramos en el lago Nahuel Huapi toda la sangre que hay en el mundo, la altura del lago *sólo se incrementaría en... ¡6 centímetros!*

MORALEJA: o bien hay muy poca sangre en el mundo, o bien, hay *muchísima... pero muchísima agua.*

Probabilidades de cumpleaños

Ya sabemos que debería haber 367 personas en una habitación para poder *afirmar* que al menos dos personas cumplen años el mismo día.

Ahora, cambiamos la pregunta: ¿Qué pasaría si nos quedáramos contentos con que la probabilidad de que haya *dos* que cumplan años el mismo día, sea mayor que 1/2? O sea, si nos satisface con saber que el porcentaje de posibilidades es mayor que el 50%, ¿cuántas personas debería haber?

Mirémoslo de esta manera: si hubiera dos personas, la probabilidad de que no hayan nacido el mismo día se calcula así:

$$(365/365)\ .\ (364/365) = (364/365) = 0{,}99726\ldots \qquad (*)$$

¿Por qué se calcula así la probabilidad? Elijamos una persona cualquiera. Esa persona nació uno de los 365 días del año (estamos obviando los años bisiestos, pero la cuenta serviría igual si incluyéramos 366 días). De todas formas, esa persona *tuvo que haber nacido uno de los 365 días del año.*

Ahora bien, si elegimos otra persona, ¿cuántos casos posibles hay de que *no* hayan nacido el mismo día?

Es lo mismo que calcular cuántos pares de días distintos se pueden elegir en el año. En cualquier orden. Es decir, para el primero, hay 365 posibilidades. Para el segundo en el par, quedan 364 (ya que alguno tuvo que haber sido usado para la otra persona).

Por lo tanto, los casos *favorables* en el caso de dos personas (donde *favorable* significa que *no hubieran nacido el mismo día),* es de

$$365\ .\ 364 = 132.860$$

¿Y cuántos son los casos posibles? Bueno, los casos posibles son *todos los posibles pares de días que se puedan formar en el año.* Por lo tanto, son

$$365\ .\ 365 = 133.225$$

siglo veintiuno editores

Luego, si la probabilidad de que un evento ocurra se calcula dividiendo los casos favorables sobre los casos posibles, se tiene:

$$(365.364) / (365.365) = 132.860/133.225 = 0,997260273973\ldots$$

Si ahora tuviéramos *tres personas* y queremos que *ninguna de las tres haya nacido el mismo día,* los casos *favorables* ahora son todas las posibles ternas de días del año *sin repetición.*

O sea

$$365 \,.\, 364 \,.\, 363 = 48.228.180$$

¿Por qué? Porque para el primer lugar (o para una de las personas) hay 365 posibilidades. Para la segunda persona, ahora quedan 364 posibilidades (ya que no queremos que coincida con el de la primera). O sea, como vimos antes, 365 . 364. Y ahora, para la *tercera persona,* los días posibles que quedan *para no repetir* son 363.

Por lo tanto, *las ternas posibles sin repetir el día son:*

$$365 \,.\, 364 \,.\, 363$$

En cambio, los casos *posibles,* o sea, las *ternas posibles de días que podemos elegir en el año son:*

$$365 \,.\, 365 \,.\, 365 = 365^3 = 48.627.125$$

Luego, la *probabilidad de que dadas tres personas ninguna de las tres haya nacido el mismo día es:*

$$(365 \,.\, 364 \,.\, 363)/365^3 = 0,991795834115\ldots$$

Si siguiéramos con *cuatro personas,* los casos posibles de

cuaternas de días del año *sin repetir son:*

$$365 \,.\, 364 \,.\, 363 \,.\, 362 = 17.458.601.160$$

y los casos posibles son:

$$365 \,.\, 365 \,.\, 365 \,.\, 365 = 365^4 = 17.748.900.625$$

Es decir, *la probabilidad de que cuatro personas hubieran nacido en cuatro días diferentes del año es:*

$$(365 \,.\, 364 \,.\, 363 \,.\, 362)/365^4 = 17.458.601.160/17.748.900.625$$
$$= 0,983644087533\ldots$$

Si uno siguiera con este proceso, ¿cuántas veces tendría que iterarlo para que la probabilidad de que ningún par de personas del grupo que cumplió años el mismo día sea inferior a 1/2 = 0,5?

La respuesta es 23 y, por lo tanto, si uno elige cualquiera de un grupo de 23 personas, la probabilidad de que haya dos que cumplan años el mismo día es superior al 50%... Será cuestión de hacer la prueba...

Así siguiendo es que intentamos llegar a que el número que resulte de este cociente sea *menor que 0,5.* A medida que uno aumenta el número de personas, la probabilidad de que hubieran nacido en días diferentes va disminuyendo. Y el número que encontramos más arriba indica que cuando uno tiene 23 personas, la probabilidad de que hayan nacido en días diferentes es menor que 1/2. O dicho de otra manera: si uno tiene un grupo *al azar* de 23 personas, la probabilidad de que *dos hayan nacido el mismo día* es mayor que 1/2. O si usted prefiere, sus chances son mayores que el 50%. Y este dato, fuera del contexto que estamos analizando, era impensable, ¿no les parece?

Y si quieren poner esto a prueba, la próxima vez que participen de un partido de fútbol (once jugadores por equipo, un árbitro y dos jueces de línea), hagan el intento. Tienen más de

50% de posibilidades de que con las 25 personas haya dos que cumplan años el mismo día. Como esto es claramente antiintuitivo para muchos de los que participen del partido, quizás ustedes puedan ganar alguna apuesta.

Moneda cargada

Cada vez que hay una disputa sobre algo y hay que tomar una decisión entre dos posibilidades, se suele recurrir a *tirar una moneda al aire*.

Sin que uno lo explicite en cada oportunidad, está claro que uno acepta (sin comprobar) que la moneda no está cargada. Es decir: uno supone que la probabilidad de que salga cara o ceca es la misma. Y esta probabilidad es 1/2, o la mitad de las veces.[34]

Hasta aquí, nada nuevo. Ahora, supongamos que uno tiene que decidir también entre dos posibilidades, y tiene una moneda, pero, a diferencia del planteo anterior, a uno le dicen que la moneda *está cargada*. No es que tenga *dos caras o dos cecas*. No. Decir que está cargada es decir que la probabilidad de que *salga cara es* P mientras que la posibilidad de que salga *ceca es* Q, pero uno no sabe que P y Q son iguales.

En todo caso, supongamos dos cosas más:

a) $P + Q = 1$
b) $P \neq 0$ y $Q \neq 0$

La parte (a) dice que si bien P y Q no tienen por qué ser iguales a 1/2 como en el caso de una moneda común, la *suma de las probabilidades da uno*. Es decir, o bien sale cara o bien sale ceca. La parte (b) garantiza que la moneda no está cargada de tal manera que *siempre salga cara o siempre salga ceca*.

La pregunta es: ¿cómo hacer para poder decidir entre dos alternativas cuando uno tiene una moneda de estas características?

La respuesta, en la página de soluciones.

[34] Quizá la aclaración respecto de que la moneda no está cargada no haga falta, ya que cuando uno quiere decidir algo, si ninguno de los dos *sabe* si está o no cargada, *iguala* las posibilidades que cada uno tiene.

Problemas

Pensamiento lateral

¿Qué es el pensamiento lateral?

En la página de internet de Paul Sloane (http://rec-puzzle-s.org/lateral.html), se da la siguiente explicación:

A uno le presentan un problema que no contiene la información suficiente para poder descubrir la solución. Para avanzar se requiere de un diálogo entre quien lo plantea y quien lo quiere resolver.

En consecuencia, una parte importante del proceso es hacer preguntas. Las tres respuestas posibles son: sí, no o irrelevante.

Cuando una línea de preguntas se agota, se necesita avanzar desde otro lugar, desde una dirección completamente distinta. Y aquí es cuando el pensamiento lateral hace su presentación.

Para algunas personas, es frustrante que un problema "admita" o "tolere" la construcción de diferentes respuestas que "superen" el acertijo. Sin embargo, los expertos dicen que un buen problema de pensamiento lateral *es aquél cuya respuesta es la que tiene más sentido, la más apta y la más satisfactoria. Es más: cuando uno finalmente accede a la respuesta se pregunta "cómo no se me ocurrió".*

siglo veintiuno editores

La lista de problemas de este tipo más conocida es la siguiente:

A) El hombre en el ascensor. Un hombre vive en un edificio en el décimo piso (10). Todos los días toma el ascensor hasta la planta baja para ir a su trabajo. Cuando vuelve, sin embargo, toma el ascensor hasta el séptimo piso y hace el resto del recorrido hasta el piso en el que vive (el décimo) por las escaleras. Si bien el hombre detesta caminar, ¿por qué lo hace?

B) El hombre en el bar. Un hombre entra en un bar y le pide al barman un vaso de agua. El barman se arrodilla buscando algo, saca un arma y le apunta al hombre que le acaba de hablar. El hombre dice "gracias" y se va.

C) El hombre que se "autoestranguló". En el medio de un establo completamente vacío, apareció un hombre ahorcado. La cuerda alrededor de su cuello estaba atada a un andamio del techo. Era una cuerda de tres metros. Sus pies quedaron a un metro de altura del piso. La pared más cercana estaba a siete metros del muerto. Si escalar las paredes o treparse al techo es imposible, ¿cómo hizo?

D) Hombre en un campo abierto con un paquete sin abrir. En un campo se encuentra un señor tendido, sin vida. A su lado hay un paquete *sin abrir*. No hay ninguna otra criatura viva en el campo. ¿Cómo murió?

E) El brazo que llegó por correo. Un hombre recibió un paquete por correo. Lo abrió cuidadosamente y encontró el brazo de un hombre adentro. Lo examinó, lo envolvió nuevamente y lo mandó a otro hombre. Este segundo hombre examinó el paquete que contenía el brazo muy cuidadosamente también, y luego, lo llevó hasta un bosque en donde lo enterró. ¿Por qué hicieron esto?

F) Dos amigos entran a comer en un restaurant. Los dos lograron sobrevivir al naufragio de un pequeño barco en donde viajaban ambos y el hijo de uno de ellos. Pasaron más de un mes juntos en una isla desierta hasta que fueron rescatados. Los dos ordenan el mismo plato del menú que se les ofrece. Una vez que

el mozo les trae la comida, comienzan a comer. Uno de ellos, sin embargo, ni bien prueba el primer bocado sale del restaurant y se pega un tiro. ¿Por qué?

G) Un hombre va bajando las escaleras de un edificio cuando advierte súbitamente que su mujer acaba de morir. ¿Cómo lo sabe?

H) La música se detuvo. La mujer se murió. Explíquelo.

I) En el funeral de la madre de dos hermanas, una de ellas se enamora profundamente de un hombre que jamás había visto y que estaba prestando sus condolencias a los deudos. Las dos hermanas eran las únicas que quedaban ahora como miembros de esa familia. Con la desaparición de la madre ellas dos quedaban como únicas representantes. Después del funeral y ya en la casa de ambas, una hermana le cuenta a la otra lo que le había pasado (y le estaba pasando con ese hombre) del que no sabía quién era y nunca había visto antes. Inmediatamente después, mata a la hermana. ¿Por qué?

Más bibliografía sobre el tema en http://rinkworks.com/brainfood/lateral.shtml

Problema de los tres interruptores

Entre todos los problemas que requieren pensamiento lateral, éste es el que más me gusta.

Quiero aclarar que no tiene "trampas", no tiene "gato encerrado". Es un problema que, con los datos que se brindan, uno debería estar en condiciones de resolverlo. Aquí va.

Se tiene una habitación vacía con excepción de una bombita de luz colgada desde el techo. El interruptor que activa la luz se encuentra en la parte exterior de la habitación. Es más: no sólo hay un interruptor, sino que hay tres iguales, indistinguibles. Se sabe que sólo una de las "llaves" activa la luz (y que la luz funciona, naturalmente).

El problema consiste en lo siguiente: la puerta de la habitación está cerrada. Uno tiene el tiempo que quiera para “jugar” con los interruptores. Puede hacer cualquier combinación que quiera con ellos, pero puede entrar en la habitación sólo una vez. En el momento de salir, uno debe estar en condiciones de poder decir: “ésta es la llave que activa la luz”. Los tres interruptores son iguales y están los tres en la misma posición: la de apagado.

Para aclarar aún más: mientras la puerta está cerrada y uno está afuera, puede entretenerse con los interruptores tanto como quiera. Pero habrá un momento en que decidirá entrar en la habitación. No hay problemas. Uno lo hace. Pero cuando sale, tiene que poder contestar la pregunta de cuál de los tres interruptores es el que activa la lamparita.

Una vez más: el problema no tiene trampas. No es que se vea por debajo de la puerta, ni que haya una ventana que da al exterior y que le permita a uno ver qué es lo que pasa adentro, nada de eso. El problema se puede resolver sin golpes bajos.

Ahora les toca a ustedes.

128 participantes en un torneo de tenis

En un torneo de tenis se inscriben 128 participantes.

Como es bien sabido, se juega por simple eliminación. Es decir: el jugador que pierde un partido queda eliminado.

La pregunta es: ¿cuántos partidos se jugaron *en total* hasta definir el campeón?[35]

[35] Es obvio que uno puede hacer la cuenta escribiendo todos los datos, pero la idea es poner a prueba la capacidad para pensar distinto, para pensar en forma “no convencional”. La solución aparece en el apéndice de soluciones.

Problema de las tres personas que entran en un bar y tienen que pagar con 30 pesos una cuenta de 25

Tres personas entran en un bar. Los tres hacen su pedido y se disponen a comer. En el momento de pagar, el mozo trae la cuenta que suma exactamente 25 pesos. Los tres amigos deciden compartir lo consumido y dividir el total. Para ello, cada uno mete la mano en su bolsillo y saca un billete de 10 pesos. Uno de ellos, junta el dinero y le entrega al mozo los 30 pesos.

El mozo vuelve al rato con el vuelto: cinco billetes de un peso. Deciden dejarle al mozo dos pesos de propina y se reparten los tres pesos restantes: uno para cada uno.

La pregunta es: si cada uno de ellos pagó 9 pesos (el billete de 10 que había puesto menos el peso de vuelto que se llevó cuando volvió el mozo), como son tres, a 9 pesos cada uno, pagaron 27 pesos. Si a ello le sumamos los *dos pesos de propina* que se llevó el mozo, los 27 más los dos pesos, suman ¡29 pesos!

¿Dónde está el peso que falta?

La respuesta está en la página de soluciones.

Antepasados comunes

Para aquellos que creen en la historia de Adán y Eva, tengo una pregunta interesante. Pero para aquellos que *no* creen, la pregunta puede ser inquietante también.

Aquí va: cada uno de nosotros nació por la unión de nuestros padres. A su vez, cada uno de ellos, tuvo dos padres también (y mientras la ciencia no avance hasta clonar individuos, hasta aquí siempre fue necesaria la existencia de un hombre y una mujer para procrear… en el futuro, no lo sé, pero hasta hoy, es y fue así). Es decir: cada uno de nosotros tiene (o tuvo) cuatro abuelos. Y ocho bisabuelos. Y dieciséis tatarabuelos. Y paro por un segundo aquí.

Como se puede advertir, cada salto de generación resulta en una multiplicación por dos del número de antepasados que tuvieron que intervenir para nuestro nacimiento.

O sea:

1) $1 = 2^0$ = ustedes
2) $2 = 2^1$ = sus padres (madre y padre)
3) $4 = 2^2$ = sus abuelos (maternos y paternos)
4) $8 = 2^3$ = bisabuelos
5) $16 = 2^4$ = tatarabuelos
6) $32 = 2^5$ (contando las madres y padres de sus tatarabuelos)
7) $64 = 2^6$
8) $128 = 2^7$
9) $256 = 2^8$
10) $512 = 2^9$
11) $1.024 = 2^{10}$

Supongamos que tuvieron que pasar 25 años (en promedio) para que cada generación procreara. Es decir, para llegar a *diez* generaciones hacia atrás, tuvieron que pasar alrededor de 250 años. Esto significa que hace 250 años (aproximadamente) cada uno de nosotros tenía más de mil (1.024 para ser exactos) antepasados, o personas que terminarían relacionadas con nosotros.

Ahora bien: en este momento somos alrededor de seis mil millones de personas (en realidad, alrededor de 6.300 millones). Si esto fuera así, si cada personas tuvo hace 250 años más de mil antepasados, la población de la Tierra hace dos siglos y medio tuvo que haber sido de más de ¡seis billones de personas! (aquí, un billón es un millón de millones).

Y eso es imposible, porque si uno revisa la literatura existente, los datos señalan que la población de la Tierra alrededor de 1750 oscilaba entre 600 y 900 millones de personas.

(cf. http://www.census.gov/ipc/www/worldhis.html).

Es decir, en alguna parte tiene que haber un "quiebre" del argumento. ¿En dónde está el error? ¿Qué es lo que estamos pensando mal?

Vale la pena pensar el problema y buscar la respuesta —eventualmente— en el apéndice de soluciones.

Problema de Monty Hall[36]

En un programa de televisión, el conductor hace pasar a su invitado a competir por el premio mayor: un automóvil cero kilómetro. En el estrado hay tres puertas cerradas. Detrás de dos de esas puertas, hay una foto de un chivo. En cambio, detrás de la tercera hay una reproducción del vehículo. El participante tiene que elegir una de las tres puertas. Y si elige la correcta, se queda con el automóvil.

Hasta aquí, no habría nada original. Sería un programa convencional de preguntas y acertijos de los múltiples que existen en la televisión. Pero el problema tiene un agregado. Una vez que el invitado "elige" una de las tres puertas, el conductor del programa, *que sabe* detrás de cuál está el premio, pretende colaborar con el participante, y para hacerlo, "abre" una de las puertas en las que *él sabe que no está el automóvil.*

Y después le ofrece una nueva chance para elegir. ¿Cuál es la mejor estrategia? O sea, ¿qué es lo que más le conviene al participante? ¿Quedarse con lo que había elegido antes? ¿Cambiar de puerta? ¿O es irrelevante a los efectos de incrementar la probabilidad de ganar?

En este punto, yo les sugiero que abandonen la lectura por un momento y se concentren en pensar qué harían. Y luego, sí,

[36] Este problema apareció hace unos años en Estados Unidos y generó múltiples polémicas. La primera vez que lo escuché fue cuando me lo comentó Alicia Dickenstein recién llegada de un congreso en Berkeley, en octubre de 2004.

vuelvan para corroborar si lo que pensaron estaba bien o había algunas otras cosas para considerar.

(Ahora los imagino recién retornados.)

El problema presenta una arista antiintuitiva. ¿Por qué? Porque la tentación es contestar lo siguiente: ¿qué importancia tiene que cambie o no cambie una vez que quedan dos puertas solamente? Uno sabe que detrás de una de las dos está el automóvil, y en todo caso, la probabilidad de que esté detrás de una o de otra es la mitad.

Pero, ¿es verdad esto? Porque en realidad, más allá de la solución (que voy a escribir en la página de soluciones), los invito a pensar lo siguiente: ¿podemos ignorar que el problema *no empezó con la segunda pregunta* sino que en principio había *tres puertas y la probabilidad de acertar era 1 en 3?*

La respuesta, entonces, un poco más adelante.

Sentido común

¿Prestaron atención alguna vez a las "bocas de tormenta" que están en las calles? ¿Vieron que algunas veces los operarios las levantan y descienden para arreglar las cañerías? ¿Por qué es mejor que sean redondas y no cuadradas o rectangulares?

La respuesta, en la página de soluciones.

El acertijo de Einstein

Einstein escribió este acertijo en el siglo pasado y dijo que el 98% de la población mundial no lo podría resolver. No creo que sea difícil. Es cuestión de tener paciencia e interés en llegar a la respuesta. Aquí va.

Se tienen cinco casas de cinco colores diferentes. En cada una de las casas vive una persona con una nacionalidad distinta. Cada uno de los dueños bebe un determinado tipo de bebida, fuma una determinada marca de cigarrillos y tiene una determinada mascota. Ningún dueño tiene ni la misma mascota, ni fuma la misma marca de cigarrillos ni bebe la misma bebida.

La pregunta es: ¿quién es el dueño del pececito?

Claves:

1) El británico vive en la casa roja.
2) El sueco tiene un perro como mascota.
3) El danés toma té.
4) La casa verde está a la izquierda de la casa blanca.
5) El dueño de la casa verde toma café.
6) La persona que fuma Pall-Mall tiene un pájaro.
7) El dueño de la casa amarilla fuma Dunhill.
8) El que vive en la casa del centro toma leche.
9) El noruego vive en la primera casa.
10) La persona que fuma Blends vive junto a la que tiene un gato.
11) La persona que tiene un caballo vive junto a la que fuma Dunhill.
12) El que fuma Bluemasters bebe cerveza.
13) El alemán fuma Prince.
14) El noruego vive junto a la casa azul.
15) El que fuma Blends tiene un vecino que toma agua.

Problema de las velas

Éste es un problema para pensar. Y como siempre, no hay trampa. No hay que resolverlo YA. Tómense un rato para leer el texto y si no se les ocurre la solución, no desesperen. Tener algo para pensar es una manera de disfrutar. La solución está en el apéndice de soluciones, pero les sugiero que no vayan corriendo a leerla.

En todo caso, el crédito le corresponde a Ileana Gigena, la sonidista del programa *Científicos Industria Argentina*. Una tarde, cuando me escuchó proponiendo cosas para pensar que yo dejaba planteadas al finalizar un programa y que terminaría resolviendo en el siguiente, salió de su cubículo y me dijo:

—Adrián, ¿conocés el problema de las velas?

—No —le dije—. ¿Cuál es?

Y me planteó lo siguiente para que pensara. Ahora, lo comparto con ustedes:

Se tienen dos velas iguales, de manera tal que cada una tarda exactamente una hora en consumirse. Si uno tiene que medir quince minutos y no tiene cronómetro, ¿cómo tiene que hacer para aprovechar lo que sabe de las velas?

Ella me aclaró, además, que no se las puede cortar con un cuchillo ni se las puede marcar. Sólo se puede usar el encendedor y los datos que uno tiene sobre cada vela.

Sombreros (parte 1)

En una cárcel (para hacerlo un poco más emocionante y dramático) hay tres reclusos, digamos A, B y C. Se supone que los tres han tenido buena conducta y el director de la institución quiere premiarlos con la libertad.

Para eso, les dice lo siguiente:

Como ven (y les muestra) *tengo aquí cinco sombreros. Tres blancos y dos negros. Lo que voy a hacer es seleccionar tres de ellos (sin que ustedes puedan ver cuáles elegí) y se los voy a repartir. Luego de que cada uno de ustedes tenga su respectivo sombrero, los voy a poner a los tres en la misma habitación de manera que cada uno pueda ver el sombrero que tienen puesto los otros dos, pero no el propio.*

Después, yo voy a empezar a interrogar a uno por uno. Cada uno tendrá la oportunidad de decirme qué color de sombrero tiene, pero sin adivinar ni arriesgar. *Cada uno tiene que* fundamentar su opinión. *Cuando uno no puede justificar su opinión, tiene que pasar. Si al finalizar la ronda, ninguno erró y al menos uno de los tres contestó correctamente, entonces quedarán en libertad.*

Está claro, además, que ninguno de ustedes puede hablar con los otros dos, ni comunicarse mediante gestos ni establecer ninguna estrategia. Se trata de contestar lealmente. Por ejemplo: si yo eligiera los sombreros negros y se los diera a A y a C, y empezara preguntándole a A qué sombrero tiene, A, al ver que B tiene un sombrero blanco y C uno negro, no podría decidir, y tendría que pasar. Pero B, al ver que tanto A como C tienen un sombrero negro, y que en total había dos de ese color, está seguro de que tiene sombrero de color blanco y podría contestar correctamente.

Una vez que las reglas estuvieron claras, los separó a los tres. Los puso en tres habitaciones diferentes, y eligió (como era previsible) los *tres sombreros blancos.*

Luego, los hizo pasar a una habitación común y empezó a preguntar:

—¿Qué color de sombrero tiene? —le preguntó a A.

—No lo sé, señor —dijo A, al ver con preocupación que tanto B como C tenían ambos sombreros blancos.

—¿Entonces?

—Entonces —dijo A—, paso.

—Bien. ¿Y usted? —siguió preguntando el director dirigiendo su pregunta a B.

—Señor, yo también tengo que pasar. No puedo saber qué color de sombrero tengo.

—Ahora, sólo me queda por preguntarle a uno de ustedes: a C. ¿Qué color de sombrero tiene?

C se tomó un tiempo para pensar. Miró de nuevo. Después cerró un instante los ojos. La impaciencia crecía alrededor de él. ¿En qué estaría pensando C? Los otros dos reclusos no podían permanecer en silencio mucho más. Se jugaba la libertad de los tres en la respuesta de C.

Pero C seguía pensando. Hasta que en un momento, cuando el clima ya era irrespirable, dijo: "Bien, señor. Yo sí puedo afirmar algo: mi color de sombrero es blanco".

Los otros dos reclusos no podían entender cómo había hecho, pero lo había dicho: ellos lo escucharon. Ahora, sólo quedaba que lo pudiera explicar para poder garantizar la libertad de todos. Ambos contenían la respiración esperando lo que un instante antes parecía imposible: que C pudiera fundamentar su respuesta. Ambos sabían que lo que dijo era cierto, pero faltaba… faltaba nada menos que lo pudiera *explicar*.

Y eso fue lo que hizo C y que invito a que piensen ustedes. Si no se les ocurre la respuesta, pueden encontrarla al final del libro.

Sombreros (2): Sobre cómo mejorar una estrategia

Se tiene ahora el siguiente problema, también ligado a sombreros de color blanco y negro:

Una vez más, supongamos que hay tres reclusos en una cárcel: A, B y C. El director decidió premiarlos por buena conducta. Pero también quiso poner a prueba la capacidad de deducción que los tres pudieran tener. Y les propuso entonces lo siguiente. Los convocó a los tres en una habitación y les dijo:

—*Como ven, tengo aquí una pila de sombreros blancos y otra de sombreros negros*, —mientras con su dedo apuntaba hacia dos hileras verticales de sombreros de esos colores.

—*Yo voy a elegir un sombrero para cada uno. Se los voy a dar sin que ustedes puedan ver de qué color es el que les tocó pero sí podrán ver el de los otros dos. Una vez que haya hecho la distribución, voy a preguntarles, uno por uno, qué color de sombrero tienen. Y ustedes tendrán que elegir o bien blanco o bien negro. Pueden optar por no contestar, y, en ese caso, pasan. De todas formas, para que queden en libertad los tres hace falta que ninguno de los tres entregue una respuesta equivocada. Pueden pasar dos, pero entonces el restante tiene que elegir: blanco o negro. Si alguno de los tres se equivoca, no hay libertad para ninguno. Pero basta una respuesta correcta y ninguna incorrecta para que los tres salgan en libertad.*

Les voy a mostrar una estrategia para resolver el problema. Y es la siguiente: A y B, al ser consultados, pasan. Y C elige una posibilidad cualquiera. Luego, tiene la mitad de posibilidades de acertar (50%).

Esta estrategia, entonces, conduce a la libertad en un 50% de los casos. La pregunta es: ¿existe alguna estrategia que mejore ésta?

Ustedes, —les dijo a los presos— *pueden planificar la estrategia que quieran. Pero no podrán conversar más en el momento que yo distribuyo los sombreros.*

Los reclusos se encerraron en una pieza y se pusieron a pensar. Y consiguieron una solución. La respuesta, si no la consiguen ustedes solos, está en la página de soluciones.

Mensaje interplanetario

Supongamos que uno tuviera que mandar un mensaje al espacio y aspirara a que ese mensaje fuera leído por algún "ser inteligente".

¿Cómo hacer para escribir algo en *ningún idioma* en particular, pero lo suficientemente explícito como para que cualquiera que "pueda razonar" lo lea? Por otro lado, una vez superado el obstáculo del "medio", es decir, una vez que uno elija un sistema de comunicación que suponga que el otro va a entender, ¿qué escribirle? ¿qué decirle?

Con estas hipótesis apareció un mensaje hace mucho tiempo en un diario japonés. La historia es así (de acuerdo con lo que me contó Alicia Dickenstein, una muy querida amiga mía, matemática, a quien le debo muchísimas cosas, las más importantes las afectivas. Alicia es una extraordinaria persona y una excelente profesional): de vuelta de un viaje por Oriente, Alicia me comentó que había leído en la revista *El Correo de la Unesco* correspondiente al mes de enero de 1966, en la página siete, el siguiente artículo (que me tomo el atrevimiento de reproducir teniendo en cuenta que circula libremente por Internet desde hace muchísimo tiempo):

En 1960, Iván Bell, un profesor de inglés en Tokio, oyó hablar del 'Project Ozma', un plan de escucha de los mensajes que por radio pudieran venirnos del espacio. Bell redactó entonces un mensaje interplanetario de 24 símbolos, que el diario japonés Japan Times *(que imprime la edición japonesa del* Correo de la Unesco*) publicó en su edición del 22 de enero de 1960, pidiendo a sus lectores que lo descifraran.*

El diario recibió cuatro respuestas, entre ellas, una de una lectora norteamericana que escribió su respuesta en el mismo código, añadiendo que vivía en Júpiter.

Lo que propongo aquí es escribir el *mensaje de Iván Bell*, que, como se dice en el artículo original, "es extraordinariamente fácil de descifrar y mucho más sencillo de lo que parece a simple vista". Mientras tanto, les quiero agregar que es un entretenimiento y un entrenamiento para la mente. Es un ejemplo para disfrutar y original respecto de lo que puede el intelecto humano. De cualquier raza, de cualquier religión o hablante de cualquier idioma. Sólo se requiere *tener voluntad para pensar.*

1. A.B.C.D.E.F.G.H.I.J.K.L.M.N.P.Q.R.S.T.U.V.W.Y.Z

2. AA, B; AAA, C; AAAA, D; AAAAA, E; AAAAAA, F; AAAAAAA, G; AAAAAAAA, H; AAAAAAAAA, I; AAAAAAAAAA, J.

3. AKALB; AKAKALC; AKAKAKALD, AKALB; BKALC; CKALD; DKALE,BKELG; GLEKB, FKDLJ; JLFKD.

4. CMALB; DMALC; IMGLB.

5. CKNLC; HKNLH, DMDLN; EMELN.

6. JLAN; JKALAA; JKBLAB; AAKALAB, JKJLBN; JKJKJLCN, FNKGLFG.

7. BPCLF; EPBLJ; FPJLFN.

8. FQBLC; JQBLE; FNQFLJ.

9. CRBLI; BRELCB.

10. JPJLJRBLSLANN; JPJPJLJRCLTLANNN, JPSLT; JPTLJRD.

11. AQJLU; UQJLAQSLV.

12. ULWA; UPBLWB; AWDMALWDLDPU, VLWNA; VPCLWNC. VQJLWNNA; VQSLWNNNA, JPEWFGHLEFWGH; SPEWFGHLEFGWH.

13. GIWIHYHN; TKCYT, ZYCWADAF.

14. DPZPWNNIBRCQC.

Los invito a pensar la solución.

Número que falta

Muchas veces en las pruebas de inteligencia (o que miden el IQ, *intelligent quotient*) se presentan problemas del siguiente tipo:

Se da una tabla de números en la que *falta* uno. ¿Pueden ustedes decir qué número falta y explicar por qué?

54	(117)	36
72	(154)	28
39	(513)	42
18	(?)	71

Se trata no sólo de que ustedes puedan decir qué número es el que debería ir en lugar del signo de interrogación, sino también de medir su capacidad de análisis, para deducir *una ley de formación*. Es decir, hay un patrón que subyace detrás de la gestación de esos números, y se pretende que ustedes lo descubran.

La respuesta, en la página de soluciones.

Cuántas veces por semana le gustaría a una persona comer fuera de su casa

Uno le propone a su interlocutor: ¿cuántas veces por semana te gustaría comer fuera de tu casa? Él tiene que pensar ese número y *no comunicarlo*. Es el número que nosotros vamos a tratar de descubrir.

Vamos a poner en dos columnas aquí abajo una respuesta general (representada por la letra *v* que indicará la cantidad de veces que a esa persona le gustaría comer afuera) y también con un ejemplo, digamos con el número 3.

3 v

Luego le decimos que multiplique por dos el número que nos dio.

6 2v

Luego, le decimos que le sume el número 5

11 (2v + 5)

Le pedimos que ahora lo multiplique por 50

550 50 (2v+5)=100v + 250

Si su cumpleaños ya pasó (durante el año 2005), se le suma 1.755

2.305 100v + 2.005

Si su cumpleaños *aún no pasó* (durante el año 2005), se le suma 1.754

2.304 100v + 2.004

Ahora se le pide que reste el año de nacimiento (digamos que la persona nació en 1949). En el primer caso (el cumpleaños ya pasó) es

(2.305 - 1.949) = 356 100v + 56

En el segundo caso, es

(2.304 - 1.949) = 355 100v + 55

Lo que da en el primer caso es 356. Y uno le pide que le diga ese número y entonces le dice lo siguiente: el número de veces que te gustaría comer afuera por semana es 3 y tu edad es 56. En el segundo caso, el resultado es 355. En esta situación se le dice a su interlocutor “el número de veces que te gustaría comer por semana es 3 y tu edad es 55”.

Es decir, lo que hace el número 100v es justamente multiplicar el número *v* por 100, y agregarle luego el número 56 o bien 55. Es como agregarle el número *v* delante del número que es el cumpleaños, por lo que queda así:

v56 o bien v55

Reflexiones y curiosidades

Lógica cotidiana

Es muy común que uno cometa *errores de interpretación lógica* en la vida cotidiana. Síganme en estos ejemplos.

1) Supongamos que un señor se encuentra en un ascensor con dos señoritas y dice, mirando a una de ellas: “Usted es muy bonita”.

La otra mujer, ¿tiene derecho a sentirse *menos bonita?*

2) Si uno encuentra un cartel en un restaurante que dice: “prohibido fumar los sábados”, ¿tiene derecho uno a suponer que en todos los otros días, salvo el sábado, se puede fumar?

3) Último ejemplo, pero siempre con la misma idea. Si en un colegio, un maestro dice: “los lunes hay prueba”, ¿significa esto que ningún otro día hay prueba?

Si uno analiza los tres casos, *deduce* que la otra mujer *no es tan bonita*. Y hace eso porque la afirmación “usted es muy bonita”, cuando hay otra mujer en la habitación, induce (equivocadamente) a pensar que la otra no lo es. Pero la afirmación tiene como única destinataria a la primera mujer, *y nada se dice de la segunda*.

De la misma forma, el hecho de que en el cartel se diga que está "prohibido fumar los sábados", no dice que está permitido los lunes. Ni los martes. *Sólo dice que no se puede fumar los sábados*. Cualquier otra conclusión a partir de esa frase es *incorrecta*.

Y, por último, si el profesor dice que "los lunes hay prueba", es obvio que no dice que se va a abstener de examinar a los alumnos cualquier otro día.

Son sólo errores de lógica, inducidos por las costumbres al hablar.

Diferencia entre un matemático y un biólogo

Este ejemplo sirve para ilustrar algunas diferencias entre personas que eligieron estudiar en la misma facultad, pero que tienen intereses distintos. Tuve la tentación de escribir que presenta (nos presenta) a los matemáticos como un poco "bobos". Sin embargo, no estoy tan seguro de que sea así. Los dejo juzgar a ustedes.

Una persona tiene delante de sí a dos científicos: un matemático y un biólogo. El objeto es plantearles a ambos un problema y ver qué tipo de respuesta daría cada uno. Les muestra entonces los elementos que tiene arriba de una mesa:

a) un calentador con kerosene en el tanque
b) una pava con agua
c) fósforos
d) una taza
e) un saquito de té
f) una cucharita

El primer problema, consiste en hacer un té.

El biólogo dice: —Primero, pongo la pava con agua arriba del calentador. Enciendo un fósforo y con él, el calentador. Espero

que hierva el agua. Pongo el saquito de té dentro de la taza. Vierto el agua dentro de la taza y revuelvo con la cucharita para que el saquito de té tiña el agua.

El matemático dice (y no hay error en la impresión): —Primero, pongo la pava con agua arriba del calentador. Enciendo un fósforo y con él, el calentador. Espero que hierva el agua. Pongo el saquito de té dentro de la taza. Vierto el agua dentro de la taza y revuelvo con la cucharita para que el saquito de té tiña el agua.

—Bien, responde el examinador—. Ahora, les planteo otro problema: supongamos que les doy el agua hervida y les pido que hagan un té. ¿Qué haría cada uno?

El biólogo contesta: —Bueno, en ese caso, pongo el saquito de té dentro de la taza. Vierto el agua ya hervida dentro de la taza y revuelvo con la cucharita para que el saquito de té tiña el agua.

El matemático dice, entonces: —Yo no. Yo espero que el agua se enfríe y paso al caso anterior.

Sé que muchos de ustedes coincidirán con el biólogo (y lo bien que hacen). Pero al mismo tiempo, los invito a reflexionar que el matemático tiene su razón: una vez que resolvió el caso más complicado, el primero que le plantearon, sabe que cualquier otra cosa que le propongan dentro del contexto la tiene resuelta. Y apela a ello. ¿No es interesante la vida así también?

El problema de los Cuatro Colores

Yo sé que ustedes nunca tuvieron que colorear un mapa desde que dejaron la escuela primaria. Y ni siquiera estoy tan seguro de que hubiera sido el caso. De hecho, no creo que los niños de hoy tengan que colorear mapas "a mano", aunque uno nunca sabe.

El hecho es que hay un teorema que tuvo a los matemáticos muchos años sin encontrar la solución. Y se trató de lo siguiente: supongamos que uno tiene un mapa. Sí, un mapa. Un mapa cualquiera, que ni siquiera tiene que corresponder con la realidad de una región.

La pregunta es: "¿cuántos colores hacen falta para colorearlo?". Sí: ya sé. Uno tiene entre sus "pinturitas" o en la computadora muchísimos colores. ¿Por qué preguntarse cuántos colores distintos son necesarios, si uno puede usar muchos más de los que necesita? ¿Para qué podría servir calcular una "cota" máxima? Y en todo caso, ¿qué tiene que ver el número cuatro?

La Conjetura de los Cuatro Colores surgió de la siguiente manera: Francis Guthrie era un estudiante de una universidad en Londres. Uno de sus profesores era Augustus De Morgan. Francis le mostró a su hermano Frederick (que también había sido estudiante de De Morgan) una conjetura que tenía con respecto a la coloración de unos mapas, y como no podía resolver el problema, le pidió a su hermano que consultara al renombrado profesor.

De Morgan, quien tampoco pudo encontrar la solución, le escribió a Sir William Rowan Hamilton, en Dublín, el mismo día que le hicieron la pregunta, el 23 de octubre de 1852:

"Un estudiante me pidió que le diera un argumento sobre un *hecho* que yo ni siquiera *sabía que era un hecho, ni lo sé aún ahora.* El estudiante dice que si uno toma una figura (plana) cualquiera y la divide en compartimentos pintados con diferentes colores, de manera tal que dos adyacentes no tengan un color en común, entonces él sostiene que *cuatro colores* son suficientes".

Hamilton le contestó el 26 de octubre de 1852 y le dijo que no estaba en condiciones de resolver el problema. De Morgan continuó pidiendo asistencia a la comunidad matemática, pero nadie parecía encontrar una respuesta. Cayley, por ejemplo, uno de los matemáticos más famosos de la época, enterado de la situación, planteó el problema a la Sociedad de Matemática de Londres, el 13 de junio de 1878, y preguntó si alguien había resuelto la Conjetura de los Cuatro Colores.

El 17 de julio de 1879, Alfred Bray Kempe anunció en la revista *Nature* que tenía una demostración de la Conjetura. Kempe era un abogado que trabajaba en Londres y que había estudiado matemática con Cayley en Cambridge.

Cayley le sugirió a Kempe que enviara su Teorema al *American Journal of Mathematics*, donde fue publicado en 1879. A partir de ese momento, Kempe ganó un prestigio inusitado y su demostración fue premiada cuando lo nombraron Miembro de la Sociedad Real (Fellow of the Royal Society) en la que actuó como tesorero por muchísimos años. Es más: lo nombraron "Caballero de la Reina" en 1912.

Kempe publicó dos pruebas más del ahora Teorema de los Cuatro Colores, con versiones que mejoraban las demostraciones anteriores.

Sin embargo, en 1890 Percy John Heawood encontró errores en las demostraciones de Kempe. Si bien mostró por qué y en dónde se había equivocado Kempe, Heawood probó que con *cinco colores alcanzaba para colorear cualquier mapa.*

Kempe aceptó el error ante la sociedad matemática londinense y se declaró incompetente para resolver el error en la demostración, en *su* demostración.

Todavía en 1896, el famoso Charles De la Vallée Poussin encontró también el error en la demostración de Kempe, ignorando aparentemente que Heawood ya lo había encontrado antes.

Heawood dedicó sesenta años de su vida a colorear mapas y a encontrar potenciales simplificaciones del problema (la más conocida dice que si el número de aristas alrededor de cada región es divisible por 3, entonces el mapa se puede colorear con cuatro colores), pero no pudo llegar a la prueba final.

El problema seguía sin solución. Muchos científicos en el mundo le dedicaron buena parte de sus vidas a probar la Conjetura sin suerte. Y obviamente, hubo mucha gente interesada en probar lo contrario. Es decir: encontrar un mapa que *no se pudiera colorear con cuatro colores.*

Recién en 1976 (sí, 1976) la Conjetura tuvo solución y pasó a ser, nuevamente, el Teorema de los Cuatro Colores. La demostración corrió por cuenta de Kenneth Appel y Wolfgang Haken, quien con el *advenimiento de las computadoras* lograron probar el resultado. Ambos trabajaban en la Universidad de Illinois en Urbana, en la localidad de Champaign.

Usaron más de 1.200 horas de las computadoras más rápidas que había en la época para poder demostrar la conjetura. Tanto es así, que el Teorema de los Cuatro Colores es uno de los *primeros casos* en la historia de la matemática, en donde la computadora ha tenido una incidencia tan fuerte: permitió que un resultado que venía evadiendo a los matemáticos durante más de un siglo fuera resuelto.

Naturalmente, la demostración trajo gran desazón en el mundo de la matemática, no porque se esperara que el resultado fuera falso (en realidad, todo lo contrario) sino porque era el primer caso en donde la máquina (en algún sentido) estaba superando al hombre. ¿Cómo no poder encontrar una demostración mejor? ¿Cómo no poder encontrar una demostración que no dependiera de un agente externo?

Es que los cálculos más optimistas establecen que, para poder comprobar lo que hicieron Appel y Haken "a mano", por una persona que le dedicara 60 horas por semana, necesitaría ¡*cien mil años*! para cumplir con la misma tarea.

Los detalles de la demostración fueron publicados en dos "papers" que aparecieron en 1977.[37] Y lo notable de esto fue que

[37] Hay mucha literatura escrita sobre este tema, pero quiero recomendar alguna.
1) http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The_four_colour_theorem.html
2) http://www.cs.uidaho.edu/~casey931/mega-math/gloss/math/4ct.html
3) *Four Colors Suffice: How the Map Problem was Solved.* Libro escrito por Robin Wilson y publicado por Penguin Group en 2002.
4) *The Four-Color Problem*, de Oystein Ore (Academic Press, junio de 1967).
5) http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html
6) http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/The_four_colour_theorem.html

los seres humanos, dos en este caso, lograron reducir el problema a *casos, muchos casos*, que quizás hubieran tomado varias vidas para comprobar. Las computadoras hicieron el resto, pero lo que quiero enfatizar es que sin humanos las computadoras no hubieran sabido qué hacer (ni para qué).

Santa Claus[38]

Como creo que aún hoy hay gente que le reclama a Santa Claus que no le haya traído lo que le pidió, les pido que sigan atentamente las peripecias que el pobre Santa tiene que padecer todos los años. Aquí va:

Existen aproximadamente dos mil millones de niños en el mundo. Sin embargo, como Santa Claus no visita niños musulmanes, ni judíos ni budistas, esto reduce su trabajo en la noche de Navidad y sólo tiene que visitar 378 millones de chicos.

Con una tasa promedio de 3,5 "niños" por casa, se convierte en 108 millones de hogares (suponiendo que al menos hay un niño bueno por casa). Santa Claus tiene alrededor de 31 horas de Navidad para realizar su trabajo, gracias a las diferentes zonas horarias y a la rotación de la Tierra, asumiendo que viaja de este a oeste (lo cual parece lógico). Esto suma 968 visitas por segundo. Como quien dice, para cada casa cristiana con un niño bueno, Santa tiene alrededor de 1/1000 de segundo para: estacionar el trineo, bajar, entrar por la chimenea, llenar las botas de regalos, distribuir los demás regalos bajo el arbolito, comer los bocadillos que le dejan, trepar nuevamente por la chimenea, subirse al trineo… y llegar a la siguiente casa.

Suponiendo que cada una de esas 108 millones de paradas están equidistribuidas geográficamente, estamos hablando de al-

[38] Este texto me fue enviado por Hugo Scolnik, uno de los expertos en criptografía más importantes del mundo.

rededor de 1248 metros entre casa y casa. Esto significa, un viaje total de 121 millones de kilómetros… sin contar descansos o paradas al baño. Por lo tanto, el trineo de Santa Claus se mueve a una velocidad de 1.040 kilómetros por segundo… es decir, casi tres mil veces la velocidad del sonido.

Hagamos una comparación: el vehículo más rápido fabricado por el hombre viaja a una velocidad máxima de 44 km/seg. Un reno convencional puede correr (como máximo) a 24 km por hora o, lo que es lo mismo, unas siete milésimas de kilómetro por segundo. La carga del trineo agrega otro elemento interesante. Suponiendo que cada niño sólo pidió un juguete de tamaño mediano (digamos de un kilo), el trineo estaría cargando más de 500.000 toneladas… sin contar a Santa Claus. En la Tierra un reno normal NO puede acarrear más de 150 kg. Aun suponiendo que un reno pudiera acarrear diez veces el peso normal, el trabajo, obviamente, no podría ser hecho por ocho ó nueve renos. Santa Claus necesitaría 360.000 de ellos, lo que incrementa la carga otras 54.000 toneladas… sin contar el peso del trineo.

Más allá de la broma, 600.000 toneladas viajando a 1.040 km/seg sufren una resistencia al aire enorme, lo que calentaría los renos, de la misma forma que se calienta la cubierta de una nave espacial al ingresar a la atmósfera terrestre. Por ejemplo, los dos renos de adelante, absorberían 14,3 quintillones de joules de energía por segundo cada uno… por lo que se calcinarían casi instantáneamente, exponiendo a los renos siguientes y creando ensordecedores "booms" sónicos. Todos los renos se vaporarizarían en un poco más de cuatro milésimas de segundo… más o menos cuando Santa Claus esté a punto de realizar su quinta visita.

Si no importara todo lo anterior, hay que considerar el resultado de la desaceleración de 1.040 km/seg. En 0,001 de segundo, suponiendo un peso de Santa Claus de 150 kg, estaría sujeto a una inercia de fuerza de 2.315.000 kg, rompiendo al instante sus huesos y desprendiendo todos sus órganos, reduciéndolo al pobre Santa Claus a una masa sin forma aguada y temblorosa.

Si aun con todos estos datos, los enoja que Santa Claus no les haya traído lo que le pidieron este año, es porque son tremendamente injustos y desconsiderados.

¿Cómo construir un ángulo recto?

A esta altura, todo el mundo (¿todo el mundo?) puede *recitar* el teorema de Pitágoras: "En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos". Ahora bien: el teorema habla sobre la relación que hay entre la hipotenusa y los catetos *en un triángulo rectángulo*. Se supone, entonces, que el triángulo que nos dieron *es rectángulo*.

¿Qué pasaría al revés? Es decir: si un señor llega con un triángulo y dice:

"Vea. Yo acabo de medir la hipotenusa y los catetos de este triángulo y resulta que cuando sumo los cuadrados de los catetos me da el mismo número que el cuadrado de la hipotenusa".

La pregunta entonces es: ¿Es rectángulo el triángulo del señor? El teorema de Pitágoras no dice nada de esto. El teorema *hace afirmaciones cuando uno sabe que tiene un triángulo rectángulo*. Pero en este caso, no dice nada. No se puede aplicar el teorema.

En todo caso, lo que uno tiene que hacer es preguntarse si es verdad que el señor del párrafo de arriba tenía un triángulo rectángulo sin que él lo supiera. Y el resultado *es cierto. Cada vez que en un triángulo se observa esa relación entre los tres catetos, es porque el triángulo debe ser rectángulo* (aunque yo no escriba la demostración aquí, es un buen ejercicio para pensar). Lo interesante de esto es que con este resultado, que es el *recíproco* del teorema de Pitágoras, es posible *construirse triángulos rectángulos*.

¿Cómo hacer? Bien. Tomen una cuerda de 12 metros (o 12 centímetros, pero creo que es mejor si se lo hace con una cuerda más manejable). Ustedes saben que $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Es decir, esa relación dice que si yo me fabrico un triángulo con *lados que midan 3, 4 y 5 respectivamente*, entonces el triángulo, de acuerdo con lo que vimos recién, *tiene que ser rectángulo*. Entonces, los invito a hacer lo siguiente. Apoyen la cuerda en el piso. Pongan un libro o la pata de una silla para que apriete una de las puntas. Estiren la cuerda. Cuando llegó a los tres metros pongan otro objeto para que sostenga la cuerda en ese lugar y ustedes giren, avancen en otra dirección cualquiera, hasta que hayan recorrido ahora *cuatro metros con la cuerda*. Allí vuelvan a poner algo que la sostenga y giren otra vez pero ahora apuntando en la dirección en la que pusieron la otra punta de la cuerda. Cuando lleven la segunda punta para que coincida con la primera, manteniendo las distancias (tres, cuatro y cinco metros respectivamente), el triángulo que se habrá formado *tiene que ser rectángulo*. En realidad, ésta era la forma en la que los griegos construían ángulos rectos. Y lo mismo sucede con la gente de campo, que sin necesidad de conocer este teorema, ni tener escuadras, delimita su terreno construyendo ángulos rectos de esta forma.

Alfabetos del siglo XXI

A mediados del siglo XX, se definía a una persona como *alfabeta* si podía leer y escribir. Hoy, en los primeros años del siglo XXI, creo que esa definición es claramente incompleta. Por supuesto, no ignoro que son condiciones elementales saber leer y escribir, pero hoy, un niño que no tiene cultura digital y no habla otro idioma (digamos inglés o chino, si es que lo prefiere) presenta claras deficiencias.

Hace poco tiempo, me comentaba Eric Perle, uno de los capitanes de la compañía aérea United, que pilotea los aviones más modernos del mundo, los Boeing 777, que cuando uno está por aterrizar en el aeropuerto Charles de Gaulle, en París, las conversaciones entre las cabinas de los distintos aviones que circulan por el espacio aéreo en París y la torre de control son en inglés, aunque el avión sea de Air France o de cualquier otra compañía. Y la idea no es minimizar ninguna otra lengua. La idea es aceptar un idioma como “normalizador”, de manera tal que *todos* los que están en el área *entiendan lo que se está diciendo*, porque las comunicaciones ponen en contacto a *todos*.

Escribo esto porque muchas veces escucho que hay fuerte resistencia a aceptar el inglés como idioma universal, como si fuera en detrimento de otros (el español, el francés o el chino: para el caso es lo mismo). No trato de defender eso, sino de aceptar una realidad: *mientras el mundo no se ponga de acuerdo en hablar un idioma único que permita que todos entiendan a todos, el único idioma que hoy garantiza eso en el espacio aéreo es el inglés.*

Claro, el objetivo es lograr que la educación sea para todos y no para unos pocos privilegiados. El objetivo es también que la educación sea gratuita y pública.

Cirujanos y maestros en el siglo XXI

Una historia interesante para pensar es la siguiente: supongamos que un cirujano de principios del siglo XX, fallecido alrededor de 1920, se despertara hoy y fuera trasladado al quirófano de un hospital moderno (aquellos a los que tienen acceso para cuidar de su salud las personas con alto poder adquisitivo, generando una desigualdad que escapa al motivo de este libro, pero que no por eso ignoro).

Vuelvo al quirófano. Supongamos que en la cama de operaciones hay un cuerpo anestesiado al que están operando con la tecnología actual más moderna.

¿Qué haría el tal cirujano? ¿Qué sensaciones tendría? Claramente, el cuerpo de un humano no cambió. En ese lugar no habría problemas. El problema lo encontraría en las "técnicas quirúrgicas", el "aparataje" que las circundan, "el instrumental" y la "batería de tests" que estarían a disposición del cuerpo de médicos que están en esa sala. *Eso sí sería una diferencia.* Posiblemente, el viejo cirujano se quedaría "admirado" de lo que ve y completamente "fuera del circuito". Le explicarían el problema del paciente, y seguro que lo entendería. No tendría problemas en comprender el diagnóstico (al menos, en la mayoría de los casos). Pero la operación en sí misma le resultaría totalmente inaccesible, inalcanzable.

Ahora cambiemos la profesión. Supongamos que en lugar de un cirujano que vivió y murió en el primer cuarto del siglo XX, resucitamos a un maestro de esos tiempos. Y lo llevamos, *no* a una sala de operaciones, sino al teatro de operaciones de un maestro: una sala en donde se dictan clases.[39] A una escuela. ¿Tendría problemas de comprensión? ¿Entendería de lo que están hablando? ¿Comprendería las dificultades que presentan los alumnos? (No me refiero a los trastornos de conducta, sino a los problemas inherentes a la comprensión propiamente dicha.)

Posiblemente, la respuesta es que sí, que el maestro de otros tiempos no tendría problemas en comprender y hasta podría, si el tema era de su especialidad hace un siglo, acercarse al pizarrón, tomar la tiza y seguir él con la clase casi sin dificultades.

MORALEJA: la tecnología cambió mucho el abordaje de ciertas disciplinas, pero no tengo claro que lo mismo se haya producido con los métodos y programas de enseñanza. Mi duda es: si *elegimos* no cambiar nada no hay problemas. Si evaluamos que lo que se hace desde hace un siglo es lo que *queremos hacer hoy*,

[39] Al respecto, comenta Gerry Garbulsky: "Me parece triste que se siga diciendo 'dictar' clase. Mientras otros anacronismos son más inocuos, como 'discar' el teléfono o 'tirar' la cadena del baño, el de 'dictar clase' me hace pensar que en realidad muchos maestros siguen 'dictando' (que implícitamente indica que los alumnos 'toman nota') y no piensan mucho".

no hay críticas. Pero si lo que hacemos hoy es lo mismo que hace un siglo, porque lo revisamos poco o lo consensuamos menos, hay algo que funciona mal. Y vale la pena cuestionarlo.

Sobre monos y bananas[40]

Supongamos que tenemos seis monos en una pieza. Del cielo raso cuelga un racimo de bananas. Justo debajo de él hay una escalera (como la de un pintor o un carpintero). No hace falta que pase mucho tiempo para que uno de los monos suba las escaleras hacia las bananas.

Y ahí comienza el experimento: en el mismo momento en que toca la escalera, *todos* los monos son rociados con agua *helada*. Naturalmente, eso detiene al mono. Luego de un rato, el mismo mono o alguno de los otros hace otro intento con el mismo resultado: todos los monos son rociados con el agua helada a poco que uno de ellos toque la escalera. Cuando este proceso se repite un par de veces más, los monos ya están advertidos. Ni bien alguno de ellos quiere intentarlo, los otros tratan de evitarlo, y terminan a los golpes si es necesario.

Una vez que llegamos a este estadio, retiramos uno de los monos de la pieza y lo sustituimos por uno nuevo (que obviamente no participó del experimento hasta aquí). El nuevo mono ve las bananas e inmediatamente trata de subir por las escaleras. Para su horror, *todos* los otros monos lo atacan. Y obviamente se lo impiden.

[40] Esta historia me la contó mi sobrina Lorena, cuando todavía no se había graduado de bióloga en la Universidad de Buenos Aires, ni se había casado con Ignacio, otro biólogo. Pero siempre me impactó por todo lo que implica en cuanto se trata de explicar la conducta de los humanos. La fuente es *De banaan wordt bespreekbaar*, por Tom Pauka y Rein Zunderdorp (Nijgh en van Ditmar, 1988). http://www.totse.com/en/technology/science_technology/dumbapes.html

Luego de un par de intentos más, el nuevo mono ya aprendió: si intenta subir por las escaleras lo van a golpear sin piedad.

Luego, se repite el procedimiento: se retira un segundo mono y se incluye uno nuevo otra vez. El recién llegado va hacia las escaleras y el proceso se repite: ni bien la toca (la escalera), es atacado masivamente. No sólo eso: el mono que había entrado justo antes que él (¡que nunca había experimentado el agua helada!) participaba del episodio de violencia con gran entusiasmo.

Un tercer mono es reemplazado y ni bien intenta subir las escaleras, los otros cinco lo golpean. Con todo, *dos* de los monos que lo golpean no tienen ni idea de *por qué uno no puede subir las escaleras*. Se reemplaza un cuarto mono, luego el quinto y por último, el sexto, que a esta altura es el *único que quedaba del grupo original*. Al sacar a éste ya no queda ninguno que haya experimentado el episodio del agua helada. Sin embargo, una vez que el último lo intenta un par de veces, y es golpeado furiosamente por los otros cinco, ahora queda establecida la regla: *no se puede subir por las escaleras. Quien lo hace se expone a una represión brutal*. Sólo que ahora ninguno de los seis tiene argumentos para sostener tal barbarie.

Cualquier similitud con la realidad de los humanos *no es pura coincidencia ni casualidad. Es que así somos: como monos.*

¿Qué es la matemática?

Las reflexiones que aparecen más abajo fueron inspiradas en un libro de Keith Devlin (*¿Qué es la matemática?*). Sugiero que lean el texto con la mayor flexibilidad posible. Y, si pueden, léanlo con cuidado. Insisto: no es patrimonio mío (ni mucho menos). Es un recorrido por la historia que me parece que uno no debería ignorar.

Si hoy parara a una persona por la calle y le preguntara *¿qué

es la matemática?*, probablemente contestaría —si tuviera interés en contestar algo— que *la matemática es el estudio de los números* o quizás que *es la ciencia de los números*. Lo cierto es que esta definición tenía vigencia hace unos 2.500 años. O sea, que la información que tiene el ciudadano común respecto a una de las ciencias básicas, es equivalente… ¡¡a la de veinticinco siglos atrás!! *¿Hay algún otro ejemplo tan patético en la vida cotidiana?*

Durante el desarrollo de la historia, la humanidad ha recorrido un camino tan largo y tan rico que me creo con derecho a esperar una respuesta un poco más actual. La idea sobre qué es la matemática en el imaginario popular no parece haber evolucionado demasiado a través de los siglos. Algo falla. Los canales de comunicación no funcionan como deberían. ¿No despierta curiosidad averiguar qué nos estamos perdiendo?

Es probable que la mayoría de la gente esté dispuesta a aceptar que la matemática hace aportes valiosos en los diferentes aspectos de la vida diaria, pero no tiene idea de su esencia ni de la investigación que se hace actualmente en matemática, ni hablar de sus progresos y su expansión.

Para lograr captar algo de su espíritu, tal vez convenga refrescar, a muy grandes rasgos, y en forma breve los primeros pasos y la evolución de la matemática a través del tiempo.

La respuesta a la pregunta *¿qué es la matemática?* ha variado mucho en el transcurso de la historia. Hasta unos 500 años antes de Cristo, aproximadamente, la matemática era —efectivamente— el estudio de los números. Hablo, por supuesto, del período de los matemáticos egipcios y babilonios en cuyas civilizaciones la matemática consistía casi absolutamente en aritmética. Se parecía a un recetario de cocina: haga esto y aquello con un número y obtendrá tal respuesta. Era como poner ingredientes en la batidora y hacer un licuado. Los escribas egipcios utilizaban la matemática para la contabilidad, mientras que en Babilonia eran los astrónomos los que la desarrollaban de acuerdo con sus necesidades.

Durante el período que abarcó desde los 500 años antes de Cristo hasta los 300 después de Cristo, aproximadamente 800 años, los matemáticos griegos demostraron preocupación e interés por el estudio de la geometría. Tanto que *pensaron a los números en forma geométrica.*

Para los griegos, los números eran herramientas. Así fue como los números de los babilonios "les quedaron chicos"... ya no les alcanzaban. Tenían los naturales (1, 2, 3, 4, 5, etcétera) y los enteros (que son los naturales más el cero y los números negativos) pero no eran suficientes.

Los babilonios ya tenían también los números racionales, o sea los cocientes entre los enteros (1/2, 1/3, -7/8, 13/15, -7/3, 0, -12/13, etcétera) que proveían el desarrollo decimal (5, 67 o 3, 8479) y los números periódicos 0,4444... o 0,191919... Estos números les permitían medir, por ejemplo, magnitudes mayores que cinco pero menores que seis. Pero aún así eran insuficientes.

Algunas escuelas como la de los "pitagóricos" (que se prometían en forma mística no difundir el saber) pretendían que todo fuera mensurable, y por eso casi enloquecieron cuando no podían "medir bien" la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos midieran uno. O sea, había medidas para las cuales los números de los griegos no se adecuaban o no se correspondían. Es entonces cuando "descubrieron" los números irracionales... o no les quedó más remedio que admitir su existencia.

El interés de los griegos por los números como herramientas y su énfasis en la geometría elevaron a la matemática al estudio de los números *y también de las formas*. Allí es donde empieza a aparecer algo más. Comienza la expansión de la matemática que ya no se detendrá.

De hecho, fue con los griegos que la matemática se transformó en un área de estudio y dejó de ser una mera colección de técnicas para medir y para contar. La consideraban como un objeto interesante de estudio intelectual que comprendía elementos tanto estéticos como religiosos.

Y fue un griego, Tales de Mileto, el que introdujo la idea de que las afirmaciones que se hacían en matemática podían ser probadas a través de argumentos lógicos y formales. Esta innovación en el pensamiento marcó *el origen de los teoremas*, pilares de las matemáticas.

Muy sintéticamente, podríamos decir que la aproximación novedosa de los griegos a la matemática culmina con la publicación del famoso libro *Los elementos* de Euclides, algo así como el texto de mayor circulación en el mundo después de la Biblia. En su época, este libro de matemática fue tan popular como las enseñanzas de Dios. Y como la Biblia no podía explicar al número π (pi), lo "hacía" valer 3.

Siguiendo con esta pintura, a trazos muy gruesos, de la historia, es curioso que no haya habido demasiados cambios en la evolución de la matemática sino hasta mediados del siglo XVII cuando simultáneamente en Inglaterra y en Alemania, Newton, por un lado, y Leibniz, por el otro, "inventaron" EL CÁLCULO.

El cálculo abrió todo un mundo de nuevas posibilidades porque permitió el estudio del movimiento y del cambio. Hasta ese momento, la matemática era una cosa rígida y estática. Con ellos aparece la noción de "límite": la idea o el concepto de que uno puede acercarse tanto a algo como quiera aunque no lo alcance. Así "explotan" el cálculo diferencial, infinitesimal, etcétera.

Con el advenimiento del cálculo, la matemática, que parecía condenada a contar, medir, describir formas, estudiar objetos estáticos, se libera de sus cadenas y comienza a "moverse".

Y con esta *nueva matemática*, los científicos estuvieron en mejores condiciones de estudiar el movimiento de los planetas, la expansión de los gases, el flujo de los líquidos, la caída de los cuerpos, las fuerzas físicas, el magnetismo, la electricidad, el crecimiento de las plantas y los animales, la propagación de las epidemias, etcétera.

Después de Newton y Leibniz, la matemática se convirtió en el estudio de los números, las formas, el movimiento, el cambio y el espacio.

La mayor parte del trabajo inicial que involucraba el cálculo se dirigió al estudio de la física. De hecho, muchos de los grandes matemáticos de la época fueron también físicos notables. En aquel momento, no había una división tan tajante entre las diferentes disciplinas del saber como la hay en nuestros días. El conocimiento no era tan vasto y una misma persona podía ser artista, matemática, física y otras cosas más, como lo fueron, entre otros, Leonardo Da Vinci y Miguel Ángel.

A partir de la mitad del siglo XVIII nació el interés por la matemática como objeto de estudio. En otras palabras, la gente comenzó a estudiar a la matemática ya no sólo por sus posibles aplicaciones sino por los desafíos que vislumbraba la enorme potencia introducida por el cálculo.

Sobre el final del siglo XIX, la matemática se había convertido en el estudio del número, de la forma, del movimiento, del cambio, del espacio y también de las herramientas matemáticas que se utilizaban para ese estudio.

La explosión de la actividad matemática ocurrida en este siglo fue imponente. Sobre el comienzo del año 1900, el conocimiento matemático de todo el mundo hubiera cabido en una enciclopedia de ochenta volúmenes. Si hoy hiciéramos el mismo cálculo, estaríamos hablando de más de cien mil tomos.

El desarrollo de la matemática incluye numerosas nuevas ramas. En alguna época las ramas eran doce, entre las que se hallaban la aritmética, la geometría, el cálculo, etcétera. Luego de lo que llamamos "explosión" surgieron alrededor de 60 o 70 categorías en las cuales se pueden dividir las diferentes áreas de la matemática. Es más, algunas —como el álgebra y la topología— se han bifurcado en múltiples subramas.

Por otro lado, hay objetos totalmente nuevos, de aparición reciente, como la teoría de la complejidad o la teoría de los sistemas dinámicos.

Debido a este crecimiento tremendo de la actividad matemática, uno podría ser tildado de reduccionista si a la pregunta de "¿qué es la matemática?" respondiera: "es lo que los matemáticos hacen para ganarse la vida".

Hace tan sólo unos veinte años nació la propuesta de una definición de la matemática que tuvo —y todavía tiene— bastante consenso entre los matemáticos. "*La matemática es la ciencia de los 'patterns'*" (o de los *patrones*).

En líneas muy generales, lo que hace un matemático es examinar "patterns" abstractos. Es decir, buscar peculiaridades, cosas que se repitan, patrones numéricos, de forma, de movimiento, de comportamiento, etcétera. Estos "patterns" pueden ser tanto reales como imaginarios, visuales o mentales, estáticos o dinámicos, cualitativos o cuantitativos, puramente utilitarios o no. Pueden emerger del mundo que nos rodea, de las profundidades del espacio y del tiempo o de los debates internos de la mente.

Como se ve, a esta altura del siglo XXI contestar la pregunta *¿qué es la matemática*? con un simple "es el estudio de los números" es, cuanto menos, un grave problema de información, cuya responsabilidad mayor no pasa por quienes piensan eso, sino de los que nos quedamos de este otro lado, disfrutando algo que no sabemos compartir.

Universidad de Cambridge

Lean este mensaje:

Sgeún un etsduio de una uivenrsdiad ignlsea, no ipmotra el ódren en el que las ltears etsan ersciats, la úicna csoa ipormtnate es que la pmrirea y la útlima ltera etsen ecsritas en la psiocion cocrrtea. El rsteo peuden etsar taotlmntee mal y aún pordás lerelo sin pobrleams. Etso es pquore no lemeos cada ltera por sí msima sino que la paalbra es un tdoo.

Pesornamelnte me preace icrneilbe…

Con todo, uno podría suponer que esto sólo pasa en castellano, pero el siguiente párrafo sugiere algo distinto:

Aoccdrnig to rscheearch at Cmabrigde Uinervtisy, it deosn't mttaer in waht oredr the ltteers in a wrod are, the olny iprmoatnt tihng is taht the frist and lsat ltteer be at the rghit pclae. The rset can be a total mses and you can sitll raed it wouthit porbelm. Tihs is bcuseae the huamn mnid deos not raed ervey lteter by istlef, but the wrod as a wlohe. Amzanig huh?

Aquí es donde se me escapa totalmente mi capacidad de elaboración. ¿Cómo funciona el cerebro? ¿Cuánto, en realidad, se lee textualmente y cuánto se anticipa lo que debería decir?

Recuerdo una anécdota con un grupo de amigos, que quizá sirva también para ejemplificar que uno, en verdad, tampoco escucha lo que se le dice en su totalidad, sino que "rellena lo que está por venir" con su imaginación. Y claro, eso suele traer algunos problemas.

Allá por el año 2001 estábamos en la cantina de David (una cantina italiana en el corazón de Buenos Aires) un grupo de amigos, y el tema del fútbol es inevitable, sobre todo si en la mesa estaban Carlos Griguol, Víctor Marchesini, Carlos Aimar, Luis Bonini, Miguel "Tití" Fernández, Fernando Pacini, Javier Castrilli y el propio dueño de la cantina, Antonio Laregina.

En un momento, Tití se levantó para ir al baño. Cuando él no podía escuchar, les dije a todos los otros que prestaran atención al diálogo que tendríamos con Tití cuando él retornara a la mesa, porque quería demostrarles a todos (y a mí también) lo que escribí antes: uno no siempre escucha todo. En todo caso, uno intuye lo que el otro va a decir, pone la mente en control remoto y se retira a pensar cómo seguir o algo distinto.

Y entonces, esto pasó. Cuando Tití volvió a la mesa, le pregunté:

—Decime, ¿no tenés en tu casa algún reportaje que le hubiéramos hecho a Menotti en la época de *Sport 80*?[41].

—Sí —me contestó Tití—. Yo creo que tengo varios cassettes en mi casa… (y se quedó pensando)

—Haceme un favor —le dije—. ¿Por qué no me los traés la semana que viene? Yo, *los escucho, los borro y no te los devuelvo nunca más.*

—Está bien, Adrián —me dijo sin mayores sobresaltos—. Pero no me empieces a apurar. Yo sé que los tengo, pero no recuerdo exactamente dónde. Ni bien los encuentro, te los traigo.

MORALEJA: ante la risa generalizada, Tití seguía sin poder comprender qué había pasado. Él, en realidad, había sido sólo un "conejillo de Indias" para el experimento. Yo creo que, muchas veces, no nos concentramos en escuchar, porque "asumimos" lo que el otro va a decir. El cerebro usa ese tiempo, ese "instante", para pensar en otra cosa, pero claro, algunas veces, comete un error.

Teclado QWERTY

La máquina de escribir, con el teclado que usamos actualmente con las computadoras, apareció por primera vez para uso masivo en 1872. Pero en realidad, la primera patente norteamericana para una máquina de escribir la obtuvo el ingeniero Christopher L. Sholes en 1868. Sholes había nacido en Milwaukee, una ciudad del estado de Wisconsin cerca del lago Michigan, a unos 150 kilómetros al noroeste de Chicago.

Cuando aparecieron las primeras máquinas en el mercado, se vio que tenían un inconveniente: los dactilógrafos escribían

[41] Eso debió suceder unos veinticinco años antes del diálogo.

más rápido de lo que permitía el mecanismo, de manera tal que las teclas terminaban trabadas y hacían imposible tipear con rapidez.

Por eso, Sholes se propuso diseñar un teclado que "frenara" un poco a los "tipeadores". Y así es como apareció en escena el conocidísimo *qwerty*, o lo que es lo mismo, el teclado de distribución tan estrambótico que continúa aún hoy.

Si lo único que hubiera pretendido Sholes era *frenar a los tipeadores*, quizás hubiera podido poner las teclas que activan las letras "A" y "S" en puntas opuestas del teclado. En realidad, al poner en lados opuestos a *pares* de letras que aparecen muchas veces *juntas*, como "sh", "ck", "th" "pr" (siempre en inglés, claro), la idea era evitar que se "apelotonaran" y "se trabara" la máquina o *trabaran* el mecanismo.

En 1873, Remington & Sons, que fabricaban hasta ese momento fusiles y máquinas de coser, se interesaron por el invento de Sholes y comenzaron a producir masivamente máquinas de escribir con teclado "lento".

Como averiguó la excelente periodista científica y licenciada en biología Carina Maguregui, a los dactilógrafos no les quedó más remedio que aprenderlo, las escuelas lo tuvieron que enseñar y, cuando Mark Twain se compró una Remington, el nudo quedó atado para siempre.

Independientemente de los intentos que hubo desde hace más de 80 años, nunca más se pudo modificar el teclado. Y así estamos, hasta hoy: igual que hace 132 años.

La excepción que confirma la regla

Una cosa maravillosa que provee la costumbre es que uno empieza a usar una frase, la cree, la repite, la escucha (cuando otro la dice) y después, se transforma en algo así como una verdad que no admite discusiones.

Sin embargo, *la excepción que confirma la regla* es una frase que debería mortificarnos. Al menos un poco. Y deberíamos plantearnos algunas preguntas al respecto:

¿Cómo es eso de que uno tiene una regla que tiene excepciones?

¿Qué significa tener una regla, entonces?

¿Y qué quiere decir que una excepción *confirma... nada menos que...* una regla?

Como ven, las preguntas podrían seguir, pero lo que me importa acá es plantear un problema con la lógica. Y luego, averiguar de dónde provino este problema semántico.

Primera observación: una regla debería ser algo que tiene validez en un cierto contexto. Es un principio que establece una "verdad". Sería largo y fuera de la aspiración de este libro discutir para qué quiere uno reglas, o quién es el que dice que algo "es" o "no es" una regla. Pero creo que todos estaríamos de acuerdo en que una *regla* es algo que se *acepta* o *demuestra* que es verdad.

Ahora bien: qué querría decir que una *regla contiene excepciones*. Una excepción debería ser algo que *no cumple con la regla (aunque debería).* Pero la lógica más elemental obliga a preguntarse: ¿cómo hago para saber si cuando tengo un objeto o un ejemplo para usar la regla, éste o ésta es una excepción o tiene que estar sometido a la regla?

Para ponerlo en un ejemplo, si uno dice: *todos los números naturales son mayores que siete*, y pretende que esto sea una regla, *sabe también* que esto no es cierto *para todos los posibles casos.* Es más: uno puede hacer una lista de los números *que no cumplen con la regla:*

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) \qquad (*)$$

Estos siete números *no son mayores que siete.* En todo caso, *son excepciones* a la regla. Y si a nosotros nos dieran cualquier número, aunque no lo *viéramos* podríamos afirmar que el número es mayor que siete, *salvo que sea uno de los que figuran en (*)*.

Lo bueno que tiene esta regla es que si bien tiene excepciones, nosotros *sabemos cuáles son las excepciones, hay una lista de esas excepciones*. Entonces, uno se queda tranquilo con la regla, porque si a mí me dan un número cualquiera, yo confronto con la *lista* de las excepciones, y si no lo encuentro allí, *tengo la certeza de que es mayor que siete*.

A nadie se le ocurriría decir que si el número que me dieron es el cuatro, por ejemplo *—que no cumple la regla—*, este número es la excepción que confirma la regla.

Las reglas admiten excepciones, claro que sí. Pero entonces, junto con el texto de la regla, tiene que haber un *addendum* o apéndice en donde estén escritas las excepciones. Entonces, sí, dada cualquier posibilidad de confrontar la regla, o bien el objeto está entre las excepciones, o bien tiene que cumplir la regla.

Lo que no tendría sentido sería lo siguiente:

—Me dieron este número natural.

—Fijate, porque entonces es mayor que siete.

—No, me dieron el cuatro.

—Entonces, es una excepción que confirma la regla.

Este diálogo, sería interpretado como un diálogo "loco". Y estaría bien.

Otro ejemplo podría ser éste: "todas las mujeres se llaman Alicia". Ésa es la regla. Entonces, viene una mujer y no hace falta preguntarle cómo se llama, porque la regla dice, que *todas se llaman Alicia*. Sin embargo, ella dice llamarse Carmen. Cuando le contamos que existe la regla de que *todas las mujeres se llaman Alicia,* ella contesta que es una excepción que *confirma la regla*. Por supuesto, este último diálogo sería considerado "loco" también.

La moraleja de esta primera parte es que no hay problemas en aceptar que una regla pueda tener excepciones, pero esas excepciones tienen que estar en el mismo lugar en donde figura la regla.

Avancemos un paso más. En latín, la frase:

exceptio probat regulam in casibus non exceptis

se traduce como "la excepción confirma que la regla vale en los casos no exceptuados"... y yo puedo convivir con esta definición. Pero claro, también me doy cuenta de que no tendría ningún sentido entonces hacer reglas porque, en el momento de usar una, no sabríamos si en ese caso la podemos aplicar o es uno de los casos exceptuados.

Por último, rastreando el origen de este problema (que no es sólo patrimonio del castellano sino también de otros idiomas, como el inglés, por poner un ejemplo), uno se remonta entonces a la antigua Grecia, en donde una persona (todos eran científicos y sabios en esa época, de manera que esto que escribo no debería sorprender a nadie) estaba sentada en la puerta de su casa, con un cartel que decía: "tengo una regla. Y estoy dispuesto a 'testearla', a 'ponerla a prueba'". Es más: esta persona *desafiaba* a quien pusiera en duda *su regla* a que le trajera cualquier *potencial excepción*. Él estaba dispuesto a *derrotar al enemigo y demostrarle que no había excepciones. Que la regla, "estaba en regla"*.

En consecuencia, otra persona (que por allí pasaba) sostenía que tenía una "excepción" y desafiaba al primero. Si la "excepción" permanecía en pie luego de testear la regla es porque *no había regla*. En cambio, si al finalizar la prueba, *la regla seguía viva*, entonces, la tal excepción... no era una excepción.

En realidad, el problema está en que el verbo CONFIRMAR está mal traducido. Lo que se pretendía decir es que la tal excepción *ponía a prueba a la regla. Confirmar la regla* quería decir que *la supuesta excepción no era tal*.

Nosotros, con el paso del tiempo, hemos aceptado con total ingenuidad que una regla puede tener excepciones (lo cual no estaría mal, siempre y cuando estuvieran "listadas" en alguna parte) y no nos cuestionamos la validez de la frase del principio.

Preguntas que se le hacen a un matemático (ya que uno no tiene ni idea de qué es lo que hace, ni para qué lo hace)

Como escribí antes, en general si a una persona le preguntan ¿qué hace un matemático? o ¿qué es la matemática?, la *enorme* mayoría de las personas contesta: ¿Es la ciencia de los números? (y responde con temor, porque no está muy seguro de que lo que está diciendo está bien o mal).

Peor aún: es el único ejemplo que tengo de que *los padres* de los chicos que van al colegio tienen la tendencia a aceptar como lógico que sus hijos acepten con resignación que no entienden "nada de matemática", porque ellos mismos tuvieron múltiples problemas con ella. Luego, ¿cómo no comprenderlos? Pero no sólo eso: no conozco ningún otro ejemplo en el que la gente se *ufane* de que no entiende nada. Como si saborearan que fuera así, como si lo disfrutaran. ¿Ustedes conocen algún otro ejemplo en donde alguien diga casi con *orgullo*... "yo, de esto, *no entiendo nada*"?

Veamos aquí algunas preguntas que les (nos) hacen a los matemáticos:

- ¿De qué trabajás?
- ¿Para qué se usa eso que hacés?
- ¿Siempre te dan las cuentas?
- 132 por 1.525. Vos que sos rápido para eso... ¿Cuánto da?
- ¿Se usan todavía los longarritmos? (sic).
- ¿Es verdad eso de que das el nombre y por el orden de las letras te dicen el futuro?
- ¿Qué número viene después del tres y medio?
- ¿Cuánto es pi?
- ¿Me enseñás eso de la superficie?
- ¿Tres dividido cero es uno, cero o tres?
- ¿Los "capicúas" traen suerte?
- ¿Viste la de Donald en el país de la matemática?

- ¿Hay algo de matemática que sirva para conquistar chicas?
- ¿Cuando hay cero grados no hay temperatura?
- ¿Conocés esta calculadora?
- ¿Sirve esto para jugar a la ruleta?
- ¿Tuviste que estudiar mucho?
- ¿Sos inteligente, no?
- ¿Cómo se lee este número: 527398393030303938737363535353353322?
- ¿Por qué elegiste eso?

En fin: la lista podría continuar, y estoy seguro de que quien llegó hasta aquí, tiene muchas otras para aportar. Lo desesperante es que nosotros, quienes tendríamos que tener la *obligación* de comunicar adecuadamente la matemática, estamos en una situación de *deudores permanentes*, porque no logramos el objetivo: mostrar la belleza que tiene.

Créanme: no son los alumnos ni los padres. Somos nosotros, los docentes.

Votaciones ¿son realmente la manera más justa de decidir?

Esto que voy a contar aquí pretende hacerlos pensar si algo que uno da por sobreentendido (que una votación es la manera más justa de elegir algo) *realmente* lo es.

Supongamos que uno tiene que elegir presidente de un país (lo mismo sería si uno tiene que elegir cuál es la favorita entre algunos tipos de torta). Sin ninguna duda, la manera que todo el mundo considera más justa es una votación. Y así debería ser. De todas formas, hay algunas personas (no necesariamente antidemocráticas... espere, un poco antes de criticarlas) que tienen otras ideas. Cuando uno analiza la situación desde un punto de vista matemático puede encontrar algunos tropiezos. Veamos.

De acuerdo con el matemático Donald Saari (quien probó recientemente un importante resultado con respecto a la teoría de la votación), es posible crear, a través del voto, cualquier elección que uno quiera. Es decir, *distorsionar la voluntad popular hasta hacerla coincidir con lo que uno quiere. Aunque uno no lo pueda creer.* Todo lo que uno tiene que saber es aproximadamente qué es lo que piensa la población o los potenciales votantes (cosa que se puede lograr a través de encuestas con niveles de error muy bajos en la actualidad). Entonces es posible crear "fórmulas" de manera tal que los votantes *elijan o aprueben unas por encima de otras, hasta lograr que voten por lo que uno quiere,* aunque ellos crean que están votando libremente. La clave es que quien maneja la "mayoría" son quienes están en control.

Veamos un ejemplo. Lo vamos a hacer con número reducido de votantes (30) y pocos candidatos (3). Pero la idea que uno saca de este caso será suficiente para advertir que esto puede hacerse en casos más generales. Supongamos entonces que hay 30 votantes y supongamos que hay 3 candidatos para elegir: A, B y C. Voy a usar una notación para indicar que los votantes prefieren al candidato A sobre el B. Es decir, si escribimos A > B, esto significa que la población, puesta a elegir *entre A y B,* elegiría a A. Por otro lado, si escribiéramos A > B > C, esto significa que puestos a elegir entre A y B, preferirían a A, y entre B y C elegirían a B. Pero también dice que si hubiera que elegir entre A y C elegirían a A. Ahora, pasemos al ejemplo:

10 votantes quieren A > B > C.
10 votantes prefieren B > C > A.
10 votantes elegirían C > A > B. (*)

Es decir, tenemos esa distribución de los votantes en el caso de que tuvieran que ir eligiendo entre los tres candidatos. Supongamos ahora que uno tiene una elección, en donde primero hay que elegir entre dos candidatos, y el ganador compite con el tercero que no participó. Y supongamos que queremos hacer presidente a C. Primero, hacemos competir a B contra A. Mirando en la tabla que está en la página 198 (*), vemos que A ganaría con 20 votos si la gente tuviera que elegir entre A y B. Luego, lo hacemos competir al ganador (A) con el que queda (C), y mirando otra vez el diagrama (*) gana C (obtendría también 20 votos). Y con esto conseguimos el resultado que queríamos.

Si, para comprobar la teoría, uno prefiere que salga presidente A, hacemos "confrontar" primero a B contra C. Entonces, gana B. Este ganador, B, luego compite con A, y nosotros sabemos que A le gana (de acuerdo con *). Y queda presidente. Por último, si uno prefiere que B sea el presidente, hacen competir a A con C, y mirando otra vez la lista de (*) advertimos que ganaría C. Este ganador, C, compite con B, y en ese caso ganaría B. Y logramos nuestro cometido.

Vale la pena notar que en cada elección el *ganador* obtiene el 66% de los votos, con lo cual la gente diría que fue "una paliza". Nadie cuestionaría al ganador, ni al método.

El resultado de Saari es aún más interesante, porque sostiene que es capaz de "inventar" escenarios más increíbles con más candidatos, en donde, por ejemplo, *todos* prefieren a A sobre B, pero que él logra que B sea el ganador. El trabajo del matemático apareció en un artículo que se llama "Una exploración caótica de paradojas de sumas" o bien, "A Chaotic Exploration of Aggregation Paradoxes", publicado en marzo de 1995, en el SIAM Review, o sea, por la Society for Industrial and Applied Mathematics (Sociedad para la Matemática Industrial y Aplicada).[42]

[42] Este artículo fue extraído de la página de Internet de la American Mathematical Society y fue escrito por Allyn Jackson.

Jura ética

Cada vez que en la facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires egresa algún alumno, debe jurar enfrente de sus pares y el decano de la facultad. En general, los juramentos se hacen por Dios y por la Patria; por Dios, la Patria y los Santos Evangelios; por el honor o por la Patria solamente. Las variantes son muchas pero esencialmente ésas son las principales.

Sin embargo, desde el año 1988, en la facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, un grupo de estudiantes, coordinados por Guillermo A. Lemarchand y apoyados por las autoridades de esa casa de altos estudios y por el Centro de Estudiantes, organizaron el Simposio Internacional sobre "Los Científicos, la Paz y el Desarme".

En plena vigencia de la Guerra Fría, se debatió el papel social que deben desempeñar los científicos y su responsabilidad como generadores de conocimientos que, eventualmente, podrían poner en peligro a la humanidad. Como resultado de ese Congreso se elaboró una fórmula de juramento de graduación —similar al juramento hipocrático de los médicos— mediante la cual los egresados de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales se comprometen a usar sus conocimientos en favor de la paz. Este juramento se realiza en forma optativa —afortunadamente lo eligen casi el 90% de los graduados— y su texto quedó redactado de la siguiente manera:

Teniendo conciencia de que la ciencia y en particular sus resultados pueden ocasionar perjuicios a la sociedad y al ser humano cuando se encuentran ausentes los controles éticos, ¿juráis que la investigación científica y tecnológica que desarrollaréis será para beneficio de la humanidad y a favor de la paz, que os comprometéis firmemente a que vuestra capacidad como científicos nunca servirá a fines que lesionen la dignidad humana guiándoos por vuestras convicciones y creencias personales, asentadas en auténtico conocimiento de las situaciones que os rodean y de las posibles consecuencias de los resultados que puedan derivarse de vuestra labor, no anteponiendo la remuneración o el prestigio, ni subordinándolos a los intereses de empleadores o dirigentes políticos?

Si así no lo hiciéreis, vuestra conciencia os lo demande.

Creo que el texto es autoexplicativo. Pero más allá de una jura simbólica, es una toma de posición frente a la vida. Como la celebro, la quería compartir aquí en este libro y ponerla a consideración de aquellas universidades que no tengan una fórmula de juramento como la que antecede.

Cómo tomar un examen

Hace muchos años que me hago una pregunta: ¿es razonable el sistema de exámenes que se usa en la Argentina? O en todo caso, el tipo de exámenes que se utiliza hoy en día, en casi todo el mundo, ¿es razonable? (Me refiero a los exámenes en los colegios primarios y secundarios en particular.)

Yo sé que lo que voy a escribir tiene un costado provocativo y que muchos docentes (y muchos no docentes también) van a estar en desacuerdo. Pero no importa. Sólo pretendo llamar la atención sobre algunos puntos que creo vale la pena investigar. Y discutir. Creo que el siglo XXI será testigo de un cambio estructural en este rubro. Los estudiantes tendrán otra participación. La relación docente-alumno *tiene* que cambiar. Y los sistemas de evaluación también.

El examen *tipo,* el que conocemos habitualmente, en donde un profesor piensa una serie de problemas y el alumno tiene un determinado tiempo para contestarlos, tiene un componente perverso difícil de disimular: una persona, generalmente un docente, tiene a un grupo de jóvenes o chicos a su merced y sutilmente abusa de su autoridad. El docente es quien establece todas las reglas y sus decisiones son —casi— inapelables. Así jugado, el juego es muy desparejo. Los jóvenes suelen estar a merced de este(a) señor(a) que ha decidido tomar en sus manos la tarea de “examinar”. Nada menos.

Hasta hace relativamente poco, las maestras usaban las reglas para pegar a los niños en los nudillos o en las manos, les ataban el brazo izquierdo a los chicos para estimularlos a que escribieran con la derecha y se transformaran en “normales”, no se podía usar bolígrafo, ni secante, ni borrar, ni tachar, ni tener agujeros en la carpeta, etcétera. Se estimulaba a memorizar y se premiaba al joven rápido que recordaba mucho y se sacaba diez en todo. Se lo ponía como ejemplo de mejor persona porque parecía mejor alumno. Dentro de unos años, vamos a mirar hacia atrás y nos vamos a encontrar tan avergonzados como quienes se reconocen en los ejemplos anteriores.

El examen desde un alumno

El docente es quien asume, entre sus tareas, la de averiguar si los alumnos estudiaron, se prepararon, si comprendieron, si dedicaron tiempo y esfuerzo… si saben. Pero en general suelen omitir una pregunta a ellos mismos muy importante: ¿los interesaron antes?

¿Quién tiene ganas de dedicar su tiempo, su energía y esfuerzo a algo que no le interesa? ¿Sabemos los docentes despertar curiosidad? ¿Quién nos preparó para eso? ¿Quién nos enseñó o enseña a generar apetito por aprender? ¿Quién se preocupa por bucear en los gustos o inclinaciones de los jóvenes para ayudarlos a desarrollarse por allí?

Hagan una prueba: tomen un niño de tres años y cuéntenle cómo se concibe una criatura. Es muy posible que si ustedes tienen buena sintonía con el niño, él los escuche, pero después salga corriendo a jugar con otra cosa. En cambio, si ustedes hacen las mismas reflexiones delante de un niño de seis o siete años, verán

cómo el interés es diferente, la atención es distinta. ¿Por qué? Porque lo están ayudando a encontrar la respuesta a una pregunta que él ya se hizo. El mayor problema *de la educación en los primeros niveles es que los docentes dan respuestas a preguntas que los niños no se hicieron*; tener que tolerar eso es decididamente muy aburrido. ¿Por qué no prueban al revés? ¿Puede todo docente explicar por qué enseña lo que enseña? ¿Puede explicar para qué sirve lo que dice? ¿Es capaz de contar el origen del problema que llevó a la solución que quiere que aprendamos?

¿Quién dijo que la tarea del docente es sólo dar respuestas? *La primera cosa que un buen docente debiera hacer es tratar de generar preguntas.* ¿Ustedes se sentarían a escuchar respuestas a preguntas que no se hicieron? ¿Lo harían con ganas? ¿Lo harían con interés? ¿Cuánto tiempo le dedicarían? ¿Por qué lo harían? Para cumplir, por elegancia, por respeto, porque no les queda más remedio, porque están obligados, pero tratarían de escapar lo más rápido que pudieran. Los jóvenes o los niños no pueden. En cambio, si uno logra despertar la curiosidad de alguien, si le pulsa la cuerda adecuada, el joven saldrá en búsqueda de la respuesta porque le interesa encontrarla. La encontrará solo, se la preguntará al compañero, al padre, al maestro, la buscará en un libro, no sé. Algo va a hacer, porque está motorizado por su propio interés.

La situación, vista desde un alumno, podría resumirse así: “¿Por qué estoy obligado a venir en el momento que me dicen, a pensar en lo que me dicen, a no mirar lo que otros escribieron y publicaron al respecto, a no poder discutirlo con mis compañeros, a tener que hacerlo en un tiempo fijo, a no poder ir al baño si necesito hacerlo, a no poder comer si tengo hambre o beber si tengo sed, y encima puede que me sorprendan con preguntas sin darme tiempo para prepararlas?”

Puesto todo junto, ¿no luce patético? Es probable que varios alumnos no logren nunca resolver los problemas del examen que tienen delante, pero no porque desconozcan la solución, sino porque no lleguen nunca a superar todas las vallas que vienen antes.

Desde el año 1993 estamos haciendo una experiencia en la Competencia de Matemática que lleva el nombre de mi padre. Los alumnos de todo el país que se presentan a rendir la prueba pueden optar por anotarse en pareja. Esto es: si quieren, pueden rendir individualmente, pero si no, pueden elegir un compañero o compañera para pensar los problemas en conjunto, buscarse alguien con quien discutir y polemizar los ejercicios. Este método, ¿no se parece más a la vida real? ¿No nos llenamos la boca diciendo que tratamos de fomentar el trabajo en grupo, las consultas bibliográficas, las interconsultas con otros especialistas, las discusiones en foros, los debates… en el mundo de todos los días? ¿Por qué no tratamos de reproducir estas situaciones en la ficción de un aprendizaje circunstancial?

En el colegio primario o secundario, en donde los maestros o profesores tienen un contacto cotidiano con los alumnos —si la relación interactiva docente-alumno funcionara efectivamente como tal— no entiendo las pruebas por sorpresa. ¿No es suficiente esa relación que dura meses para detectar quién es el que entendió y quién no? ¿Hace falta como método didáctico tirarles la pelota como si estuvieran jugando al distraído? Estos sistemas de examinación tienen un fuerte componente de desconfianza. Pareciera que el docente sospecha que el alumno no estudió o que no sabe, o que se va a copiar, y entonces lo quiere descubrir. Y allí empieza la lucha. Una lucha estéril e incomprensible, que exhibe la disociación más curiosa: nadie pelearía contra quien lo ayuda, ni trataría de engañarlo. Quizás el problema ocurra porque el alumno no logra descubrir que la relación está dada en esos términos, y como la responsabilidad mayor pasa por los que estamos de este lado, no hay dudas de que los que tenemos que cambiar somos nosotros.

No propongo el "no examen". Es obvio que para poder progresar en cualquier carrera, en cualquier estadio de la educación,

uno tiene que demostrar —de alguna manera— que sabe lo que debería saber. Eso está fuera de discusión. Discrepo con la metodología, me resisto a este "tipo" de examen, sencillamente porque no tengo claro que mida lo que pretende medir.

De lo que sí estoy seguro, como escribí más arriba, es de que en este siglo habrá muchos cambios al respecto. Pero hace falta que empecemos. Y una buena manera es empezar por casa, discutiendo por qué enseñamos lo que enseñamos, por qué enseñamos *esto* en lugar de *esto otro*, para qué sirve lo que enseñamos, *qué preguntas contesta lo que enseñamos* y aun más importante: *¿quién hizo las preguntas: el alumno o el docente?*

Niños prodigio

¿Qué significa ser un "niño prodigio"? ¿Qué condiciones hay que reunir? ¿Ser más rápido que tus pares o estar más adelantado, o ser más profundo, más maduro? ¿O es hacer más temprano lo que otros hacen más tarde o nunca?

Lo que me queda claro es que los humanos necesitamos categorizar, compartimentar. Eso nos tranquiliza. Si en promedio un niño empieza el colegio a los seis años, el secundario a los trece y la facultad cuando ya puede votar… cualquier "corrimiento" de lo preestablecido lo distingue, lo separa, lo "anormaliza".

Mi vida fue distinta, pero yo no lo supe hasta que pasaron algunos años. Yo hice el primer grado de la escuela primaria como alumno libre y eso me permitió entrar en lo que hoy sería segundo grado cuando tenía todavía cinco años. Cuando terminé "quinto" me propusieron hacer el ingreso en el Colegio Nacional de Buenos Aires. Lo preparé, pero después no me dejaron rendir el examen porque dijeron que era demasiado pequeño: tenía diez años. Entonces, mientras cursaba sexto grado estudié todas las materias del primer año del secundario para rendirlas como alumno libre otra vez. Y lo hice. Por eso, entré con once años al segundo ciclo lectivo. Y luego, mientras cursaba el quinto año por la mañana hacía en paralelo el curso de ingreso a Ciencias Exactas por la noche. Es decir, hice mi primera incursión en una facultad cuando sólo tenía catorce años. Ah, me recibí como licenciado en matemática cuando tenía diecinueve y como doctor un poco más adelante. Y además estudiaba piano con el gran pianista argentino Antonio De Raco, quien me llevó a tocar *La Tempestad* de Beethoven en Radio Provincia cuando sólo tenía once años.

Ése es el racconto. Ahora, algunas reflexiones. Para los de alrededor yo entraba en la categoría de "prodigio": ¡es un bocho en matemática!, ¡sabe logaritmos! (qué estupidez, por Dios). ¡Tenés que escucharlo tocar el piano! ¿Prodigio yo? Yo no tenía idea de lo que estaba haciendo. Me costaba conseguir las cosas igual que a mis compañeros. Es obvio que podía hacerlo, pero también es obvio que tenía todas las condiciones para poder desarrollarlo. En la casa que yo nací, con los padres que tuve, ¿cómo no me iba a desarrollar más rápido si no había virtualmente restricciones? ¿De qué prodigio me hablan? No desconozco los trastornos emocionales que puede acarrear tener compañeros mayores. Pero ¿la madurez es sólo una cuestión cronológica? Yo no recuerdo haber tenido problemas con eso. Y quería jugar a la pelota. Y lo hacía.

Aún hoy no encontré una buena definición de lo que es la "inteligencia", pero hay una fuerte tendencia entre los humanos a considerarla un bien "heredado" o "genético". Y eso lleva a la veneración. Y como no depende de uno, es inalcanzable: "Lo que Natura non da, Salamanca non presta". ¡Mentira! Yo me inclino por valorar las condiciones del medio ambiente donde un niño se desarrolla. Todos los niños nacen con habilidades, con destrezas. El problema reside en tener los medios económicos que permitan descubrirlas y un entorno familiar que las potencie y estimule. Yo lo tuve, y eso no me transformó en un prodigio, sino en un privilegiado.

Historia de los cinco minutos y los cinco años

Un señor estaba trabajando en su fábrica, cuando, súbitamente, una de las máquinas vitales para su línea de producción se detuvo. El señor, acostumbrado a que esto sucediera algunas veces, intentó ver si podía resolver el problema. Probó con la electricidad, revisando el aceite que utilizaba la máquina, y probó tratando de hacer arrancar el motor en forma manual. Nada. La máquina seguía sin funcionar.

El dueño empezó a transpirar. *Necesitaba que la máquina funcionara*. La línea de producción completa estaba detenida porque esta pieza del rompecabezas estaba roto.

Cuando ya se habían consumido varias horas y el resto de la fábrica estaba pendiente de lo que pasaba con la máquina, el dueño se decidió a llamar a un especialista. No podía perder más tiempo. Convocó a un ingeniero mecánico, experto en motores. Se presentó una persona relativamente joven o, en todo caso, más joven que el dueño. El especialista miró la máquina un segundo, intentó hacerla arrancar y no pudo, escuchó un ruido que le *indicó algo* y abrió la "valijita" que había traído. Extrajo un destornillador, abrió una compuerta que no permitía ver al motor y se dirigió a un lugar preciso. Sabía dónde ir: ajustó un par de cosas e intentó nuevamente. Esta vez, el motor arrancó.

El dueño, mucho más tranquilo, respiró aliviado. No sólo la máquina sino que toda la fábrica estaban nuevamente en funcionamiento. Invitó al ingeniero a pasar a su oficina privada y le ofreció un café. Conversaron de diferentes temas pero siempre con la fábrica y su movimiento como tópico central. Hasta que llegó el momento de pagar.

—¿Cuánto le debo? —preguntó el dueño.

—Me debe 1.500 dólares.

El hombre casi se desmaya.

—¿Cuánto me dijo? ¿1.500 dólares?

—Sí —contestó el joven sin inmutarse y repitió—, 1.500 dólares.

—Pero escúcheme—, casi le gritó el dueño—. ¿Cómo va a pretender que le pague 1.500 dólares por algo que le llevó cinco minutos?

—No, señor —siguió el joven—. Me llevó cinco minutos y cinco años de estudio.[43]

¿Por qué escribí este libro?

Es una historia repetida. No importa dónde, no importa con quién, no importa cómo, siempre hay espacio para expresar el odio hacia la matemática. Pero ¿por qué? ¿Por qué genera tanta reacción contraria? ¿Por qué tiene tan mala prensa?

Como matemático me tropiezo muchísimas veces con las preguntas obvias: ¿para qué sirve? ¿Cómo se usa?… y ustedes pueden completar aquí con las propias. O peor aún: niños (y padres) dicen: "no entiendo nada", "me aburro", "nunca fui bueno para eso"… Así… "eso". La matemática es una especie de "eso" o eventualmente "ésa", que está poco menos que omnipresente en los colegios y escuelas, y que se exhibe como la torturadora universal.

La matemática es sinónimo de casi todos los momentos tristes de nuestro crecimiento escolar. Es sinónimo de *frustración*. Cuando éramos pequeños, nada exhibía mejor nuestra impotencia que un problema de matemática. Un poco más adelante, ya en los colegios secundarios, uno se encuentra con problemas de

[43] Un final alternativo es el siguiente:
—¿Cuánto me dijo? ¿1.500 dólares? Mándeme por favor una factura detallada.
El joven le manda una factura que dice:
"Costo del tornillo que se cambió: 1 dólar
Costo de saber qué tornillo cambiar: 1.499 dólares".
… y el dueño pagó sin protestar más.

física y química, pero, esencialmente, las mayores dificultades están siempre asociadas con la matemática.

No conozco el dato exacto, pero apostaría a que si uno hiciera una revisión en *todos los colegios secundarios* y se hiciera la siguiente pregunta: dado un alumno que se lleva *más de una asignatura a examen (sea en diciembre o en marzo), ¿en cuántos casos una de las dos será matemática?*, estoy seguro de que el resultado sería sorprendente. ¿Cuánto dará? ¿El 80% de los casos? ¿Más? Estoy seguro de que rondará ese número.

Un estudiante detecta rápidamente que la historia es algo que pasó. Le gustará o no, le interesará o no, pero pasó. Uno puede analizar los hechos del presente como una consecuencia de lo pasado. En todo caso, el estudiante (y el docente) podrán o no entender para qué les sirve estudiarla, pero el estudiante no necesita preguntarse *qué es*.

Con la biología lo mismo: las plantas están, los animales también, la clonación sale en los diarios y uno escucha hablar de ADN y la decodificación del genoma humano por televisión. Geografía, contabilidad, lenguaje, gramática, idioma… todo tiene una autoexplicación. La matemática no tiene *abogado que la defienda. No hay ninguna otra asignatura de la currícula que se pueda comparar. La matemática pierde siempre.* Y como no tiene buena prensa, se hace incomprensible que a uno lo obliguen a estudiarla. ¿Para qué?

Los propios padres de los jóvenes están de acuerdo, porque ellos mismos tuvieron malas experiencias también.

Para mí hay una conclusión obvia. Los peores enemigos que tiene la matemática somos los propios docentes, porque no logramos despertar en los jóvenes que tenemos enfrente la curiosidad mínima para poder disfrutarla. La matemática contiene una belleza infinita, pero si las personas que la tienen que disfrutar no la pueden ver, la culpa es de quien la expone.

Enseñar a disfrutar de pensar, de tener un problema, de regodearse aun cuando uno no puede encontrar la solución pero lo tiene como un desafío, es una tarea de los docentes. Y no es sólo un problema *utilitario.* No abogo por eso tampoco: no pretendo que alguien haga una lista de *potenciales usos* para convencer a la audiencia. No. Hablo de la magia de poder pensar, seducir mostrando lo que se ignora, desafiar a la mente.

Eso es lo que no tiene la matemática: no tiene quién la defienda.

Soluciones

1. Solución al problema del hotel de Hilbert

a) Si en lugar de una persona llegan dos, lo que el conserje tiene que hacer es pedirle al de la habitación 1 que vaya a la 3, al de la 2 a la 4, al de la 3 a la 5, al de la 4 a la 6, etcétera. Es decir, pedirle a cada uno que se corra *dos habitaciones.* Eso dejará las *dos* primeras habitaciones libres que servirán para alojar a los dos pasajeros recién llegados.

b) Si en lugar de dos pasajeros llegan cien, entonces lo que hay que hacer es decirle al señor de la habitación 1 que pase a la 101, al de la 2, a la habitación 102, al de la 3, a la habitación 103, y así siguiendo. La idea es que cada uno se corra *exactamente* cien habitaciones. Eso dejará cien habitaciones libres, que ocuparán los cien nuevos pasajeros que recién arribaron.

c) Con la misma idea que solucionamos las partes a) y b) se responde ésta. Si los que llegan son *n* nuevos pasajeros, la solución es correr cada pasajero que ya ocupaba una habitación, *n* habitaciones. Es decir: si alguien está en la habitación x, pasarlo a la habitación (x + n). Eso dejará *n* habitaciones libres para los recién llegados. Y para terminar de contestar la pregunta que plantea el ítem c), la respuesta es sí, sea cual fuere el número de personas que llega, SIEMPRE se puede resolver el problema como acabamos de indicar.

d) Por último, si los que llegan son *infinitos* nuevos pasajeros, entonces, ¿qué hacer? Una posibilidad es decirle al de la pieza 1 que pase a la 2, al de la 2 que pase a la 4, al de la 3 que pase a la 6, al de la 4 que pase a la 8, al de la 5 que vaya a la 10, etcétera. Es decir, cada uno pasa a la habitación que está indicada con *el doble* del número que tiene en ese momento. De esta forma, todos los recién llegados tienen una habitación (las que están marcadas con un número *impar)* mientras que los pasajeros que ya estaban antes de la invasión de nuevos turistas, ocuparán ahora todas las habitaciones con números *pares* en la puerta.

MORALEJA: los conjuntos infinitos tienen propiedades muy peculiares, pero, entre otras, la que atenta contra la intuición es que un subconjunto "más pequeño", "contenido" dentro de un conjunto, puede contener el mismo número de elementos que el *todo.* Sobre este tema hablamos bastante en el capítulo de los *distintos tipos de infinitos.*

2. Solución al problema de que 1 = 2

El razonamiento es perfecto hasta un punto: cuando en el texto dice:

Sacando factor común en cada miembro,

2a (a-b) = a (a-b)

Luego, simplificando en ambos lados por (a-b), se tiene:

2a = a.

Y aquí me quiero detener: ¿se puede simplificar? Es decir, analicemos lo que quiere decir "simplificar" y si se puede *siempre* simplificar.

Por ejemplo:

Si uno tiene 10 = 4 + 6

2 . 5 = 2 . 2 + 2 . 3

2 . 5 = 2 (2 + 3) (*)

en este caso, aparece el número 2 en los dos términos y uno, si simplifica (es decir, como el número 2 aparece como factor en ambos lados, uno se "deshace" de él) y resulta:

5 = (2+3) . (**)

Como se ve, en este caso, la igualdad que había en (*), sigue valiendo en (**)

En general, si uno tiene

a . b = a . c,

¿se puede *siempre* simplificar? O sea, ¿se puede *siempre* eliminar el factor *a* que aparece en ambos miembros? Si uno simplifica, ¿siempre vale la igualdad *b* = *c*?

Fíjense en el siguiente caso:

0 = 2 . 0 = 3 . 0 = 0 (***)

Es decir, como uno sabe que 0 = 0, y tanto 2.0 como 3.0 son cero, se deduce la igualdad (***).

Luego, de la igualdad

2 . 0 = 3 . 0

uno podría hacer lo mismo que hizo en el caso del número 2 un poco más arriba. Ahora, lo que debería valer, es que si uno "elimina" el número 0 de cada miembro (ya que en ambos está como factor), se tendría:

2 = 3

que claramente es falso. El problema, entonces, es que para que uno pueda "eliminar" o "simplificar", el factor del que se va a deshacer tiene que ser diferente de 0. O sea, una vez más, aparece la *imposibilidad de dividir por cero.*

Lo que seguía de la deducción de que 1 = 2, ahora resulta irrelevante, porque el problema se plantea cuando uno quiere dividir por (a-b), que es cero, porque al principio de todo, escribimos que *a = b,* y por lo tanto,

a - b = 0

3. Solución al problema de la potencial doble descomposición del número 1.001

El número 1.001 = 7 . 143 = 11 . 91

Esto parecería atentar contra la validez del teorema fundamental de la aritmética, porque pareciera que el número 1.001 tiene *dos descomposiciones.* Sin embargo, el problema es que ni 143 ni 91 son primos.

143 = 11 . 13

y

91 = 7 . 13

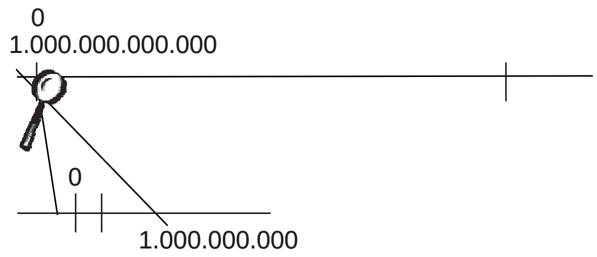
Luego, podemos respirar tranquilos. El teorema sigue *vivito y coleando.*

4. Solución a la correspondencia entre los números naturales y los racionales positivos y negativos

Al 0/1 le asignamos el 1
Al 1/1 le asignamos el 2
Al -1/1 le asignamos el 3
Al 1/2 le asignamos el 4
Al -1/2 le asignamos el 5
Al 2/2 le asignamos el 7
Al -2/2 le asignamos el 8
Al 2/1 le asignamos el 9
Al -2/1 le asignamos el 10
Al 3/1 le asignamos el 11
Al -3/1 le asignamos el 12
Al 3/2 le asignamos el 13
Al -3/2 le asignamos el 14
Al 3/3 le asignamos el 15
Al -3/3 le asignamos el 16
Al 2/3 le asignamos el 17
Al -2/3 le asignamos el 18
Al 1/3 le asignamos el 19
Al -1/3 le asignamos el 20
Al 1/4 le asignamos el 21
Al -1/4 le asignamos el 22
Al 2/4 le asignamos el 23
Al -2/4 le asignamos el 24
Al 3/4 le asignamos el 25
Al -3/4 le asignamos el 26
Al 4/4 le asignamos el 27…

...y así sucesivamente.

5. Solución al problema de un punto en un segmento



6. Solución al problema de la moneda cargada

Supongamos que la probabilidad de que salga cara es *p* y la probabilidad de que salga ceca es *q.*

Antes de escribir la solución, analicemos qué pasaría si tiráramos esta moneda al aire *dos veces seguidas.* ¿Cuáles son los resultados posibles?

1. Cara - Cara
2. Cara - Ceca
3. Ceca - Cara (*)
4. Ceca - Ceca

Es decir, hay cuatro resultados posibles.

¿Cuál es la probabilidad de que salga (1) (o sea, cara-cara)? La probabilidad será igual a $p \cdot p = p^2$. ¿Por qué? Ya sabemos que la probabilidad de que salga cara la primera vez es *p.* Si ahora repetimos el proceso, la probabilidad de que *vuelva* a salir cara, sigue siendo *p.* Como estamos tirando la moneda *dos veces seguidas,* las probabilidades se multiplican y resulta $(p \cdot p) = p^2$. (**) [44]

[44] En realidad, si todavía no se convencieron de este hecho (me refiero a que hay que multiplicar las probabilidades), piensen en que la probabilidad está definida como el cociente entre los *casos favorables* sobre los *casos posibles.* Y en el caso del mismo evento repetido dos veces, los casos *favorables* se calculan entonces, *multiplicando los casos favorables por sí mismos.* Y lo mismo sucede con los *casos posibles,* que se obtienen *elevando los casos posibles al cuadrado.*

Una vez que esto está claro, entonces calculemos la probabilidad de que suceda cada uno de los eventos que figuran en la lista (*)

a) Probabilidad de que salga cara-cara = p^2
b) Probabilidad de que salga cara-ceca = p.q
c) Probabilidad de que salga ceca-cara = q.p
d) Probabilidad de que salga ceca-ceca = q^2

Mirando entonces esta última "tablita", ¿no se les ocurre qué habría que hacer?

Lo que corresponde entonces para decidir entre dos alternativas con una moneda cargada es tirar la moneda *dos veces y pedirle a cada participante que elija: o bien cara-ceca o bien ceca-cara.* Como se ve en esta última lista, las probabilidades son las mismas: una es p.q y la otra es q.p Sin embargo, si sale cara-ceca, gana uno. Y si sale ceca-cara, gana el otro.

La pregunta que falta hacer es: ¿y si sale cara-cara o ceca-ceca? En ese caso, lo que hay que hacer es tirar de nuevo la moneda dos veces hasta desempatar.

7. Pensamiento lateral

Solución al problema del ascensor

Obviamente, el señor en cuestión sufre de enanismo. Ése es el problema por el cual no puede subir hasta su departamento por el ascensor: el señor no llega con sus manos hasta el décimo piso.

Solución al problema del bar

El señor tiene hipo. Lo que hace el barman es asustarlo y eso es suficiente para quitarle el problema. Por eso el señor agradece y se va.

Solución al problema del "ahorcado"

El señor se colgó luego de treparse a un bloque enorme de hielo, que luego se derritió, obviamente.

Varias veces, este problema aparece con un agregado: en el piso aparecía un charco de agua, o bien el piso estaba mojado o húmedo.

Solución al problema del "muerto" en el campo

El señor había saltado de un avión con un paracaídas que no se abrió. Y ése es el paquete que está "sin abrir" a su lado.

Solución al problema del brazo que llega por correo

Tres hombres quedaron atrapados en una isla desierta. Desesperados de hambre, decidieron amputarse los tres brazos izquierdos respectivos para comerlos. Se juraron entre sí que cada uno permitiría que le cortaran el brazo. Uno de ellos era médico y fue quien cortó el brazo de sus dos compañeros. Sin embargo, cuando terminaron de comer los brazos fueron rescatados. Pero como el juramento todavía estaba pendiente, el médico se hizo amputar el brazo y se los envió a sus colegas en la expedición.

Solución al problema del hombre que prueba la comida y se pega un tiro

El hecho es que ambas personas habían naufragado en un barco en donde viajaban ellos dos y el hijo de uno de ellos. En el accidente murió el hijo. Cuando el padre, ahora en el restaurant, probó el plato que habían pedido (albatros), se dio cuenta de que él nunca había percibido ese gusto y descubrió lo que había pasado: había estado comiendo la carne de su propio hijo y no la carne del animal (albatros) como siempre le habían hecho creer.

Solución al problema del hombre que descubrió que su mujer había muerto bajando las escaleras

El señor estaba bajando las escaleras de un edificio en donde había un hospital. Mientras lo hacía, se cortó la luz y él sabía que no había un aparato generador de corriente. Su mujer estaba conectada a un respirador artificial que requería de electricidad para mantenerla viva. Ni bien se dio cuenta de que se había cortado la corriente, eso implicaba forzosamente la muerte de su mujer.

Solución al problema de la mujer que se murió cuando se detuvo la música

La mujer era una equilibrista del circo que caminaba sobre una cuerda muy tensa que unía dos postes con una cabina en cada esquina. Mientras la mujer caminaba con una varilla en sus manos y la cara tapada, la señal de que había llegado a destino era que el director de la orquesta detenía la música. Una vez, el director enfermó y fue reemplazado por otro que no conocía el dato. La orquesta se detuvo antes. La mujer creyó estar a salvo e hizo un movimiento inesperado. Cayó y murió al detenerse la música.

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE LA HERMANA QUE MATA A LA OTRA

Ellas eran las dos únicas que quedaban representando a la familia; una de las hermanas se había enamorado a primera vista de este hombre y nunca sabría cómo hacer para encontrarlo. Sin embargo, era evidente que él conocía a alguien de la familia; por eso había ido al funeral de la madre. Entonces, la única manera de volver a verlo, sería en un nuevo funeral. Y por eso mata a la hermana.

8. PROBLEMA DE LOS TRES INTERRUPTORES DE LUZ

Lo que uno hace es lo siguiente. Mueve uno de los interruptores (cualquiera) hacia la posición de "encendido" y espera quince minutos (sólo para fijar las ideas, no es que haga falta tanto). Ni bien pasó este tiempo, uno vuelve el interruptor que tocó a la posición de "apagado" y "enciende" uno de los otros dos. En ese momento entra en la habitación.

Si la luz está encendida, uno sabe que el interruptor que está buscando es el que movió en segundo lugar.

Si la luz está apagada pero la bombita está caliente, eso significa que el interruptor que activa la luz es el primero, el que uno dejó en la posición de "encendido" durante quince minutos (por eso queríamos el tiempo... para que la "bombita" aumentara su temperatura).

Por último, si la bombita está apagada y además, al tocarla, no nota que haya diferencias con la temperatura ambiente, eso significa que el interruptor que activa la luz es el tercero, el que uno nunca tocó.

9. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE LOS 128 PARTICIPANTES EN UN TORNEO DE TENIS

La tentación que uno tiene es la de dividir el número de participantes por dos, con lo que quedan 64 partidos para la primera ronda. Como se elimina la mitad de ellos, quedarán, después de esos 64 partidos, 64 competidores. Luego, los dividimos en dos otra vez, y tendremos 32 partidos. Y así siguiendo. Resultaría que uno tiene que sumar la cantidad de partidos hasta llegar al partido final.

Pero les propongo pensar el problema de una forma distinta. Como hay 128 participantes, para que uno quede eliminado tiene que perder un partido. Nada más que uno. Pero tiene que perderlo. Luego, si hay 128 participantes al comienzo del torneo, y al final queda uno (el campeón, quien es el *único que no perdió ninguno de los partidos que jugó)*, significa que los restantes 127, para haber quedado eliminados tienen que haber perdido *exactamente un partido.* Y como en cada partido siempre hay *exactamente un ganador y un perdedor,* lo que tuvo que pasar es que tuvieron que jugarse *127 partidos* para que quedaran eliminados todos y quedara uno sólo que fue *el único que los ganó todos.*

Moraleja: se jugaron exactamente 127 partidos.

Si lo hubiéramos hecho de la otra forma, el resultado es (obviamente) el mismo: 64 partidos en la primera ronda, 32 después, 16 en los dieciseisavos de final, 8 en los octavos de final, 4 en las cuartos de final, dos en las semifinales y uno en la final. Si uno suma todos estos partidos:

$$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127$$

En el caso de ser únicamente 128 participantes, es fácil ir sumando o haciendo la cuenta. Pero la idea anterior serviría en el caso de que hubiera habido 1.024 participantes, en cuyo caso, el total de partidos a jugarse sería de 1.023.

10. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DEL BAR

Cada persona entró con 10 pesos en su bolsillo. Tenían que pagar la cuenta de 25 pesos. Cada uno puso sus 10 pesos y el mozo se llevó los 30.

Cuando volvió, trajo 5 billetes de un peso. Cada uno de los comensales se llevó un billete de un peso y le dio *dos* billetes al mozo.

Eso quiere decir que, como cada uno pagó 9 pesos (el billete de 10 que puso menos el billete de un peso que le devolvieron), en total, pagaron 27 pesos. ¡Y eso es exactamente lo que suma la cuenta (25 pesos) más la propina (2 pesos)!

Es incorrecto decir que los tres pagaron 9 pesos (lo cual suma 27) más los dos pesos de propina para el mozo (que sumados a los 27 resulta en los 29), porque en realidad, la cuenta más la propina suman 27, que es exactamente lo que pagaron entre los tres.

Cuando uno quiere multiplicar por tres los 9 pesos que cada uno puso y obtiene los 27 pesos, es porque uno *ya incluyó la propina más la cuenta.*

El problema engaña, porque a uno le presentan como dificultad que pagaron 27 pesos *más* los dos pesos de propina, cuando en realidad, en esos 27 pesos ya está incluida la recompensa para el mozo.

11. Solución al problema de los antepasados

Lo que no tiene en cuenta el argumento es que cada antepasado pudo (y de hecho tiene) un montón de hijos y nietos (por no seguir con bisnietos o tataranietos, etcétera).

Por ejemplo, mi hermana Laura y yo compartimos los mismos antepasados: ambos tenemos los mismos padres, los mismos abuelos, los mismos bisabuelos, etcétera. Pero si uno se corre "un poco" y considera un primo (*no un número primo, sino una prima hermana),* la cosa cambia: mi prima Lili y yo tenemos sólo seis abuelos distintos (y no ocho como los que tendría con cualquier otra persona que no fuera ni un primo hermano ni un hermano/a).

Es verdad que hace 250 años yo tenía más de mil antepasados, pero también es verdad que los compartía con mucha otra gente que ni siquiera conozco.

Por ejemplo (y los invito a que hagan un "árbol genealógico", aunque no conozcan los nombres de sus antepasados): si alguna persona y ustedes tuvieron un *bisabuelo en común*, entonces, de los 1.024 antepasados que ustedes tienen, comparten con esa

persona 128. Hagan la cuenta y vean que entonces llegan a tener exactamente 128 antepasados en común.

Esta situación, naturalmente, reduce *muchísimo* el número de antepasados, porque hace que dos personas que no se conocen tengan muchísimos antepasados comunes. Insisto: siéntense con un papel y un lápiz y hagan un "dibujito" para convencerse. También habría que considerar que quizá los 1.024 antepasados que teníamos hace 250 años *no fueran todos distintos.*

12. Solución al problema de Monty Hall

En principio, cuando el participante hace su primera elección, tiene una chance de acertar entre tres. O sea, la probabilidad de que se quede con el automóvil es un tercio. Aunque parezca redundante, este hecho es importante: el finalista tiene una chance para acertar entre tres, *y dos* de errar.

¿Qué preferirían ustedes en este caso? ¿Tener dos puertas o una sola? Claramente, uno elegiría tener dos y no una. Eso significa que, al elegir una, se está en desventaja con respecto a las otras dos. Y por eso, si hubiera otro participante y a él lo dejaran elegir dos, ustedes sentirían que quedaron en inferioridad de condiciones. Es más: siguiendo con esta idea, es seguro que si hubiera otro participante que se quedó con dos puertas para él, en una de ellas habría un chivo. Por eso, no es una sorpresa que el conductor del programa abra una de las que le correspondió a él y allí no estuviera el automóvil.

En eso, justamente, radica la idea del problema. Es preferible *tener* dos puertas, que tener una sola. Y por eso, cuando a uno le dan la chance de cambiar, *debe cambiar inmediatamente* porque aumenta uno las chances de acertar al doble, nada menos. Es que uno no puede ignorar que el problema empieza con las tres puertas *y uno elige una de las tres*.

Ahora, para convencerse aún más (si es que todavía le hace falta), veamos exhaustivamente *todas las posibilidades*.

Éstas son las tres posibles configuraciones:

	Puerta 1	Puerta 2	Puerta 3
Posición 1	Automóvil	Chivo	Chivo
Posición 2	Chivo	Automóvil	Chivo
Posición 3	Chivo	Chivo	Automóvil

Supongamos que tenemos la posición 1.

POSIBILIDAD 1: Ustedes eligen la puerta 1. El conductor abre la 2.
Si ustedes cambian, PIERDEN.
Si ustedes se quedan, GANAN.
Es obvio que si el conductor hubiera abierto la puerta 3, el resultado sería el mismo.

POSIBILIDAD 2: Ustedes eligen la puerta 2. El conductor abre la 3.
Si ustedes cambian, GANAN.
Si ustedes se quedan, PIERDEN.

POSIBILIDAD 3: Ustedes eligen la puerta 3. El conductor abre la 2.
Si ustedes cambian, GANAN.
Si ustedes se quedan, PIERDEN.

En resumen, ustedes GANAN en dos de las veces si cambian y sólo GANAN una vez si se quedan. Es decir, GANAN en el doble de las veces si cambian. Esto que parece "anti-intuitivo" o que "atenta contra la intuición", debería convencerlos. Pero si aún no es así, les sugiero que se sienten un rato con un lápiz.

En todo caso, otra manera de pensarlo es la siguiente: supongamos que en lugar de haber tres puertas, hubiera un millón de puertas y les dan a elegir una sola (como antes). Por supuesto, como antes, sólo detrás de una hay un automóvil. Para hacerlo aún más evidente, supongamos que hay dos competidores: uno de ustedes y otro. A uno le dan a elegir una sola puerta y, al otro, le dan las 999.999 restantes. No hace falta que le pregunte si a usted no le gustaría tener la chance de ser el otro, ya que la respuesta sería obvia. El *otro* tiene 999.999 más posibilidades de ganar. Ahora supongamos que una vez elegida una puerta, el conductor del programa *abre* 999.998 de las puertas del *otro* en donde él sabe que *no está* el automóvil y le da la chance ahora de elegir de nuevo: ¿se queda con la que eligió en principio o elige la que tiene *el otro*? Creo que ahora se entiende mejor (espero) que es conveniente cambiar. En todo caso, los invito a que piensen lo que sería tener que fabricar la tablita que aparece adjunta, pero en lugar de hacerla con tres puertas hacerla con un millón.

13. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE LA TAPA DE LAS "BOCAS DE TORMENTA"

Como estas tapas son de metal (hierro) muy pesado y son muy gruesas, si cupiera la posibilidad de que "cayeran" en el mismo pozo que están tapando, podrían obviamente lastimar gravemente a un humano. La única "forma geométrica regular" que impide que la tapa "caiga" esté en la posición en que esté, es que la tapa sea redonda. Por ejemplo, si fuera cuadrada, uno podría rotarla hasta ponerla en diagonal y en ese caso, caería fácilmente por el agujero. En consecuencia la respuesta es que son redondas por razones de seguridad y simplicidad.

14. SOLUCIÓN AL PROBLEMA DEL ACERTIJO DE EINSTEIN

Mi idea fue numerarlos:

1	2	3	4	5	Rojo
1	2	3	4	5	Azul
1	2	3	4	5	Verde
1	2	3	4	5	Amarillo
1	2	3	4	5	Blanco
1	2	3	4	5	Perro
1	2	3	4	5	Gato
1	2	3	4	5	Pájaro
1	2	3	4	5	Caballo
1	2	3	4	5	Pescado
1	2	3	4	5	Pall Mall
1	2	3	4	5	Blends
1	2	3	4	5	Dunhill

1	2	3	4	5	Prince
1	2	3	4	5	Bluemaster
1	2	3	4	5	Cerveza
1	2	3	4	5	Agua
1	2	3	4	5	Leche
1	2	3	4	5	Té
1	2	3	4	5	Café

Así se puede pasar cada condición a números. Por ejemplo: como el danés toma té, no puede vivir en el centro (porque en la casa del centro se toma agua). Eso significa que hay que tachar el número 3 en donde está el danés (porque la casa 3 es la del centro). Como el alemán fuma Prince, eso significa que el noruego es distinto de Prince (no pueden fumar lo mismo el noruego y el alemán).

Como amarillo = Dunhill y azul = 2 entonces, azul es distinto de Dunhill, o sea Dunhill no puede ser 2 (y hay que tacharlo). Como Bluemaster = cerveza, entonces Bluemaster es distinto de 3. Como verde = café, entonces verde distinto de 3. Como noruego = 1 y azul = noruego + 1 = 2, y además británico = rojo, entonces británico es distinto de 2. Como británico = rojo y hemos visto que británico no puede ser ni 1 ni 2, entonces rojo no puede ser 1, ni rojo puede ser 2. Como sueco = perro y sueco distinto de 1, entonces perro distinto de 1. Como danés = té y danés es distinto de 1, entonces té es distinto de 1. Como verde = café y verde no puede ser ni 2 ni 3 ni 5, entonces café no puede ser ni 2 ni 3 ni 5. Como noruego = 1 y azul = noruego + 1 entonces, azul = 2. Como blends = agua + o - 1, y agua no puede ser 3, entonces:

a) si agua = 1, entonces blends = 2
b) si agua = 2, entonces blends = 1 o 3
c) si agua = 4, entonces blends = 5 o 3
d) si agua = 5, entonces blends = 4

Por otro lado se sabe que:
verde es menor que blanco
verde = café
pall mall = pájaro
bluemaster = cerveza
blends = agua + o = 1

rojo = británico
sueco = perro
danés = té
blends = gato + o - 1
caballo = dunhill + o -1
alemán = prince
amarillo = dunhill

Puse todas estas condiciones en las tablitas que están más arriba, de manera tal de equiparar. Por ejemplo:

británico = rojo (por lo tanto, la línea del británico tiene que ser igual a la del rojo. Si hay algo que uno no puede ser, entonces el otro tampoco, y viceversa).

De un análisis surge, que verde puede ser 4 o 1. Pero si verde es = 4, como verde es menor que blanco, esto obliga a que blanco = 5… y de aquí, surge que rojo = 3 y amarillo = 1… con lo cual queda la siguiente situación (que es la que va a terminar siendo correcta):

amarillo = 1
azul = 2
rojo = 3
verde = 4
blanco = 5

De otro análisis, surge que Bluemaster puede ser 2 o 5. Si Bluemaster es 2, como Bluemaster = cerveza, entonces cerveza = 2, té = 5 y agua = 1 pero la hipótesis 15 obliga a que Blends = agua + 1, por lo que Blends = 2.

Luego, Bluemaster = 5, cerveza = 5, té = 2. Todo esto obliga a que Prince = 4 y esto implica que Pall Mall = 3 pero entonces Pall mall = 3, obliga a pájaro = 3 y entonces caballo = 2 y por lo tanto sueco = 5. Desde aquí, se desencadenaba todo. Hasta dar con el resultado final:

Casa 1	*Casa 2*	*Casa 3*	*Casa 4*	*Casa 5*
Amarillo	Azul	Rojo	Verde	Blanco
Gato	Caballo	Pájaro	PESCADO	Perro
Noruego	Danés	Británico	Alemán	Sueco
Dunhill	Blends	Pall Mall	Prince	Bluemaster
Agua	Té	Leche	Café	Cerveza

15. Solución al problema de las velas

Se toma una vela y se la enciende *de los dos extremos*. Al mismo tiempo, se enciende la otra vela.

Cuando la primera se terminó de consumir, pasó media hora. Eso quiere decir que queda también exactamente media hora hasta que la segunda vela termine de consumirse. En ese momento, se prende el otro extremo de la segunda vela.

En el instante en que se termina de consumir esta segunda vela, se cumplen exactamente quince minutos desde que empezó el proceso.

16. Solución al problema de los sombreros (1)

¿Cómo hizo C para poder contestar que tenía un sombrero blanco? Lo que hizo C es pensar en silencio lo siguiente. Supuso que él tenía un sombrero de color negro. Y entonces, con el razonamiento que voy a escribir ahora, se dio cuenta de que si él tuviera un sombrero de color negro, o bien A o bien B *debieron haber contestado antes que él el color del sombrero.* Y como no lo hicieron, es porque el sombrero que él *tiene* que tener es blanco.

Su línea de razonamiento fue la siguiente: "si yo tengo un sombrero negro, ¿qué pasó antes? A no pudo contestar. Claro, A no pudo contestar, porque al ver que B tenía un sombrero blanco no importaba que yo (C) tuviera uno negro. Él (A) no podía deducir nada de esta información. Pero… ¡pero B sí! Porque B, al ver que A no podía contestar, porque estaba viendo que B tenía un sombrero blanco, porque si no, si A hubiera visto que *ambos tenían sombreros negros,* hubiera dicho que él tenía uno blanco. Y no lo hizo. Por lo tanto, A tenía que haber visto que B tenía uno blanco. Pero B ¡tampoco contestó! Tampoco él pudo contestar". Lo cual significaba que B estaba viendo que C no podía tener un sombrero negro.

Conclusión: si C hubiera tenido un sombrero negro, A o bien B hubieran tenido que *poder contestar antes.* Ninguno de los dos pudo hacerlo, los dos tuvieron que pasar, porque C tenía un sombrero blanco.

17. Solución al problema de los sombreros (2)

¿Cómo hacer para mejorar la estrategia del 50%?

Lo que uno hace es lo siguiente. ¿Cuáles son las posibilidades de distribución de los sombreros? Pongamos en columnas los ocho casos (*hagan la cuenta para convencerse de que hay sólo ocho posibles alternativas)*:

A	B	C	
blanco	blanco	blanco	
blanco	blanco	negro	
blanco	negro	blanco	
blanco	negro	negro	(*)
negro	blanco	blanco	
negro	blanco	negro	
negro	negro	blanco	
negro	negro	negro	

La estrategia que establecen los tres es la siguiente: "cuando el director nos pregunte a uno de nosotros el color de sombrero, miramos los colores de sombrero de los otros dos. Si son iguales entre sí, elegimos el contrario. Si son distintos, pasamos".

Veamos qué pasa con esta estrategia. Para eso, los invito a que analicemos la tabla que figura en (*).

A	B	C	
1) blanco	blanco	blanco	
2) blanco	blanco	negro	
3) blanco	negro	blanco	
4) blanco	negro	negro	(*)
5) negro	blanco	blanco	
6) negro	blanco	negro	
7) negro	negro	blanco	
8) negro	negro	negro	

Veamos en cuáles de las ocho posibilidades la respuesta garantiza la libertad (es decir, una correcta por lo menos y *ninguna incorrecta)*. En el caso (1), A, al ver dos sombreros de igual color (blanco en este caso), dice negro. Y pierden. Este caso es *perdedor.* En el caso (2), A, al ver colores distintos, pasa. B, al ver distintos, pasa también. Pero C, como ve que A y B tienen sombreros blancos, dice *negro y ganan.* Este caso es *ganador.* En el caso (3), A, al ver colores distintos, pasa. B ve dos colores iguales (blancos para A y C), entonces elige el contrario y *gana.* Este caso es *ganador.* En el caso (4), A, al ver sombreros de igual color (negro y negro), elige el contrario y *gana también.* Este caso es *ganador.*

Ahora, creo que puedo ir más rápido: en el caso (5), A *gana* porque dice negro y los otros dos *pasan.* Este caso es *ganador.* El caso (6), A *pasa,* pero B dice blanco (al ver que A y C tienen negro. Y este caso es *ganador también.*

En el caso (7), A *pasa,* B *pasa también* y C dice blanco y *gana,* ya que tanto A como B tienen el mismo color. Este caso es *ganador.* Por último, el caso (8): A *pierde,* porque ve que B y C tienen el mismo color de sombrero (negro) y él elige el contrario, blanco, *y pierde.* Este caso es *perdedor.*

Si uno mira la cuenta, de los ocho casos posibles, la estrategia permite *acertar en seis casos.* Luego, la probabilidad de éxito es de 3/4, o sea, de un 75%, que, claramente, mejora la estrategia inicial.

18. Solución al problema del mensaje interplanetario

K	Representa	+ (suma)
L	“	= (igualdad)
M	“	- (resta)
N	“	0 (cero)
P	“	x (producto)
Q	“	÷ (división)
R	“	elevar a… (potencia)
S	“	100 (cien)
T	“	1.000 (mil)
U	“	0,1 (un décimo)
V	“	0,01 (un centésimo)
W	Representa	, (coma o decimal)
Y	“	aproximadamente igual
Z	“	π
A	“	número 1
B	“	número 2
C	“	número 3
D	“	número 4
E	“	número 5
F	“	número 6
G	“	número 7
H	“	número 8
I	“	número 9
J	“	número 10

MENSAJE: $(4/3)\ \pi\ (0{,}0092)^3$

En este caso, el mensaje está escrito en un código que sólo asume del ser que lo va a leer que es lo suficientemente “inteligente” como para entender la lógica subyacente. Es decir: no hace falta que quien lo lea sepa ninguna letra, ningún número, ni ningún símbolo. Fueron usados para escribir el mensaje por comodidad de quien lo hizo, pero podría haber utilizado cualquier otra simbología.

Una vez aclarado esto, el mensaje dice:

$$(4/3)\ \pi\ (0{,}0092)\ 3$$

Aquí lo que hay que agregar es que el volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$, donde r es el radio de la esfera. Y la validez de esta fórmula es independiente de quien sea el que lo lea. Además se usa la constante π, o pi, cuyo valor tampoco depende de la escritura, sino que es una constante que resulta del cociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro.

Ahora bien: ¿qué es 0,0092?

El objetivo del mensaje es advertirle a quien lo lea que fue enviado desde la Tierra. ¿Cómo decírselo? La Tierra tiene un diámetro de aproximadamente 12.750 kilómetros. Pero ni bien apareciera este número (sea en millas o su equivalente en kilómetros) se plantea un problema, porque quien lo lee no tiene la convención incorporada de lo que es una milla o un kilómetro o lo que fuere. Había que decirle algo que no utilizara ninguna medida. ¿Cómo hacer?

Entonces, piensen que si alguien quiere comentarle a otro ser el diámetro de la Tierra o el del Sol, necesita utilizar alguna unidad de medida. En cambio, si sólo le importa hablarle de la relación que hay entre ambos, basta con decirle cuál es el cociente entre ambos. Y *este número sí que es constante,* independientemente de la unidad que se use para medirlo.

Justamente, eso es lo que hace el mensaje: Tomar el diámetro de la Tierra y dividirlo por el diámetro del Sol (1.392.000 kilómetros) (todos los datos son aproximados, obviamente). Ese cociente es aproximadamente 0,0092, que es el número que aparece en el mensaje (en realidad, el cociente es 0,00911034…).

Por otro lado, si uno hace el cociente de los diámetros de todos los otros planetas con el diámetro del Sol, *el único número que da parecido a ése* es el de la Tierra. De esa forma, el mensaje es claro: ¡Le está diciendo que lo mandamos desde aquí!

19. Solución al problema del número que falta (en los tests de inteligencia)

El número que falta es el 215. Miren los números que hay en la primera fila en la primera y tercera columna: 54 y 36. La suma de los dos exteriores (5 + 6) = 11. La suma de los dos interiores (4 + 3) = 7.

De esa forma, se obtuvo el número 117: juntando la suma de los dos exteriores con la de los dos interiores.

Pasemos a la siguiente fila y hagamos el mismo ejercicio. Los dos números de la primera y tercera columna son: 72 y 28. Sumando los dos exteriores (7 + 8) = 15 y sumando los dos interiores (2 + 2) = 4. Luego, el número que va en el centro es 154.

Si uno sigue en la tercera fila, tiene 39 y 42. La suma de los dos exteriores (3 + 2) = 5 y los dos internos (9 + 4) = 13. Por lo tanto, el número que va en el centro es 513.

Por último, con este patrón, dados los números 18 y 71, los dos exteriores suman (1 + 1) = 2. Y los dos centrales (8 + 7) = 15. Corolario: el número que falta es 215.

Apéndice

Columnas binarias*

1	33	65	97	129	161	193	225
3	35	67	99	131	163	195	227
5	37	69	101	133	165	197	229
7	39	71	103	135	167	199	231
9	41	73	105	137	169	201	233
11	43	75	107	139	171	203	235
13	45	77	109	141	173	205	237
15	47	79	111	143	175	207	239
17	49	81	113	145	177	209	241
19	51	83	115	147	179	211	243
21	53	85	117	149	181	213	245
23	55	87	119	151	183	215	247
25	57	89	121	153	185	217	249
27	59	91	123	155	187	219	251
29	61	93	125	157	189	221	253
31	63	95	127	159	191	223	255

* Las columnas continúan en las páginas siguientes.

2	34	66	98	130	162	194	226
3	35	67	99	131	163	195	227
6	38	70	102	134	166	198	230
7	39	71	103	135	167	199	231
10	42	74	106	138	170	202	234
11	43	75	107	139	171	203	235
14	46	78	110	142	174	206	238
15	47	79	111	143	175	207	239
18	50	82	114	146	178	210	242
19	51	83	115	147	179	211	243
22	54	86	118	150	182	214	246
23	55	87	119	151	183	215	247
26	58	90	122	154	186	218	250
27	59	91	123	155	187	219	251
30	62	94	126	158	190	222	254
31	63	95	127	159	191	223	255

4	36	68	100	132	164	196	228
5	37	69	101	133	165	197	229
6	38	70	102	134	166	198	230
7	39	71	103	135	167	199	231
12	44	76	108	140	172	204	236
13	45	77	109	141	173	205	237
14	46	78	110	142	174	206	238
15	47	79	111	143	175	207	239
20	52	84	116	148	180	212	244
21	53	85	117	149	181	213	245
22	54	86	118	150	182	214	246
23	55	87	119	151	183	215	247
28	60	92	124	156	188	220	252
29	61	93	125	157	189	221	253
30	62	94	126	158	190	222	254
31	63	95	127	159	191	223	255

8	40	72	104	136	168	200	228
9	41	73	105	137	169	201	233
10	42	74	106	138	170	202	234
11	43	75	107	139	171	203	235
12	44	76	108	140	172	204	236
13	45	77	109	141	173	205	237
14	46	78	110	142	174	206	238
15	47	79	111	143	175	207	239
24	56	88	120	152	184	216	248
25	57	89	121	153	185	217	249
26	58	90	122	154	186	218	250
27	59	91	123	155	187	219	251
28	60	92	124	156	188	220	252
29	61	93	125	157	189	221	253
30	62	94	126	158	190	222	254
31	63	95	127	159	191	223	255

16	48	80	112	144	176	208	240
17	49	81	113	145	177	209	241
18	50	82	114	146	178	210	242
19	51	83	115	147	179	211	243
20	52	84	116	148	180	212	244
21	53	85	117	149	181	213	245
22	54	86	118	150	182	214	246
23	55	87	119	151	183	215	247
24	56	88	120	152	184	216	248
25	57	89	121	153	185	217	249
26	58	90	122	154	186	218	250
27	59	91	123	155	187	219	251
28	60	92	124	156	188	220	252
29	61	93	125	157	189	221	253
30	62	94	126	158	190	222	254
31	63	95	127	159	191	223	255

32	48	96	112	160	176	224	240
33	49	97	113	161	177	225	241
34	50	98	114	162	178	226	242
35	51	99	115	163	179	227	243
36	52	100	116	164	180	228	244
37	53	101	117	165	181	229	245
38	54	102	118	166	182	230	246
39	55	103	119	167	183	231	247
40	56	104	120	168	184	232	248
41	57	105	121	169	185	233	249
42	58	106	122	170	186	234	250
43	59	107	123	171	187	235	251
44	60	108	124	172	188	236	252
45	61	109	125	173	189	237	253
46	62	110	126	174	190	238	254
47	63	111	127	175	191	239	255

64	80	96	112	192	208	224	240
65	81	97	113	193	209	225	241
66	82	98	114	194	210	226	242
67	83	99	115	195	211	227	243
68	84	100	116	196	212	228	244
69	85	101	117	197	213	229	245
70	86	102	118	198	214	230	246
71	87	103	119	199	215	231	247
72	88	104	120	200	216	232	248
73	89	105	121	201	217	233	249
74	90	106	122	202	218	234	250
75	91	107	123	203	219	235	251
76	92	108	124	204	220	236	252
77	93	109	125	205	221	237	253
78	94	110	126	206	222	238	254
79	95	111	127	207	223	239	255

128	144	160	176	192	208	224	240
129	145	161	177	193	209	225	241
130	146	162	178	194	210	226	242
131	147	163	179	195	211	227	243
132	148	164	180	196	212	228	244
133	149	165	181	197	213	229	245
134	150	166	182	198	214	230	246
135	151	167	183	199	215	231	247
136	152	168	184	200	216	232	248
137	153	169	185	201	217	233	249
138	154	170	186	202	218	234	250
139	155	171	187	203	219	235	251
140	156	172	188	204	220	236	252
141	157	173	189	205	221	237	253
142	158	174	190	206	222	238	254
143	159	175	191	207	223	239	255

Colección "Ciencia que ladra…"

Otros títulos publicados

siglo veintiuno editores

La Matemática
como una de las Bellas Artes
de Pablo Amster

Demoliendo *papers*
La trastienda de las publicaciones científicas
compilado por Diego Golombek

siglo veintiuno editores

siglo veintiuno editores

MATEMÁTICA... ¿ESTÁS AHÍ?
Episodio 2

por

ADRIÁN PAENZA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Colección "Ciencia que ladra..."
Dirigida por DIEGO GOLOMBEK

Universidad Nacional de Quilmes

siglo veintiuno editores

Siglo veintiuno editores Argentina s.a.
TUCUMÁN 1621 7° N (C1050AAG), BUENOS AIRES, REPÚBLICA ARGENTINA

Siglo veintiuno editores, s.a. de c.v.
CERRO DEL AGUA 248, DELEGACIÓN COYOACÁN, 04310, MÉXICO, D. F.

Siglo veintiuno de España editores, s.a.
C/MENÉNDEZ PIDAL, 3 BIS (28036) MADRID

Paenza, Adrián
Matemática... ¿estás ahí? : sobre números, personajes, problemas y curiosidades : episodio 2 - 1a ed. - Buenos Aires : Siglo XXI Editores Argentina, 2006.
240 p. : il. ; 19x14 cm. (Ciencia que ladra... dirigida por Diego Golombek)

ISBN 987-1220-64-2

1. Matemática-Enseñanza. I. Título
CDD 510.7

Portada de Claudio Puglia y Mariana Nemitz

ISBN-10: 987-1220-64-2
ISBN-13: 978-987-1220-64-9

Impreso en Artes Gráficas Delsur
Almirante Solier 2450, Buenos Aires,
en el mes de noviembre de 2006

Hecho el depósito que marca la ley 11.723
Impreso en Argentina – Made in Argentina

ESTE LIBRO
(y esta colección)

Existe un país en el que un gato se va y nos deja su sonrisa de recuerdo, y en donde hay reinas de corazones que ordenan cortar cabezas sin parar y porque sí. Es el país en que los números juegan a las escondidas, y los ángulos internos de los triángulos suman… bueno, lo que tengan que sumar dependiendo de la geometría que estemos considerando. Desde hace un tiempo –y gracias al primer libro de esta miniserie– no necesitamos pasaporte para entrar a ese país y, como en el caso de la tierra de las maravillas, aquí también nos guía un matemático.

En el camino, un milagro inesperado: un libro de divulgación científica se convierte en un éxito editorial sin precedentes… ¿Cómo explicarlo? ¿Será que de pronto al mundo comenzaron a interesarle estos temas? ¿Será porque el autor es un conocido profesor y periodista? ¿O será, simplemente, que es un buen libro? Por todo eso, Adrián Paenza nos ha acostumbrado con su primer *Matemática… ¿Estás ahí?* a discutir enigmas, a hacernos preguntas, a sorprender a otros lectores en el colectivo haciendo cuentas, uniendo puntos o sumergiéndose en los infinitos infinitos.

Para tranquilidad de los fanáticos del primer libro, todavía quedan muchas historias por contar, muchos números, personajes, problemas y curiosidades para sorprendernos, y también paradojas como para pasarse una tarde dando vueltas a las ideas (y aquí es imprescindible recordar una maravillosa paradoja de almacén: "Hoy no se fía, mañana sí"...). El resultado es que la matemática sigue ahí, en un encuentro cercano en el que nuevamente nos guía Adrián Paenza (aunque, como bien dice el autor, si nos perdemos no es nada grave: la cuestión es ir encontrando el camino solos). Un guía de lujo que nos invita a superarnos, a jugar, a pensar y a deleitarnos con un conocimiento que, en el fondo, es de todos. Sigamos viajando, entonces. ¡La matemática ataca de nuevo!

Esta colección de divulgación científica está escrita por científicos que creen que ya es hora de asomar la cabeza por fuera del laboratorio y contar las maravillas, grandezas y miserias de la profesión. Porque de eso se trata: de contar, de compartir un saber que, si sigue encerrado, puede volverse inútil.

Ciencia que ladra... no muerde, sólo da señales de que cabalga.

DIEGO GOLOMBEK

Este libro es para mis padres, Ernesto y Fruma.
Una vez más. Todo lo que haga en la vida estará siempre dedicado a ellos primero.
A mi hermana Laura y a todos mis sobrinos.
A mis amigos Miguel Davidson, Leonardo Peskin, Miguel Ángel Fernández, Cristian Czubara, Eric Perle, Lawrence Kreiter, Kevin Bryson, Víctor Marchesini, Luis Bonini, Carlos Aimar, Marcelo Araujo, Antonio Laregina, Marcos Salt, Diego Goldberg, Julio Bruetman, Claudio Pustelnik y Héctor Maguregui.
A mis amigas Ana María Dalessio, Nilda Rozenfeld, Teresa Reinés, Alicia Dickenstein, Beatriz de Nava, Beatriz Suárez, Nora Bernárdes, Karina Marchesini, Laura Bracalenti, Etel Novacovsky, Marisa Giménez, Mónica Muller, Erica Kreiter, Susy Goldberg, Holly Perle y Carmen Sessa.
A Carlos Griguol, mi amigo del alma.
A la memoria de los seres queridos que perdí en el camino: Guido Peskin, mis tías Delia, Elena, Miriam y Elenita, mi primo Ricardo y a la de mis entrañables compañeros de vida, León Najnudel y Manny Kreiter.

Acerca del autor

Adrián Paenza cql@sigloxxieditores.com.ar

Nació en Buenos Aires en 1949. Es doctor en Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires, en la que se desempeña actualmente como profesor asociado del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Es, además, periodista. En la actualidad conduce el ciclo *Científicos Industria Argentina*. Trabajó en las radios más importantes del país y en los cinco canales de aire de la Argentina. Fue redactor especial de varias revistas y colaborador en tres diarios nacionales: *Clarín*, *Página/12* y *La Nación*. Publicó en esta misma colección *Matemática… ¿Estás ahí?*, que ya lleva más de diez ediciones.

Agradecimientos

A Diego Golombek, director de la colección Ciencia que ladra. Porque es mi amigo y por la pasión que pone en cada intercambio que tenemos. Nadie que yo conozca tiene más entusiasmo que él, que hace en un día lo que a todo el mundo le lleva *un mes*.

A Carlos Díaz, el director de Siglo XXI Editores, por la increíble generosidad que exhibió siempre conmigo y por su incansable e insaciable curiosidad.

A Claudio Martínez, quien fue el primero en creer que estas historias debían ser divulgadas y comprometió su esfuerzo y talento en crear un programa televisivo como *Científicos Industria Argentina* para que yo pudiera hacerlo. Este libro es también para todos mis compañeros del programa.

A Ernesto Tenembaum, Marcelo Zlotogwiazda y Guillermo Alfieri por el estímulo constante y el respeto con el que me tratan.

A quienes revisaron el libro, lo criticaron, lo discutieron y me ayudaron a mejorarlo, y en particular, mi infinita gratitud a dos personas: Carlos D'Andrea y Gerardo Garbulsky.

A "todos" los comunicadores, a los periodistas de radio, televisión, diarios y revistas, quienes tomaron el primer libro como propio, lo defendieron, lo promovieron y fueron felices en cada una de sus audiciones hablando de él. Todos descubrimos algo con el "primer episodio" de *Matemática… ¿Estás ahí?*, pero ellos fueron, sin ninguna duda, los que impulsaron a la gente a que lo compre o lo baje por Internet. En todo caso, eso nos mostró a todos el "poder" del periodismo, el "poder" de los

medios de comunicación. Ellos transformaron un libro de matemática (nada menos) en un best seller y generaron una campaña gigantesca, impredecible e impagable, que rompió con todos los moldes y tiró abajo cualquier precedente: construyeron un éxito que entiendo es de ellos. A todos mis colegas, ¡gracias!

A la comunidad matemática, que también entendió esto como una cruzada, y me apabulló con ideas, sugerencias, artículos, notas… y de esa forma me iluminó el camino. Nada de lo que estuvo escrito en el primer libro ni en lo que aparecerá en éste (salvo mis opiniones personales) es una novedad para ellos: nada. Sin embargo, la monumental cantidad de correos electrónicos, papeles, cartas y conversaciones personales con los que me ayudaron para la selección del material y la forma de presentarlo escapa a mi posibilidad de agradecerles.

A Ernesto Tiffenberg, el director de *Página/12*, quien con osadía me invitó a que escribiera la "contratapa" del diario una vez por semana "sobre lo que vos quieras". Muchas de las páginas de este libro, aparecieron "antes" en mi querido diario.

A Pablo Coll, Pablo Milrud, Juan Sabia, Teresita Krick, Pablo Mislej, Ricardo Durán, Ariel Arbiser, Oscar Bruno, Fernando Cukierman, Jorge Fiora, Roberto Miatello, Eduardo Cattani, Rodrigo Laje, Matías Graña, Leandro Caniglia, Marcos Dajczer, Ricardo Fraimann, Lucas Monzón, Gustavo Stolovitzky, Pablo Amster, Gabriela Jerónimo y Eduardo Dubuc: todos matemáticos (menos Gustavo y Rodrigo), todos imprescindibles para que este libro exista.

A todos mis alumnos, presentes y pasados, por lo que me enseñaron a lo largo del camino.

A Santiago Segurola, Alejandro Fabbri, Nelson Castro y Fernando Pacini.

A todos quienes trabajan en Siglo XXI Editores, en particular a Violeta Collado y Héctor Benedetti, por el cuidado extremo que ponen para *protegerme de mis propios errores*.

Y por último, a las mismas cuatro personas a quienes les dediqué el libro anterior por su conducta ética irreprochable: *Marcelo Bielsa, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky*. Ellos demuestran diariamente, que ¡se puede!

Los agujeros negros son los lugares del universo
en donde Dios dividió por cero.
STEVEN WRIGHT

Índice

Prólogo

La inequitativa distribución de la riqueza marca una desigualdad ciertamente criminal. Unos (pocos) tienen (tenemos) mucho; otros (muchos) tienen poco. Muchos más tienen casi nada. La sociedad ha sido, hasta aquí, más bien indiferente a las desigualdades de todo tipo. Se las describe, sí, pero en general el dolor termina en hacer una suerte de catarsis que parece "exculpadora". Bueno, no es así. O no debería serlo. Hasta aquí, ninguna novedad.

La riqueza no sólo se mide en dinero o en poder adquisitivo, también se mide en conocimiento, o mejor dicho, debería empezar por ahí. El acceso a la riqueza intelectual es un derecho humano, sólo que casi siempre está supeditado al fárrago de lo urgente (nadie puede pretender acceder al conocimiento si antes no tiene salud, ni trabajo, ni techo, ni comida en su plato). Así, todos tenemos un compromiso moral: pelear para que la educación sea pública, gratuita y obligatoria en los niveles primario y secundario. Los niños y jóvenes tienen que ir a estudiar, y no a trabajar.

Con la matemática sucede algo parecido. Es una herramienta poderosa que enseña a pensar. Cuando está bien *contada* es seductora, atractiva, dinámica. Ayuda a tomar decisiones educadas o, al menos, más educadas. Presenta facetas fascinantes que aparecen escondidas y reducidas a un grupo muy pequeño que las disfruta. Y es hora de hacer algo, de pelear contra el preconcepto de que la matemática es aburrida, o de que es sólo para elegidos.

Por eso escribí *Matemática… ¿Estás ahí?* Porque quiero que le demos una segunda chance. Porque quiero que la sociedad advierta que le estamos escamoteando algo y que no hay derecho a que eso suceda. Hasta aquí, quienes *comunicamos* la matemática hemos fracasado, no sólo en la Argentina sino en casi todo el mundo.

Ha llegado la hora de modificar el mensaje. Obviamente, no soy el primero ni seré el último, pero quisiera ayudar a abrir el juego, como lo hice durante más de cuarenta años con alumnos de todas las edades. La matemática presenta problemas y enseña a disfrutar de cómo resolverlos, así como también enseña a disfrutar de *no poder resolverlos, pero de haberlos "pensado"*, porque entrena para el futuro, para tener más y mejores herramientas, porque ayuda a recorrer caminos impensados y a hacernos inexorablemente mejores.

Necesitamos, entonces, brindar a todos *esa* oportunidad. Créanme que se la merecen.

Enseñar a pensar

El mundo académico se nutre de la circulación libre de información. Cada uno aporta (literalmente) un granito de arena, y así se hace cada ladrillo. A veces viene un Newton, un Einstein, un Bohr, un Mendel, y trae él solo treinta ladrillos, pero en general es así: granito a granito.
ANÓNIMO

Miguel Herrera fue un gran matemático argentino, director de muchas tesis doctorales, en la Argentina y también en el exterior. Lamentablemente, falleció muy joven. Herrera se graduó en Buenos Aires y vivió muchos años en Francia y los Estados Unidos, para luego retornar al país, donde permaneció hasta su muerte. Quiero aprovechar para contar una anécdota que viví con él y que me sirvió para toda la vida.

Luego de graduarme como licenciado (a fines de 1969), estuve por unos años fuera de la facultad trabajando exclusivamente como periodista. Una noche, en Alemania, más precisamente en Sindelfingen, donde estaba concentrado el seleccionado argentino de fútbol, comenté con algunos amigos que al regresar al país intentaría volver a la facultad para saldar una deuda que tenía (conmigo): quería doctorarme. Quería volver a estudiar para completar una tarea que, sin la tesis, quedaría inconclusa. Era un gran desafío, pero valía la pena intentarlo.

Dejé por un tiempo mi carrera como periodista y me dediqué de lleno a la investigación y a la docencia en matemática. Luego de un concurso, obtuve un cargo como ayudante de primera con dedicación exclusiva, y elegí como tutor de tesis doctoral a Ángel Larotonda, quien había sido mi director de tesis de licenciatura. “Pucho” (así le decíamos a Larotonda) tenía muchísimos alumnos que buscaban doctorarse. Entre tantos, recuerdo los nombres de Miguel Ángel López, Ricardo Noriega, Patricia Fauring, Flora Gutiérrez, Néstor Búcari, Eduardo Antín, Gustavo Corach y Bibiana Russo.

Doctorarse no era fácil. Requería (y requiere) no sólo aprobar un grupo de materias sino, además, escribir un trabajo *original* y someterlo al referato de un grupo de matemáticos para su evaluación. La tarea del tutor es esencial en ese proyecto, no sólo por la guía que representa, sino porque lo habitual es que sea él (o ella) quien sugiera al aspirante el problema a investigar y, eventualmente, resolver.

La situación que se generó con Pucho es que éramos *muchos*, y era muy difícil que tuviera *tantos problemas para resolver*, y que pudiera compartirlos con tantos aspirantes. Recuerdo ahora que *cada uno* necesitaba *un problema para sí*. Es decir que cada uno debía trabajar con *su* problema. La especialidad era Topología Diferencial. Cursábamos materias juntos, estudiábamos juntos, pero los problemas *no aparecían*.

Algo nos motivó a tres de los estudiantes (Búcari, Antín y yo) a querer cambiar de tutor. No se trataba de ofender a Larotonda, sino de buscar un camino *por otro lado*. Noriega ya había optado por trabajar con el increíble Luis Santaló y nosotros, empujados y estimulados por lo que había hecho Ricardo, decidimos cambiar también. Pero ¿a quién recurrir? ¿Quién tendría problemas para compartir? ¿Y en qué áreas? Porque, más allá de que alguien quiera y posea problemas para sus estudiantes, también importa el tema: no todos son igualmente atractivos, y cada uno tenía sus inclinaciones particulares, sus propios gustos. Sin embargo, estábamos dispuestos a *empezar* de cero, si lográbamos que alguien nos sedujera.

Así fue como apareció en nuestras vidas Miguel Herrera, quien recién había vuelto al país después de pasar algunos años como investigador en Francia. Reconocido internacionalmente por su trabajo en Análisis Complejo, sus contribuciones habían sido altamente festejadas en su área. Miguel había formado parte del grupo de matemáticos argentinos que emigraron luego del golpe militar que encabezó Juan Carlos Onganía en 1966, y se fue inmediatamente después de la noche infame de "los bastones largos". Sin embargo, volvió al país en otro momento terrible, porque coincidía con otro golpe militar, esta vez el más feroz de nuestra historia, que sometió a la Argentina al peor holocausto del que se tenga memoria.

Pero vuelvo a Herrera: su retorno era una oportunidad para nosotros. Recién había llegado y todavía no tenía alumnos. Lo fuimos a ver a su flamante oficina y le explicamos nuestra situación. Miguel nos escuchó con atención y, típico en él, dijo: "¿Y por qué no se van al exterior? ¿Por qué se quieren quedar acá con todo lo que está pasando? Yo puedo recomendarlos a distintas universidades, tanto en Francia como en los Estados Unidos. Creo que les conviene irse".

Me parece que fui yo el que le dijo: "Miguel, nosotros estamos acá y no nos vamos a ir del país en este momento. Queremos preguntarte si tenés problemas que quieras compartir con nosotros, para poder doctorarnos en el futuro. Sabemos muy poco del tema en el que sos especialista, pero estamos dispuestos a estudiar. Y en cuanto a tu asesoramiento y tutoría, hacé de cuenta que somos tres alumnos franceses, que llegamos a tu oficina en la Universidad de París y te ofrecemos que seas nuestro director de tesis. ¿Qué nos vas a contestar? ¿Váyanse de París?".

Herrera era el profesor titular de Análisis Complejo. Al poco tiempo, Antín, en su afán de convertirse en crítico de cine y árbitro de fútbol (entre otras cosas), decidió bajarse del proyecto, pero Néstor Búcari (a partir de aquí "Quiquín", su sobrenombre) y yo fuimos nombrados asistentes de Herrera y jefes de trabajos prácticos en la materia que dictaba. *Si uno quiere aprender algo, tiene que comprometerse a enseñarlo*... Ése fue nuestro primer contacto con nuestro director de tesis. Empezamos por el principio. La mejor manera de recordar lo que habíamos hecho cuando tuvimos que cursar Análisis Complejo (y aprobarla, claro) era tener que enseñarla. Y así lo hicimos.

Pero Quiquín y yo queríamos saber cuál sería el trabajo de la tesis, el problema que deberíamos resolver, Herrera, paciente, nos decía que no estábamos aún en condiciones de *entender el enunciado*, y ni hablar de tratar de resolverlo. Pero nosotros, que veníamos de la experiencia con Pucho, y nunca lográbamos que nos diera el problema, *queríamos saber*.

Un día, mientras tomábamos un café, Herrera abrió un libro escrito por él, nos mostró una fórmula y nos dijo: "Éste es el primer problema para resolver. Hay que generalizar esta fórmula. Ése es el primer trabajo de tesis para alguno de ustedes dos".

Eso sirvió para callarnos por un buen tiempo. En realidad, nos tuvo callados por *mucho tiempo*. Es que salimos de la oficina donde habíamos compartido el café y nos miramos con Quiquín, porque no entendíamos nada. Después de haber esperado tanto, de haber cambiado de director, de cambiar de tema, de especialidad, de todo, teníamos el problema, sí... pero no entendíamos ni siquiera el enunciado. No sabíamos ni entendíamos lo que teníamos que hacer.

Ésa fue una lección. El objetivo entonces fue hacer lo posible, estudiar todo lo posible para *entender el problema*. Claro, Herrera no nos dejaría solos. No sólo éramos sus asistentes en la materia para la licenciatura que dictaba sino que, además, nos proveía de material constantemente. Nos traía *papers* escritos por él o por otros especialistas en el tema, y trataba de que empezáramos a acostumbrarnos a la terminología, al lenguaje, al tipo de soluciones que ya había para otros problemas similares. En definitiva, empezamos a meternos en el submundo del Análisis Complejo. Por un lado, dábamos clases y aprendíamos casi a la par de los alumnos. Resolvíamos las prácticas y leíamos tanto como podíamos sobre el tema. Además avanzábamos por otro lado, e íbamos acumulando información al paso que él nos indicaba.

Quiquín fue un compañero fabuloso. Dotado de un talento natural, veía todo mucho antes que yo, y fue una guía imposible de reemplazar. Yo, menos preparado, con menos facilidad, necesitaba de la constancia y la regularidad. Y ése era y fue mi aporte a nuestro trabajo en conjunto: él ponía el talento y la creatividad; yo, la constancia y la disciplina. Todos los días, nos encontrábamos a las ocho de la mañana. No había días de frío, ni de lluvia, ni de calor, ni de resaca de la noche anterior: ¡teníamos que estar a las ocho de la mañana sentados en nuestra oficina, listos para trabajar! Para mí, que tenía auto, era mucho más fácil. Quiquín venía de más lejos y tomaba uno y, a veces, dos colectivos.

Lo que siempre nos motivaba y nos impulsaba era que a las ocho, cuando recién nos habíamos acomodado, *alguien* golpeaba sistemáticamente a la puerta. Miguel venía todos los días a la facultad a ver qué habíamos hecho el día anterior: qué dificultades habíamos encontrado, qué necesitábamos. Así construimos una relación cotidiana que nos sirvió para enfrentar muchas situaciones complicadas y momentos de dificultad en los que *no entendíamos*, no nos salía nada y no podíamos avanzar. Encontrarnos todos los días, siempre, sin excepciones, nos permitió construir una red entre los tres que nos sirvió de apoyo en todos esos momentos de frustración y fastidio.

El problema *estaba ahí*. Ya no había que preguntarle más nada a Herrera. Era nuestra responsabilidad estudiar, leer, investigar, preocuparnos para *tratar de entender*. Con Quiquín siempre confiamos en Miguel, y él se ganó nuestro reconocimiento *no* por la prepotencia de su prestigio, sino por la prepotencia de su trabajo y su constancia. Miguel estuvo ahí todos los días.

Una mañana, de las centenares que pasamos juntos, mientras tomábamos un café, nos miramos con Quiquín y recuerdo que nos quedamos callados por un instante. Uno de los dos dijo algo que nos hizo pensar en lo mismo: ¡acabábamos de entender el enunciado! Por primera vez, y a más de un año de habérselo escuchado a Miguel, comprendíamos lo que teníamos que hacer. De ahí en adelante, algo cambió en nuestras vidas: ¡habíamos entendido! Lo destaco especialmente porque fue un día muy feliz para los dos.

Un par de meses más tarde, un día cualquiera, súbitamente creímos haber encontrado la solución a un problema que los matemáticos no podían resolver hacía ya siglos. ¡No era posible! Teníamos que estar haciendo algo mal, porque era muy poco probable que hubiéramos resuelto una situación que los expertos de todo el mundo investigaban desde tanto tiempo atrás. Era más fácil creer (y lo bien que hicimos) que estábamos haciendo algo mal o entendíamos algo en forma equivocada, antes que pensar que pasaríamos a la *inmortalidad* en el mundo de la matemática. ¡Pero no podíamos darnos cuenta del error!

Nos despedimos esa noche, casi sin poder aguantar hasta el día siguiente, cuando llegara Miguel. Lo necesitábamos para que nos explicara *dónde* estaba nuestro error. Por la mañana, Miguel golpeó a la puerta como siempre, y nos atropellamos para abrirle. Le explicamos lo que pasaba y le pedimos que nos dijera dónde nos estábamos equivocando. Entrecerró los ojos y sonriente dijo: "Muchachos, seguro que está mal". No fue una novedad; nosotros sabíamos que tenía que estar mal. Y comenzó a explicarnos, pero nosotros le refutábamos todo lo que decía. Escribía en el pizarrón con las tizas amarillas con las que siempre nos ensuciábamos las manos, pero no había forma. Peor aún: Miguel empezó a quedarse callado, a pensar. Y se sentó en el sofá de una plaza que había en la oficina. Tomó su libro, el libro que *él* había escrito, leyó una y otra vez lo que *él había inventado* y nos dijo, lo que para mí sería una de las frases más iluminadoras de mi vida: "*No entiendo*". Y se hizo un silencio muy particular.

¿Cómo? ¿Miguel no entendía? ¡Pero si lo había escrito él! ¿Cómo era posible que no fuera capaz de entender lo que *él mismo había pensado*?

Esa fue una lección que no olvidé nunca. Miguel hizo gala de una *seguridad* muy particular y muy profunda: podía dudar, aun de sí mismo. Ninguno de nosotros iba a *dudar* de su capacidad. Ninguno iba a pensar que *otro había escrito* lo que estaba en su libro. No. Miguel se mostraba como cualquiera de nosotros… *falible*. Y ésa fue la lección. ¿Qué problema hay en *no entender*? ¿Se había transformado acaso en una peor persona o en un burro porque no entendía? No, y eso que se daba el lujo de decir frente a sus dos alumnos y doctorandos que no entendía lo que *él mismo* había escrito.

Por supuesto, no hace falta decir que después de llevárselo a su oficina, y de dedicarle un par de días, Miguel encontró el error. Ni Quiquín ni yo pasamos a la fama, y él nos explicó en dónde estábamos equivocados.

Con el tiempo nos doctoramos, pero eso, en este caso, es lo que menos importa.

Miguel nos había dado una lección de vida, y ni siquiera lo supo ni se lo propuso. Así son los grandes.

Los números de la matemática

Un matemático, como un pintor o un poeta, es un hacedor de patrones. Si sus patrones son más permanentes que los de ellos, es porque están hechos con ideas. Un pintor crea patrones con sus formas y colores, un poeta, con palabras… Un matemático, por otro lado (a diferencia del poeta), no tiene material para trabajar salvo con sus ideas, y sus patrones suelen durar mucho más, ya que las ideas se gastan menos que las palabras.

G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology* (1940)

Algunas curiosidades matemáticas y cómo explicarlas (cuando se puede)

Si uno multiplica 111.111.111 por sí mismo, es decir, si lo eleva al cuadrado, se obtiene el número:

12.345.678.987.654.321

En realidad, es esperable que esto pase porque si uno piensa cómo hace para multiplicar dos números (y lo invito a que lo haga), advierte que multiplica cada dígito del segundo por *todos los dígitos* del primero, y los corre hacia la izquierda a medida que avanza.

Como los dígitos del segundo son todos números *1*, lo que hace es *repetir el primer número una y otra vez*, aunque corriéndolo a la izquierda en cada oportunidad. Por eso, al sumarlos, encolumnados de esa forma, se obtiene el resultado de más arriba:

12.345.678.987.654.321

Lo que sigue *sí* es una curiosidad, y aunque no tengo una explicación para dar, resulta simpático.

Tome el número

1.741.725

Eleve cada dígito a la séptima potencia y sume los resultados. Es decir:

$$1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7$$

¿Cuánto le dio?

Bueno, si tuvo paciencia (o una calculadora) para hacer la cuenta, el resultado es: 1.741.725.

Ahora, tome un número de *tres dígitos cualquiera*. Digamos el:

472

Construya el número que resulte de escribirlo *dos veces seguidas*. En este caso:

472.472

Divida ahora por 7. Con lo que se obtiene:

67.496

Divida ese resultado por 11. Se tiene entonces:

6.136

y a éste divídalo por 13.

El resultado final es…

¡472!

Es decir, el número original, con el que empezó.

¿Por qué pasó esto? ¿Pasará lo mismo con cualquier número que uno elija?

Antes de dar las respuestas, observe que en el camino dividimos el número por 7, y dio un resultado exacto. Después lo dividimos por 11, y volvió a dar un número entero, y finalmente, encontramos un número que resultó ser un múltiplo de 13.

Más allá de correr a leer por qué pasa esto *siempre* con cualquier número de tres dígitos que uno elija, le sugiero que piense un poco la solución. Es mucho más gratificante pensar uno solo, aunque no se llegue al resultado, que buscar cómo lo resolví yo. Si no, ¿qué gracia tiene?

SOLUCIÓN:

Lo primero que uno tiene es un número de tres dígitos; llamémoslo:

$$abc$$

Luego, había que repetirlo:

$$abcabc$$

El trámite que siguió fue dividir ese número, primero por 7, luego por 11 y finalmente por 13. ¡Y en todos los casos obtuvo un resultado exacto, sin que sobrara nada!

Eso significa que el número *abcabc* tiene que ser *múltiplo* de 7, 11 y 13. Es decir que tiene que ser múltiplo del *producto* de esos tres números.[1] Y justamente, el producto de esos números es:

$$7 \,.\, 11 \,.\, 13 = 1.001$$

¿Por qué pasa, entonces, que el número en cuestión es múltiplo de 1.001?

Si uno *multiplica* el número *abc* por 1.001, ¿qué obtiene? (Realice la cuenta y después continúe leyendo.)

$$abc \,.\, (1.001) = abcabc$$

Acaba de descubrir por qué pasó lo que pasó. Si a cualquier número de tres dígitos (*abc*) se le agrega delante el mismo número, el resultado (*abcabc*) es un múltiplo de 1.001. Y cuando se divide el número *abcabc* por 1.001, el resultado que se obtiene es *abc*.[2]

[1] Porque si un número es múltiplo de 3 y de 5, por ejemplo, tiene que ser múltiplo de 15, que es el producto entre 3 y 5. Esto sucede –y le sugiero que lo piense solo también– porque todos los números aquí involucrados son *primos*. Por ejemplo, el número 12 es múltiplo de 4 y de 6, pero *no* es múltiplo de 24 (producto de 4 y de 6). En el caso en que los números en cuestión sean *primos,* entonces *sí* el resultado será cierto.

[2] Debemos advertir que si uno multiplica un número de tres dígitos por 1.001, obtendrá el mismo número repetido dos veces consecutivas.

No deja de ser una curiosidad, aunque tiene un argumento que lo sustenta. Y un poco de matemática también.

¿Cómo *multiplicar* si uno no sabe las tablas?

Lo que sigue va en ayuda de aquellos chicos que se resisten a aprender de memoria las tablas de multiplicar. Me apuro a decir que los comprendo perfectamente porque, en principio, cuando a uno le enseñan a repetirlas, no le queda más remedio que subordinarse a la "autoridad" del/la maestro/a, pero a esa altura no está claro (para el niño) por qué tiene que hacerlo. Lo que sigue es, entonces, una forma "alternativa" de multiplicar, que permite obtener el producto de dos números cualesquiera sin saber las tablas. Sólo se requiere:

a) saber multiplicar por 2 (o sea, duplicar);
b) saber dividir por 2, y
c) saber sumar.

Este método no es nuevo. En todo caso, lo que podría decir es que está en desuso u olvidado, ya que era la forma en que multiplicaban los egipcios y que aún hoy se utiliza en muchas regiones de Rusia. Es conocido como la *multiplicación paisana*. En lugar de explicarlo en general, voy a ofrecer un ejemplo que será suficiente para entenderlo.

Supongamos que uno quiere multiplicar 19 por 136. Entonces, prepárese para escribir en dos columnas, una debajo del 19 y otra, debajo del 136.

En la columna que encabeza el 19, va a dividir por 2, "olvidándose" de si sobra algo o no. Para empezar, debajo del 19 hay que poner un 9, porque si bien 19 dividido 2 no es exactamente 9, uno ignora el resto, que es 1, y sigue dividiendo por 2. Es decir que debajo del 9 pone el número 4. Luego, vuelve a dividir por 2 y queda 2, y al volver a dividir por 2, queda 1. Ahí para.

Esta columna, entonces, quedó así:

19
9
4
2
1

Por otro lado, en la otra columna, la encabezada por el 136, en lugar de dividir por 2, multiplique por 2 y coloque los resultados a la par de la primera columna. Es decir:

19	136
9	272
4	544
2	1.088
1	2.176

Cuando llega al nivel del número 1 de la columna de la izquierda detenga la duplicación en la columna del 136. Convengamos en que es verdaderamente muy sencillo. Todo lo que hizo fue dividir por 2 en la columna de la izquierda y multiplicar por 2 en la de la derecha. Ahora, sume sólo los números de la columna derecha que corresponden a números impares de la izquierda. En este caso:

19	136
9	272
4	~~544~~
2	~~1.088~~
1	2.176

Al sumar sólo los compañeros de los impares, se tiene:

136 + 272 + 2.176 = 2.584

que es (¡justamente!) el producto de 19 por 136.

Un ejemplo más.

Multipliquemos ahora 375 por 1.517. Me apuro a decir que da lo mismo elegir cualquiera de los dos números para multiplicarlo o dividirlo por 2, por lo que sugiero, para hacer menor cantidad de cuentas, que tomemos el 375 como "cabeza" de la columna en la que dividiremos por 2. Se tiene entonces:

375	1.517
187	3.034
93	6.068
46	12.136
23	24.272
11	48.544
5	97.088
2	194.176
1	388.352

Ahora hay que sumar los de la segunda columna cuyos compañeros de la primera columna sean impares:

375	1.517
187	3.034
93	6.068
46	~~12.136~~
23	24.272
11	48.544
5	97.088
2	~~194.176~~
1	388.352
	568.875

Y, justamente, 568.875 es el producto que estábamos buscando.

Ahora, lo invito a que piense por qué funciona este método que no requiere que uno sepa las tablas de multiplicar (salvo la del 2, claro).

EXPLICACIÓN:

Cuando uno quiere encontrar la escritura binaria de un número, lo que debe hacer es dividir el número por 2 reiteradamente, y anotar los restos que las cuentas arrojan. Por ejemplo:

$$\begin{array}{rcrl}
173 & = & 86 . 2 + & \boxed{1} \\
86 & = & 43 . 2 + & \boxed{0} \\
43 & = & 21 . 2 + & \boxed{1} \\
21 & = & 10 . 2 + & \boxed{1} \\
10 & = & 5 . 2 + & \boxed{0} \\
5 & = & 2 . 2 + & \boxed{1} \\
2 & = & 1 . 2 + & \boxed{0} \\
1 & = & 0 . 2 + & \boxed{1}
\end{array}$$

De modo que el número 173 se escribirá (recorriendo los restos de abajo hacia arriba):

$$10101101$$

Supongamos ahora que uno quiere multiplicar 19 por 136. Entonces, lo que hacíamos era dividir sucesivamente por 2 el número 19:

$$\begin{array}{rcl}
19 & = & 9 \,.\, 2 + \boxed{1} \\
9 & = & 4 \,.\, 2 + \boxed{1} \\
4 & = & 2 \,.\, 2 + \boxed{0} \\
2 & = & 1 \,.\, 2 + \boxed{0} \\
1 & = & 0 \,.\, 2 + \boxed{1}
\end{array}$$

Es decir que la escritura binaria del 19 se obtiene recorriendo de abajo hacia arriba los restos; por lo tanto, se tiene el

$$10011$$

Por otro lado, esto nos dice que el número 19 se escribe así:

$$19 = 1 \,.\, 2^4 + 0 \,.\, 2^3 + 0 \,.\, 2^2 + 1 \,.\, 2^1 + 1 \,.\, 2^0 = (16 + 2 + 1)$$

Luego, cuando uno tiene que multiplicar 19 por 136, aprovechamos la escritura en *binario* de 19, y anotamos:

$$19 \,.\, 136 = 136 \,.\, 19 = 136 \,.\, (16 + 2 + 1) =$$

(Y ahora, usando la propiedad *distributiva* de la multiplicación, se tiene:)

$$= (136 \;.\; 16) + (136 \;.\; 2) + (136 \;.\; 1) = 2.176 + 272 + 136 = 2.584$$

Esto explica por qué funciona este método para multiplicar. Encubiertamente, uno está usando la escritura binaria de uno de los números.

Veamos el otro ejemplo (375 . 1.517):

$$\begin{array}{rcrl}
375 & = & 187 \;.\; 2 + & 1 \\
187 & = & 93 \;.\; 2 + & 1 \\
93 & = & 46 \;.\; 2 + & 1 \\
46 & = & 23 \;.\; 2 + & 0 \\
23 & = & 11 \;.\; 2 + & 1 \\
11 & = & 5 \;.\; 2 + & 1 \\
5 & = & 2 \;.\; 2 + & 1 \\
2 & = & 1 \;.\; 2 + & 0 \\
1 & = & 0 \;.\; 2 + & 1
\end{array}$$

Luego, la escritura *binaria* del 375 es:

$$375 = 101110111$$

Es decir:

$$375 = 1 \;.\; 2^8 + 0 \;.\; 2^7 + 1 \;.\; 2^6 + 1 \;.\; 2^5 + 1 \;.\; 2^4 + 0 \;.\; 2^3 + 1 \;.\; 2^2 + 1 \;.\; 2^1 + 1 \;.\; 2^0 =$$

$$= 256 + 64 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1 \quad (*)$$

Si uno quisiera multiplicar 1.517 por 375, lo que debe hacer es descomponer el número 375, como está indicado en (*).

Luego:

1.517 . 375 = 1.517 . (256 + 64 + 32 + 16 + 4 + 2 + 1) =

(Usando la propiedad distributiva del producto otra vez:)

= (1.517 . 256) + (1.517 . 64) + (1.517 . 32) + (1.517 . 16)
+ (1.517 . 4) + (1.517 . 2) + (1.517 . 1)

= 388.352 + 97.088 + 48.544 + 24.272 + 6.068 + 3.034 + 1.517

que son justamente los sumandos que teníamos antes.

En definitiva, la escritura en binario permite encontrar la descomposición de uno de los dos números que queremos multiplicar y, al hacerlo, explica cuántas veces hay que *duplicar* el otro.

¿Cómo *dividir* sin saber las tablas de multiplicar?

Aquí corresponde hacer una breve introducción.

Ni bien decidí incluir el artículo anterior (sobre la multiplicación sin saber las tablas), me propuse encontrar una manera que permitiera hacer algo parecido con la división. Es decir: ¿cómo dividir dos números sin tener que aprender primero las tablas de multiplicar?

Les planteé el problema a dos excelentes matemáticos amigos, Pablo Coll y Pablo Milrud, diciéndoles que me sentiría frustrado y con la sensación de que la tarea quedaría inconclusa si no encontraba cómo dividir con esa premisa. Ellos pensaron, discutieron, me propusieron una forma que consideramos entre los tres y que volvió a ser sometida a su análisis. Quiero presentar aquí una versión muy buena, encontrada por los dos Pablos –quienes se merecen todo el crédito–, que estoy seguro servirá de estímulo para los docentes, quienes podrán mejorarlo, o tenerlo como un recurso más en sus manos.

Debo recalcar que no se trata de olvidarnos de las tablas, sino de discutir si vale la pena someter a los alumnos a la "tortura virtual" de tener que aprender de memoria una cantidad de números a una edad en la que podrían dedicarle ese tiempo y esa energía a otras cosas, mientras esperamos que la maduración natural les permita deducir a ellos solos qué son las tablas y para qué sirven. Eso sí: como uno no puede (o no quiere) esperar tanto tiempo para aprender a dividir y multiplicar, necesita encontrar métodos alternativos para hacerlo. Seguramente habrá otros mejores, por lo que lo invito a pensarlos y proponerlos.

Allá voy.

Para poder dividir dos números sin tener que saber las tablas de multiplicar hace falta saber sumar, restar y multiplicar por 2. Eso es todo.

Le pido que me tenga confianza porque, si bien al principio puede parecer complicado, es en realidad muchísimo más fácil que dividir en la forma convencional, y aunque sea sólo por eso, porque ofrece una manera alternativa a lo que uno aprendió en la escuela y se *corre* de lo clásico, vale la pena prestarle atención.

En lugar de detenerme en todos los tecnicismos que requeriría un libro de texto o de matemática, mostraré algunos ejemplos con creciente grado de dificultad.

El método consiste en fabricar cuatro columnas de números a partir de los dos números que uno tiene como datos.

EJEMPLO 1

Para dividir 712 por 31, completo en primer lugar la primera columna y luego la cuarta:

31			1
62			2
124			4
248			8
496			16
712			

Para obtener la primera columna, empiezo con el número por el que queremos dividir; en este caso, el 31. A partir de él, en forma descendente, multiplico por 2 en cada paso. ¿Por qué paré en el 496? Porque si multiplico el 496 por 2, obtendría un número (992) mayor que 712 (el número que originariamente quería dividir). Por eso, en lugar de poner el 992, anoto el 712. Es decir que para generar la primera columna, sólo hace falta saber multiplicar por 2 y estar atento para terminar el proceso en el paso anterior a superar nuestro segundo número.

La cuarta columna se obtiene igual que la primera, sólo que en lugar de empezar con el 31, empiezo con el número 1. Como se advierte, irán apareciendo las distintas potencias del número 2. Detengo el proceso en el mismo lugar en que me detuve en la primera columna. Hasta aquí, todo lo que uno necesita saber es multiplicar por 2.

¿Cómo se completan las dos columnas del medio? Así:

31		30	1
62	30		2
124	92		4
248		216	8
496	216		16
712			

Para realizar este paso, lo que necesita saber es restar. Empiezo de abajo hacia arriba, restando el número que tenemos para dividir (el 712) menos el anteúltimo número de la columna uno (496). Al resultado, lo anoto en la columna dos, y así aparece el 216. Ahora comparo el 216 con el 248. Como no lo podemos restar (porque 216 es menor que 248, y sólo trabajamos con números positivos), guardamos el 216 en la columna tres.

Ahora sigo hacia arriba (comparando siempre con la primera columna): como 216 es mayor que 124, entonces los resto. El resultado (92) va en la segunda columna. Un paso más: como 92 es mayor que 62, los resto nuevamente y obtengo el 30. Otra vez lo pongo en la segunda columna. Y aquí, como 30 es menor que 31, no lo puedo restar y lo vuelvo a anotar en la tercera columna.

Ya casi llegamos al final. Sólo falta un paso, y convengamos que el proceso hasta acá fue muy sencillo. ¿Cómo termina? Todo lo que hay que hacer es sumar los números de la cuarta columna que tengan un compañero en la segunda. Es decir:

$$2 + 4 + 16 = 22$$

Y obtenemos el número que estábamos buscando.

El resultado de dividir 712 por 31 es 22, y sobra el número 30, que figura en la columna tres, donde paré el proceso.

Verifíquelo:

$$31 \, . \, 22 = 682$$

Como escribí más arriba, el resto es 30. Luego:

$$682 + 30 = 712$$

Y se terminó. Resumen: se arman cuatro columnas. En la primera y la cuarta se trata de ir multiplicando por 2, empezando en la columna de la izquierda por el número por el que queremos dividir, y en la de la derecha, por el número 1.

En las columnas del medio se anotan los resultados de las restas, y cuando se puede restar, el número se guarda en la columna dos. Cuando no se puede restar, se coloca en la columna tres. El cociente se obtiene sumando los números de la cuarta columna que tienen un compañero en la segunda. Y el resto es el número que sobra en la columna dos o en la columna tres.

EJEMPLO 2

Para dividir 1.354 por 129, escribo la tabla directamente:

129		64	1
258	64		2
516		322	4
1.032	322		8
1.354			

El número 322 que figura en la columna dos resultó de restar 1.354 – 1.032. Como 322 es menor que 516, lo tuve que poner en la columna tres. Como 322 es mayor que 258, los resté y el resultado, 64, lo puse en la columna dos. Como 64 es menor que 129, lo puse en la columna tres. Y ahí terminé de construir la tabla.

Lo único que falta, entonces, es calcular el cociente y el resto. El cociente lo obtiene sumando los números de la cuarta columna que tienen un compañero en la segunda (es decir, cuando no ha quedado un lugar vacío). El cociente en este caso es:

$$2 + 8 = 10$$

El resto es el primer número de la columna tres, es decir: 64.

Hemos descubierto de esta manera que, si uno divide 1.354 por 129, el cociente es 10 y el resto, 64. Verifíquelo.

EJEMPLO 3

Ahora dividamos 13.275 por 91. Construyo la tabla como en los ejemplos anteriores:

91	80		1
182		171	2
364		171	4
728		171	8
1.456	171		16
2.912		1.627	32
5.824		1.627	64
11.648	1.627		128
13.275			

Con la tabla conseguimos, entonces, el cociente y el resto. El cociente, de sumar los números de la cuarta columna que tengan un compañero en la columna dos. Es decir:

$$1 + 16 + 128 = 145$$

Para determinar el resto miramos lo que sobró donde paré el proceso. En este caso, el número 80.

Verificación:

$$145 \,.\, 91 = 13.195$$
$$13.195 + 80 = 13.275$$

ÚLTIMO EJEMPLO

Quiero dividir 95.837 por 1.914. Construyo entonces la siguiente tabla:

1.914		137	1
3.828	137		2
7.656		3.965	4
15.312		3.965	8
30.624	3.965		16
61.248	34.589		32
95.837			

El número 34.589 resultó de restar 95.837 menos 61.248. El 3.965 resultó de restar 34.589 menos 30.624. Como 3.965 es menor que 15.312 y que 7.656, lo escribí dos veces en la tercera columna. Ahora, como 3.965 es mayor que 3.828, los puedo restar, y obtengo el 137. Como 137 es menor que 1.914, lo dejo en la tercera columna.

El cociente lo consigo sumando los números de la cuarta columna que tienen un compañero en la segunda. En este caso:

$$2 + 16 + 32 = 50$$

El resto es el último número en donde terminó el proceso (que puede figurar en la columna dos o en la tres). En este caso, es 137.

Verificación:

$$1.914 \;.\; 50 = 95.700$$

A lo que agrego el resto:

$$95.700 + 137 = 95.837$$

Y llego a lo que quería comprobar.

Para terminar, un par de observaciones:

a) No explico aquí por qué funciona el método porque no tendría el espacio adecuado, pero a aquellos que estén interesados, todo lo que deben hacer es *replicar* lo que uno hace cuando efectúa cualquier división común. Este método opera de la misma forma que el que uno conoce desde la escuela primaria, sólo que se usan (encubiertamente) los números binarios.

b) Más allá de que alguien adopte estos métodos para dividir y/o multiplicar sin tener que saber las tablas, lo que intento proponer es que hay otras maneras de hacerlo. Creo que hay que explorarlas para que, en definitiva, *enseñar las operaciones elementales* no sea una tortura para nadie.

Monedas en carretilla

¿Cuántas veces por día uno *estima* algo y no necesariamente se da cuenta de que lo hace?

En realidad, uno *vive* estimando todo el día, todo el tiempo. Voy a demostrarlo.

Cuando alguien sale de su casa, *estima* cuánto dinero tiene que llevar, pensando en el día que tendrá por delante. (Claro, eso si *tiene* dinero para llevar, y si *tiene* algún lugar adonde ir. Pero supongamos que se cumplen ambos requisitos.) Además, *estima* cuánto tiempo antes debe salir de su casa para llegar adonde debe ir. *Estima* si le conviene esperar el ascensor que está tardando más de la cuenta, o si le conviene bajar por la escalera. Y *estima* si le conviene ir en colectivo o en taxi, de acuerdo con el tiempo disponible. Y *estima* al cruzar la calle, si vienen autos, el tiempo que tardarán en llegar hasta él. Y decide entonces si cruza o no. Sin saberlo, estará *estimando* la velocidad del auto que viene a su izquierda, y la estará comparando con su propia *velocidad* para cruzar. Si va manejando un auto, *estima* cuándo tiene que apretar el freno y cuándo acelerar. O *estima* si llegará a cruzar el semáforo en verde o en amarillo, o si no cruzará. También *estima* cuántos cigarrillos comprar para el día, cuántos de ellos va a fumar, *estima* cuánto va a engordar con lo que comerá, *estima* a qué función del cine va a llegar… *Estima, estima*... y luego decide.

Creo que estará de acuerdo conmigo en que uno *vive estimando*, aunque no lo sepa. Estamos entrenados para hacer las cosas en piloto automático, pero cuando a uno lo corren un poquito de las estimaciones cotidianas, trastabilla. No siempre, claro, pero a nadie le gusta que lo muevan de la zona en la que se siente confortable.

Por ejemplo: supongamos que está parado en la vereda cerca de un edificio muy alto, digamos de *100 pisos*. Supongamos también que le digo que camiones blindados, de esos que transportan caudales, depositaron en la vereda suficientes monedas de un peso como para que las empiece a apilar en la base del edificio con la idea de llegar con ellas hasta la terraza.

Ahora, la parte importante: en la vereda dejaron una carretilla que mide un metro de ancho, por un metro de largo, por un metro de alto. Es decir que tiene un volumen de un metro cúbico.

¿Cuántos viajes tendrá que hacer con la carretilla llena de monedas, para levantar una pila o columna de monedas de un peso y llegar hasta la terraza del edificio?

Se trata de *estimar* cuántos viajes se necesitan. No hace falta hacer un cálculo *exacto*, sino dar una respuesta *estimativa*.

Aquí es donde lo dejo pensar solo; eventualmente puede usar la respuesta que figura más abajo, para *confirmar* lo que pensó. Y si bien la tentación es decir: "Ahora no tengo tiempo, voy a leer la solución", se perderá la oportunidad de disfrutar de sólo pensar. Nadie lo mira… y, por otro lado, ¿no es interesante poder hacer algo con lo que uno entrena el pensamiento, entrena la intuición, sin que haya nada en juego más que el *placer* de hacerlo?

Como incentivo, agrego una breve historia.

Este problema me lo contó Gerardo Garbulsky, doctor en Física del MIT y actual director de una consultora muy importante radicada en la Argentina. En el proceso de buscar gente para con-tratar, realizó esta pregunta a unos doscientos aspirantes. La distribución –aproximada– de las respuestas fue la siguiente:[3]

1 carretilla: 1 persona
10 carretillas: 10 personas
100 carretillas: 50 personas
1.000 carretillas: 100 personas
10.000 carretillas: 38 personas
Más de 10.000 carretillas: 1 persona

SOLUCIÓN:

La moneda de un peso argentino tiene 23 milímetros de diámetro y un espesor de 2,2 milímetros. Estos datos, obviamente, son aproximados, pero a los efectos del problema planteado son más que suficientes. Recuerde que no queremos una respuesta exacta sino una *estimación*.

Entonces, para hacer las cuentas más fáciles, voy a suponer que cada moneda tiene 25 milímetros de diámetro y 2,5 milímetros de espesor. Veamos cuántas monedas entran en la carretilla (de un metro cúbico de volumen). Estimemos cuántas se pueden poner en la base (que tiene un metro de largo por uno de ancho).

[3] Gerardo establece una diferencia entre la *estimación intuitiva* y la *estimación calculada*. Cuando realizaba esta pregunta en las entrevistas, pedía a los candidatos que primero le dijeran cuántos viajes eran necesarios sin hacer *ningún* cálculo. Así se obtuvieron las primeras respuestas. Después les pidió la estimación cuantitativa, y ahí el 99 por ciento de las respuestas fueron correctas. Es muy distinto tener “educada la intuición” o “ser capaz de estimar cantidades”. La segunda es una capacidad que, ejercida repetidamente, ayuda a generar la primera, pero son de naturaleza muy distinta.

1	moneda	25	mm
4	monedas	100	mm
40	monedas	1.000	mm = 1 metro

Luego, como la base es cuadrada (de un metro por un metro), entran 40 . 40 = 1.600 monedas. Y como la carretilla tiene un metro de altura, y de espesor cada moneda tiene 2,5 milímetros, veamos cuántas monedas entran "a lo alto":

1	moneda	2,5	mm
4	monedas	10	mm
400	monedas	1.000	mm = 1 metro

De modo que en la base entran 1.600 monedas, y eso hay que multiplicarlo por 400 monedas de altura.

400 . 1.600 = 640.000 monedas

Hagamos una pausa por un instante.

Acabamos de *estimar* que en cada carretilla de un metro cúbico entran casi 650.000 monedas. Guardemos este dato en la memoria. Falta ahora que *estimemos* cuántas monedas hacen falta para levantar una columna que vaya desde la base del rascacielos de 100 pisos hasta la terraza.

Estamos parados frente a un edificio de 100 pisos. Podemos *estimar* que la *altura* de cada piso es de *3 metros*. Es decir, que un rascacielos de *100 pisos* tiene una altura de unos 300 metros. ¡Tres cuadras!

Ahora, *estimemos* cuántas monedas hacen falta para llegar hasta la terraza:

1	moneda	2,5	mm
4	monedas	10	mm
40	monedas	100	mm
400	monedas	1.000	mm = 1 metro

Es decir que hacen falta 400 monedas para llegar a tener *1 metro* de altura, de modo que, para llegar a 300 metros, multiplicamos por 400.

RESULTADO: 300 . 400 = 120.000 monedas

MORALEJA: Con una carretilla, alcanza y sobra.

Para concluir, veamos un par de reflexiones estimuladas por comentarios del propio Garbulsky y por Eduardo Cattani, otro excelente matemático y amigo, que trabaja hace muchísimo tiempo y con singular éxito en Amherst, Massachusetts.

Eduardo sugiere que "la altura de la moneda *no* es un dato necesario para hacer la estimación cuantitativa". Parece raro, pero sígame en este razonamiento: si se sabe que en la base de la carretilla entran 1.600 monedas y vamos a apilar monedas hasta que lleguen a un metro de altura, al finalizar el proceso tendremos 1.600 columnas de un metro.

Luego, cuando saquemos las monedas de la carretilla y pongamos cada pila de un metro encima de la otra, ¡formaremos una columna de 1.600 metros! Y para esto, no hizo falta saber cuál era el espesor de cada moneda.

Ahora que el problema terminó, le propongo pensar qué *aprende* uno de él. La intuición consiste en tratar de extrapolar las experiencias acumuladas en la vida y usarlas en las nuevas situaciones que se presenten. Esto, obviamente, no está mal. Sólo que cuando uno tiene que operar en diferentes escenarios, en donde los volúmenes son enormes, o las cantidades son más grandes, empieza a deslizarse por caminos desconocidos. Pero, como en todo, uno se entrena y aprende.

Ah... Creo que Gerardo sugirió que le dieran el puesto a la *única* persona que dijo que hacía falta *un solo viaje*.[4]

La historia de Google

¿Quiere entrar a trabajar en Google? Necesita estar preparado, por ejemplo, para resolver problemas como los que siguen.

La historia, al menos para mí, empezó en agosto del 2004. Estaba en Boston y al pasar por una estación de subte vi un cartel de publicidad muy grande, de unos quince metros de largo, colgado del techo de la estación correspondiente a la Universidad de Harvard. El cartel decía:

(primer primo de 10 dígitos consecutivos del desarrollo de e).com

Nada más. Eso era *todo* lo que decía el enorme cartel. Obviamente, me llamó muchísimo la atención, y lo primero que pensé

[4] Gerardo Garbulsky también reflexiona acerca del hecho de que la altura de la moneda no es un dato necesario para realizar la estimación cuantitativa. Por ejemplo: a) lo único necesario es saber el volumen de la torre de monedas, que obviamente no depende de la altura de cada moneda, sino de su diámetro y la altura del edificio; b) si las monedas tuvieran cualquier otra altura, por ejemplo, 1 metro, 1 dm, 1 cm, la respuesta sería la misma. De hecho, cuando uno hace la cuenta, la *altura* de la moneda se "cancela" en el mismo cálculo. Este aspecto del problema también es muy interesante, ya que más de la mitad de los entrevistados trató de calcular la altura (espesor) de la moneda para determinar la estimación cuantitativa. Dicho sea de paso, el espesor de la moneda es muy importante si uno quiere saber cuánto dinero hay en la torre de monedas.

era si se trataría efectivamente de un cartel de publicidad o si alguien estaría haciendo una broma o algo por el estilo. Pero no, el cartel tenía todas las características de ser una propaganda convencional.

Sin que nadie se sienta intimidado, podemos afirmar que cuando uno dice que algo crece *exponencialmente*, aunque no lo sepa, involucra al número *e*. Cuando uno habla de logaritmos, habla del número *e*. Cuando habla de interés compuesto, habla del número *e*. Cuando se refiere a la escala de Richter para medir terremotos, está involucrado el número *e*.

Del mismo modo que nos acostumbramos a oír o a leer que el número *pi* se escribe:

$$pi = 3{,}14159\ldots$$

el número *e* también tiene *infinitas cifras*, y las primeras son:

$$e = 2{,}718281828\ldots$$

El número *e* es una suerte de pariente cercano de *pi*, en el sentido de que, como *pi*, es irracional y trascendente.

La historia sigue así: después de ver el cartel (y descubrirlo en otros lugares más), le comuniqué mi hallazgo a mi amigo Carlos D'Andrea, matemático egresado de la Universidad de Buenos Aires (UBA), ahora instalado en Barcelona luego de su exitoso paso por Berkeley.

Carlos le trasladó la pregunta a Pablo Mislej, otro matemático argentino que en ese momento trabajaba en un banco en Buenos Aires (y acababa de tener su primer hijo). Unos días después, Pablo me escribió un e-mail contándome lo que había encontrado. Ni bien vio el problema, comprendió que necesitaba encontrar la mayor cantidad de decimales que hubiera publicados del número *e*. Y encontró el primer millón de dígitos de *e* en esta página:

http://antwrp.gsfc.nasa.gov/htmltest/gifcity/e.1mil

Esos datos se conocen hace ya muchos años, más precisamente desde 1994. Lo que tuvo que hacer Pablo fue separar la información en segmentos de diez numeritos cada uno, y luego fijarse cuál era el primero en formar un número primo. Como se dará cuenta, todo esto es imposible de realizar sin una computadora, y siendo capaces de crear un programa que lo procese.

La primera tira de 10 dígitos que cumplía con lo pedido era:

7427466391

El número 7 que aparece en primer lugar en la tira corresponde al dígito 99 de la parte decimal del número *e*.

Con ese dato, a continuación Pablo tuvo que ir a la página web http://www.7427466391.com y ver qué pasaba. Cuando llegó a ese punto, se encontró con otro problema (algo así como *La búsqueda del tesoro*). Claro que para llegar a él debió resolver el primero.

Y lo que Pablo vio fue lo siguiente:

f(1) = 7182818284
f(2) = 8182845904
f(3) = 8747135266
f(4) = 7427466391
f(5) = __________

En este caso, se trataba de completar la secuencia. Es decir, a partir de los primeros cuatro números de la columna de la derecha, había que descubrir qué número correspondía al quinto lugar.

Pablo me escribió que, con un poco de suerte, advirtió que la suma de los diez dígitos de los primeros cuatro números da siempre 49. No sólo eso: como ya tenía los datos sobre el número *e* y su desarrollo, dedujo que los primeros cuatro números de esa columna correspondían a cuatro de las "tiras" que él ya tenía. Es más: vio que el primer número,

7182818284

correspondía a los primeros *diez dígitos* del desarrollo decimal del número *e*.

El segundo:

8182845904

son los dígitos que van del *quinto hasta el decimocuarto lugar.*

El tercero:

8747135266

corresponde a los dígitos que van del lugar 23 al 32. Y por último, el cuarto:

7427466391

es la "tira" que involucra a los dígitos 99 al 108 del desarrollo de *e*. Se dio cuenta, entonces, de que estaba cerca: necesitaba buscar ahora la primera "tira" de todas las que no había usado, que sumara 49... ¡Y la encontró!

El candidato a ser el quinto número de la secuencia era el

5966290435

que corresponde a los dígitos 127 al 136 del desarrollo decimal.

Cuando completó la secuencia, y pulsó *enter* en su computadora, apareció súbitamente en otra página web. Ésta decía:

http://www.google.com/labjobs/index.html

donde invitaban a enviar el currículum vitae, que sería tenido en cuenta por la firma Google para un futuro contrato, porque quien hubiera ingresado en esa página habría superado los obstáculos que ellos creían suficientes para poder pertenecer a la empresa.[5]

Los tests de inteligencia

Quiero retomar aquí el tema de la *inteligencia.* No sólo porque es un asunto apasionante, debatible y del que se sabe muy poco, sino porque sería interesante discutir sobre los métodos que se utilizan comúnmente para medirla. De hecho, es curioso que algunas personas –de cuya buena fe no tengo por qué dudar (aunque… de acuerdo… de algunos desconfío…)– ofrezcan tests para medir algo cuya definición no se conoce. ¿Qué se evalúa entonces?

[5] Como dato ilustrativo, otro amigo mío y profesor de la Facultad de Ciencias Exactas (UBA), Ricardo Durán, también resolvió el problema. Por ahora, Pablo sigue trabajando en el banco, y Ricardo es uno de los mejores profesores que tiene el departamento de matemática de la Facultad y uno de los mejores tipos que conozco.

Por ejemplo: le dan una tabla de números en la que *falta* uno y le piden que diga qué número falta y que explique cómo llegó a ese resultado.

54	(117)	36
72	(154)	28
39	(513)	42
18	(¿?)	71

El test, supuestamente, consiste no sólo en que pueda determinar qué número debería ir en lugar de los signos de interrogación, sino también en medir su capacidad de análisis para deducir *una ley de formación*. Es decir: alguien pensó en un patrón que subyace tras la gestación de esos números, y pretende que usted lo descubra.

Si yo fuera usted, pararía un rato y pensaría en alguna solución. Aquí voy a proponerle una alternativa, pero, en todo caso, uno puede entretenerse buscándola sola/o.

UNA POTENCIAL SOLUCIÓN

Uno podría decir que el número que falta es el 215. Mire los números que integran la primera fila en la primera y tercera columna: 54 y 36 . La suma de los dos exteriores (5 + 6) da 11, y la suma de los dos interiores (4 + 3) da 7.

De esa forma, se obtuvo el número 117: juntando la suma de los dos exteriores con la de los dos interiores.

Pasemos ahora a la siguiente fila y hagamos el mismo ejercicio. Los dos números de la primera y la tercera columna son 72 y 28. Sumando los dos exteriores (7 + 8) da 15 y sumando los dos interiores (2 + 2) da 4. Entonces, el número que va en el centro es 154.

Si uno sigue en la tercera fila, tiene 39 y 42. La suma de los dos exteriores (3 + 2) da 5 y la de los dos interiores (9 + 4) da 13. Por lo tanto, el número que va en el centro es el 513.

Por último, con este patrón, dados los números 18 y 71, los dos exteriores suman (1+ 1) 2, y los dos centrales (8 + 7), 15. Corolario: si quien diseñó pensó igual que usted (o que yo) el número que falta es el 215.

Me apresuro a decir que *ninguno de estos métodos es fiable, ni mucho menos exacto.* De hecho, habría –y en general *hay*– infinitas maneras de encontrar un número que ocupe el lugar del signo de interrogación. Se trata, en todo caso, de ser capaz de buscar el que pensaron los que diseñaron el test.

OTRO EJEMPLO (MUY ILUSTRATIVO)

Alicia Dickenstein, la brillante matemática argentina, me invitó a pensar un poco más sobre las personas que producen estos tests. "Creo que estos IQ [*Intelligence Quotient*] tests son muy peligrosos –me dijo–. No son más que algo estándar que puede aprenderse y sólo miden el aprendizaje cuadrado en una dirección. Es decir: no se sabe bien qué miden y algunas personas, inescrupulosas y malintencionadas, se permiten sacar conclusiones sobre la supuesta 'inteligencia' o 'no' de un sujeto. De hecho, en los Estados Unidos hubo una gran controversia sobre este tipo de tests, ya que se usaban para ubicar a los 'afroamericanos' en clases más retrasadas con una obvia intención segregacionista. Lo único que se puede comprobar es que hay gente que no está entrenada para este tipo de tests. Y nada más."

Sigo yo: el peligro latente (o no tanto) es que cuando a un chico o a un joven se lo somete a este tipo de problemas, contesta como puede, en general, con bastante miedo a equivocarse. La sensación que prima en el que rinde el test (y en sus padres), es que lo están juzgando "para siempre". Es que, de hecho, como supuestamente mide la inteligencia, y salvo que uno la pueda mejorar con el paso del tiempo (*lo que natura non da, Salamanca non presta*), la idea de que es algo definitivo está siempre presente. Una sensación de alivio recorre a todos, al que rindió el test y a la familia, cuando el implicado contesta lo que pensaron los que lo prepararon. En todo caso, sólo demuestra que es tan inteligente como para hacer lo que ellos esperaban.

Si, por el contrario, no encuentra la respuesta o se equivoca, se expone a enfrentar la cara circunspecta (y exagero, obviamente) de quien llega con una mala noticia: "Lamento comunicarle que usted será un *estúpido* toda su vida. Dedíquese a otra cosa".

Aunque más no sea por eso, cualquier test que presuma de medir algo tan *indefinible* como la inteligencia, debería ser hecho en forma hipercuidadosa.

Lo que sigue es un ejemplo que me mandó Alicia, que invita a la reflexión. De hecho, le pido que lea el test (es una verdadera pavada) y piense qué respuesta daría. Verá que, aun en los casos más obvios, *no hay una respuesta única.* Aquí va:

Si uno encuentra la siguiente serie de números (agrupados de la forma que se indica):

1	2	3
4	5	6
7	8	¿?

¿Qué número pondría en reemplazo de los signos de interrogación?

(Deténgase un momento para pensar qué haría usted.)

No me diga que no pensó o consideró el número 9, porque no le creo. Claro, ése sería el pensamiento que Alicia Dickenstein denomina "rutinario", o bien: "el que responde lo que el que pregunta quiere oír". Y esta última afirmación es muy importante. Porque, ¿qué pasaría si le dijera que la serie se completa así?:

1	2	3
4	5	6
7	8	27

Seguramente pensaría que leyó mal o que hay un error de imprenta. No, el último número es el 27. Le muestro el patrón que podría haber buscado quien pensó el problema.

Tome el primer número y elévelo al cuadrado (o sea, multiplíquelo por él mismo). Al resultado réstele cuatro veces el segundo, y a lo que obtenga, súmele 10. En la primera fila, entonces, al elevar 1 al cuadrado, obtendrá otra vez 1. Ahora le resta cuatro veces el segundo, es decir, cuatro veces el número 2, y le suma 10. Resultado: 3.

$1 - 8 + 10 = 3$ (que es el tercer número de la primera fila)

En la segunda fila, eleve el primer número al cuadrado (4^2), o sea 4 . 4, con lo que obtiene 16. Le resta cuatro veces el segundo número (4 . 5 = 20) y le suma 10. Resultado: 6.

$$16 - 20 + 10 = 6$$

En la tercera fila tendría 7 al cuadrado (49), menos cuatro veces el segundo (4 . 8 = 32), más 10. Resultado: ¡27!

$$49 - 32 + 10 = 27$$

MORALEJA 1: Trate de entrenarse haciendo este tipo de tests y verá cómo al final le salen todos, o casi todos. Ése será el momento en que quizá crea que es más inteligente. Lo curioso es que tal vez haya aprendido a *someterse mejor* al pensamiento oficial.

MORALEJA 2: Pretender usar la matemática como un testeador de la inteligencia puede producir un efecto no sólo negativo y frustrante, sino *falso*. Aunque más no sea porque no se sabe qué se mide.

Sudoku

¿Sudoku dijo? ¿Qué es Sudoku? Posiblemente hoy haya mucha gente que puede contestar qué es el Sudoku, pero lo que es seguro es que hace dos años nadie tenía idea de que habría de transformarse en el "furor" en términos de pasatiempo y juegos de lógica. De hecho, muchísimos diarios y revistas, no sólo en la Argentina sino en todo el mundo, llenan sus páginas con este juego originado en Japón, y que tiene "atrapada" a buena parte de la población que busca en crucigramas, rompecabezas y pasatiempos de diversa índole una manera de darle "chicle" al cerebro para mascar.

Para aquellos que nunca escucharon hablar del Sudoku, las reglas son bien simples y fácilmente comprensibles.

El Sudoku es como un crucigrama donde aparece un "cuadrado grande" de 9 filas por 9 columnas –es decir, 81 casilleros–, que está dividido a su vez en 9 subcuadrados de 3 . 3:

8		1		2	6			
	7	3		1				9
	4	9					5	2
	6				8	4		
9	3		2		1		7	8
		5	7				3	
5	2					6	8	
4				7		3	1	
			6	5		9		7

Hay que llenar cada subcuadrado con los nueve dígitos que van del 1 hasta el 9, es decir: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Eso sí: no puede aparecer ningún dígito repetido ni en la misma fila ni la misma columna del cuadrado grande. Ésas son las reglas, fáciles y sencillas.

Como dato adicional, ya vienen "de fábrica" algunos números ubicados en sus posiciones. Todo lo que hay que hacer es completar las casillas restantes.

Como suele suceder ahora, Internet está repleto de variaciones del juego. Su aparición rompió con los moldes de los viejos crucigramas o juegos de palabras tradicionales, pero lo interesante es que, si bien hay números involucrados (los dígitos del 1 al 9 repartidos múltiples veces en las casillas), pocos deben creer que están usando y haciendo matemática cuando resuelven uno de los problemas. Más aún: como hay muchísimos maestros y profesores de matemática del país que andan a la búsqueda de nuevos estímulos para sus estudiantes, creo que el Sudoku permite formular ciertas preguntas –no todas de fácil respuesta– que funcionen como disparadores de un trabajo interactivo entre docentes y alumnos.

Las que siguen son sólo algunas de esas preguntas. Eso sí: uno puede jugar al Sudoku sin tener que contestar ninguna, y vivir feliz. Pero también es cierto que uno puede hacerse las preguntas y ser feliz aun sin encontrar las respuestas, y ni qué hablar si las encuentra.

EL NOMBRE SUDOKU

De acuerdo con datos extraídos de *Wikipedia* (la enciclopedia gratuita que figura en Internet), que fueron corroborados por otras fuentes, Sudoku proviene del japonés *Suuji wa dokushin ni kagiru*, que significa: "los dígitos tienen que quedar *solteros*", o "libres", y es una marca registrada de la editorial japonesa Nikoli Co. Ltd.

¿DESDE CUÁNDO EXISTE EL SUDOKU?

Hay distintas versiones, pero la más aceptada es que apareció por primera vez en una revista en Japón, en 1984. El Sudoku debe toda su popularidad a Wayne Gould, un juez que se jubiló en Hong Kong y que luego de conocer el juego en Tokio, escribió un programa de computadora que automáticamente *generaba* distintos Sudokus con qué entretenerse. Luego se dio cuenta de que, quizás, había descubierto una mina de oro y comenzó a ofrecerlo a distintos diarios europeos. Lo curioso es que recién en 2004 (hace sólo *dos años*) uno de los periódicos más importantes de Inglaterra, el *Times*, que se publica en Londres, aceptó la propuesta de Gould, y su competidor, el no menos famoso *Daily Telegraph*, lo siguió inmediatamente en enero del 2005. A partir de ahí, explotó en el resto del mundo, incluso en la Argentina.

Hoy, el juego causa *furor* en múltiples diarios, revistas y libros especialmente publicados con variantes sorprendentes, versiones más fáciles, otras más complicadas, con diferentes grados de dificultad. Es común ver gente en los colectivos, trenes y estaciones de subte, ensimismada y pensativa, como "ausente", jugando con algún ejemplar del Sudoku.

LA MATEMÁTICA

Como decía, uno puede sentarse y jugar al Sudoku, entretenerse con él y nada más. Y de hecho eso es lo que hace la mayoría. Pero, al mismo tiempo, lo invito a pensar algunas posibles preguntas alrededor del Sudoku:

a) ¿Cuántos juegos de Sudoku *posibles* hay?
b) ¿Se terminarán en algún momento?
c) ¿Alcanzará para entretener a esta generación? O, en todo caso, ¿cuándo empezarán a repetirse?
d) La solución a la que uno llega (*cuando* llega a alguna), ¿es única?
e) ¿Cuántos numeritos tienen que venir "de fábrica" para que la respuesta sea única? Es decir, ¿cuántas casillas tienen que estar completas de entrada, para que uno pueda empezar a jugar con confianza de que el problema tendrá una única solución?
f) ¿Hay un *número mínimo* de datos que deben darnos? ¿Y un número máximo?

g) ¿Hay algún método para resolverlos?
h) ¿Se pueden hacer Sudokus de otros tamaños? ¿Cuántos habrá de 4 . 4? ¿Y de 16 . 16?
i) ¿Se podrá inventar Sudokus de 7 . 7? ¿Y de 13 . 13? En todo caso, ¿cuadrados de cuántas filas y columnas se pueden considerar?

En fin, hay muchísimas preguntas que uno puede formularse, y estoy seguro de que mientras usted leía éstas, pensó en otras que quizá le interesen más. En realidad, eso es lo único que importa.

Con todo, quisiera aportar algunas respuestas, a las que se puede acceder en cualquier libro que se especialice en este pasatiempo japonés, o bien en Internet, o incluso en la famosa revista *Scientific American*, que le dedicó una nota de varias páginas en la edición de junio de 2006.

Algunos datos sobre el Sudoku

Antes que nada, voy a proponerle algunas reflexiones.

Suponga que tiene resuelto uno de los Sudoku y decide cambiar dos números de posición. Por ejemplo: cada vez que aparece un número 1, lo cambia por un 8. Y al revés lo mismo, es decir, cada vez que aparece un 8 lo cambia por un 1. Obviamente, aunque parezcan dos juegos distintos, serán *el mismo*. Es decir que como juegos son diferentes, pero en esencia sabremos que uno proviene de otro intercambiando un par de números, por lo que cualquier dificultad que tuviera el primero, lo tendrá el segundo. Y viceversa.

Ahora bien: si vamos a calcular todos los Sudokus que hay, a estos dos últimos ¿los contamos dos veces o reconocemos que es el mismo juego con dos “apariencias” diferentes?

Por otro lado, suponiendo que uno tiene resuelto un Sudoku, e intercambia (sólo por poner un ejemplo) las filas uno y tres, ¿cambia el resultado final? ¿Agrega o quita alguna dificultad? ¿Y si uno intercambiara la cuarta y la quinta columnas? ¿Varía en algo el planteo inicial? ¿Se trata, acaso, de dos juegos diferentes? Uno puede decir que sí, que son dos juegos diferentes porque las columnas están cambiadas o los dígitos están intercambiados. Aceptemos esta respuesta. En ese caso, el número de Sudokus que se pueden encontrar (con ayuda de algunas herramientas matemáticas y de lógica y, por supuesto, computadoras rápidas) es:

6.670.903.752.021.072.936.960

Más de 6.670 trillones de juegos posibles.

En cambio, si uno restringe los casos como el planteado, y no considera distintos a los que surgen –por ejemplo– de intercambiar dos dígitos, o dos columnas o dos filas, entonces el número de juegos posibles se reduce muchísimo:

5.472.730.538

Un poco menos de 5.500 millones. Con todo, lo interesante de este número es que, como dice Jean-Paul Delahaye en el artículo publicado por *Scientific American*, es menor que el número de personas que habitamos la Tierra, calculado en más de 6.300 millones.

Con estos datos creo que está claro que es difícil que uno pueda considerar que se van a *acabar* los juegos en esta generación. De hecho, podemos jugar tranquilos sin que corramos el riesgo de *descubrir* alguna de las posibles repeticiones.

Otra de las preguntas pendientes se refiere a la *unicidad* en la respuesta. ¿Qué quiere decir esto? Supongamos que nos dan un juego de Sudoku, que tiene *repartidos* ciertos dígitos en algunas casillas. Por supuesto, no hay garantía de que esa configuración tenga solución, es decir que podríamos encontrarnos con algunos datos contradictorios. Pero suponiendo que están bien, y que no hay contradicciones, ¿cómo sabemos que la solución que encontramos es la *única* posible?

En realidad, ésa es una muy buena pregunta, porque al haber tantos juegos de Sudoku habrá que recurrir a una computadora para comprobar –en general– si en nuestro caso puede haber más de una solución. Podría ser así. De hecho, usted mismo puede *inventar* un juego que tenga más de una solución. Sin embargo, la *unicidad* de la solución debería ser un requerimiento básico. Porque se supone que si el juego está *bien planteado*, tiene que tener una solución *única*. Ésa es una parte del atractivo del Sudoku; si no, sería como jugar al "bingo", y cuando uno cree que ganó y grita "¡Bingo!", hay otro que "gana" junto con usted.

Ahora bien: ¿cuántos números deben venir impresos *antes* de empezar el juego? ¿Los contó alguna vez? ¿Siempre es la misma cantidad? Lo interesante en este aspecto es que el número de *datos* con el que ya viene cada Sudoku varía con cada juego. No hay un número predeterminado que sea el correcto. No obstante, como podrá intuir, *algunos números tienen* que aparecer porque, en el caso extremo, si no hubiera ninguno habría muchísimos resultados posibles. Ni bien se coloca *un* dígito, disminuye la cantidad de respuestas, y al agregar cada vez más, se irán restringiendo las soluciones en forma proporcional, hasta llegar a un número de datos que *garantice* una *solución única*.

Otro problema es el de la *minimalidad*, es decir, ¿cuál es el número *mínimo* de datos que deben figurar para que haya *una única solución*? Hasta hoy el problema no tiene respuesta. La conjetura más aceptada es que hacen falta 17. Hay varios matemáticos en el mundo *pensando y discutiendo* el caso, y uno de ellos, el irlandés Gary McGuire, de la Universidad Nacional de Irlanda (Maynooth), lidera un proyecto que trata de probar que hay ejemplos de Sudoku que con 16 datos garantizan una solución única. Hasta acá, según él mismo reconoció, ha fallado en el intento, por lo que el 17 sigue siendo el número aceptado.

Existen muchas preguntas *abiertas* –sin respuesta– aún hoy, y hay varios casos más sencillos que se pueden atacar (con un tablero de 4 . 4, por ejemplo). Lo que creo interesante es mostrar cómo un juego inocente y que sólo parece un pasatiempo, tiene mucha matemática detrás.

ALGUNAS REFERENCIAS:

http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku
http://sudoku.com.au/
http://www.dailysudoku.com/sudoku/index.shtml
http://www.daily-sudoku.com/
http://www.sudoku.com/howtosolve.htm

Criba de Eratóstenes

Eratóstenes (257-195 a.C.) nació en Cyrene (ahora Libia), en el norte de África. Fue el primero en calcular, con precisión sorprendente para la época, el diámetro de la Tierra (nunca voy a entender por qué se le atribuye a Colón el haber “descubierto” que la Tierra era “redonda” o esférica, cuando eso ya se sabía desde más de *quince siglos* atrás).

Por varias décadas, Eratóstenes fue director de la famosa Biblioteca de Alejandría. Fue una de las personas más reconocidas de su tiempo, y lamentablemente sólo unos pocos fragmentos de lo que escribió sobrevivieron hasta nuestros días. Eratóstenes murió en una huelga voluntaria de hambre, inducido por la ceguera, que lo desesperaba. Aquí deseo presentar uno de sus famosos desarrollos: la llamada "Criba de Eratóstenes".

Sabemos que un *número primo* (positivo) es aquel número entero que *sólo es divisible por sí mismo y por 1* (explícitamente se excluye al número 1 de la definición). Lo que hizo Eratóstenes fue diseñar un algoritmo que le permitiera encontrar *todos los números primos.*Veamos qué es lo que hizo.

Escribamos los primeros 150 números:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
141	142	143	144	145	146	147	148	149	150

Eratóstenes empezó a recorrer la lista. El 1 no lo consideró, porque sabía que no era primo, de modo que el primer número con el que se encontró fue el *2*. Lo que hizo entonces fue *dejar el 2* y *tachar* todos sus múltiplos. Y le quedó una lista como ésta:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	105	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
111	~~112~~	113	~~114~~	115	~~116~~	117	~~118~~	119	~~120~~
121	~~122~~	123	~~124~~	125	~~126~~	127	~~128~~	129	~~130~~
131	~~132~~	133	~~134~~	135	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
141	~~142~~	143	~~144~~	145	~~146~~	147	~~148~~	149	~~150~~

Una vez que *tachó todos los múltiplos de 2*, siguió con la lista. Fue hasta el primer número sin tachar y se encontró con el 3. Lo dejó así, sin tachar, y eliminó *todos sus múltiplos*. La tabla quedó de esta manera:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	115	~~116~~	~~117~~	~~118~~	119	~~120~~
121	~~122~~	~~123~~	~~124~~	125	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	133	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	143	~~144~~	145	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~

Después, siguió. Como el 4 ya estaba tachado, avanzó hasta el primer número sin tachar y se encontró con el 5. Dejó el 5 y continuó con el proceso anterior, tachando todos sus múltiplos. De esa forma, quedaron eliminados *todos los múltiplos de 5*. Y la tabla quedó así:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	119	~~120~~
121	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	133	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	143	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~

Luego siguió con el 7, y tachó todos sus múltiplos. Después avanzó hasta el primer número sin tachar, y encontró el 11. Lo dejó, y tachó todos sus múltiplos. Siguió hasta el siguiente número no tachado, y se encontró con el 13. Luego, tachó todos sus múltiplos, y continuó con el mismo ejercicio hasta completar la tabla.

Finalmente, los números que no estaban tachados no eran múltiplos de ningún número anterior. En realidad, lo que estaba haciendo era construir una suerte de "filtro" por el cual, al hacer pasar todos los números, sólo quedaban los primos.

Y la tabla quedaba (al menos, en los primeros 150 lugares) así:

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109	~~110~~
~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~
121	~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~
131	~~132~~	133	~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~
~~141~~	~~142~~	143	~~144~~	~~145~~	~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~

Con este método sencillo pero muy efectivo, Eratóstenes construyó su famosa “criba”. Los números que lograban sortear el filtro eran los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 91, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 121, 127, 131, 133, 137, 139, 143, 149…

Sabemos que los primos son infinitos, pero todavía hay muchas preguntas respecto de ellos. Con todo, la criba de Eratóstenes fue el primer método o algoritmo que se conoció para identificarlos.[6] Aún hoy es la forma más efectiva para detectar los

[6] Obviamente no los encuentra a *todos* porque los primos son infinitos, pero

números primos más pequeños (digamos, los menores de 10 millones).

Aunque sea nada más que por este aporte a la Teoría de números y por lo que hizo con un grado de eficiencia notable para la época al determinar que la Tierra era redonda, se merece un lugar en la Historia.

Números perfectos

Los números enteros son una usina generadora de problemas interesantes. Y muchos de ellos siguen *abiertos,* en el sentido de que aún no se conoce su solución. Aquí voy a exponer uno de esos problemas.

Pitágoras y sus discípulos creían que los números contenían *la esencia* de todo, y les ponían género también. Por ejemplo, decían que los números *pares* eran *femeninos.* En esta oportunidad, me voy a ocupar de los que llamaron *números perfectos.*

Antes que nada, los números que voy a usar en este tramo son los que se denominan números *naturales,* los que uno conoce porque los *usamos* todos los días: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., etcétera.

Tomemos ahora un número natural cualquiera, digamos el 12. ¿Cuántos números lo dividen exactamente? Es decir, ¿en cuántas partes se puede dividir el 12 sin que sobre nada?

La respuesta es (espero que lo haya resuelto solo antes):

1, 2, 3, 4, 6 y 12

lo que asegura este proceso es que uno puede determinar *todos los primos menores que un número dado,* o bien decidir si un número cualquiera es primo o no.

Si divido 12 por el número 1, obtengo 12 y no sobra nada. Si divido 12 por 2, obtengo 6 y no sobra nada. Si divido 12 por 3, obtengo 4 y no sobra nada. Si divido 12 por 4, obtengo 3 y no sobra nada...

Pero si dividiera el número 12 por 5, el resultado no sería un número natural, sino 2,4. En este sentido, podemos decir que el número 12 no es *divisible exactamente* por 5, pero sí por 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Justamente, estos números son los *divisores* del 12.[7]

Ya sabemos entonces cuáles son los *divisores* de un número natural. Como se dará cuenta, el número 1 es siempre *divisor* de cualquier número. Y también es cierto que *el propio número* es *siempre* divisor de sí mismo.

Ahora bien. Volvamos al número 6. ¿Qué divisores tenía? Como vimos:

1, 2, 3 y 6

Si excluimos al propio número, es decir, si excluimos al 6, entonces los divisores son: 1, 2 y 3. A éstos se los llama *divisores propios*.

Si los *sumamos* obtenemos:

$$1 + 2 + 3 = 6$$

Es decir que *si uno suma los divisores propios*, en este caso obtiene *el número de partida*.

Tomemos otro ejemplo; el número 10.

Los divisores propios del 10 (es decir, los que no lo incluyen) son:

[7] Una definición más precisa es la siguiente: "El número natural *d* es un *divisor* del número natural *n*, si existe un número natural *q* tal que: n = d . q".

1, 2 y 5

Si uno los suma:

1 + 2 + 5 = 8

en este caso, la suma de los divisores *no* permite obtener el número original.

Tomemos otro número. Los divisores propios del 12:

1, 2, 3, 4 y 6

Si uno los suma, tiene:

1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16

Otra vez se obtiene un número *distinto* del de partida. La suma de los divisores *no reproduce* el número original.

Cabe entonces preguntarse si es el 6 el único ejemplo, o si hay otros. A los números que, como el 6, cumplen con la propiedad de que la suma de sus divisores propios reproduce el número original, se los llama *perfectos*.

El número 6 que encontramos, ¿habrá sido una casualidad? ¿Será el único? (Invito al lector a seguir *probando* solo. Busque otros números perfectos.)

Analicemos ahora el número 28. El 28 tiene como divisores (excluyéndolo a él mismo) a

1, 2, 4, 7, 14

Y la suma da:

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

Luego, el 28 ¡es un número perfecto!

Por fortuna, entonces, el 6 no es el único. En todo caso, es el primer número perfecto entre los naturales. Ya sabemos que hay otro más: el 28, entre ellos.

Lo invito a descubrir que ningún número entre 6 y 28 es perfecto. Es decir, el número 28 es el *segundo* número perfecto.

Acá aparecen algunas preguntas que son naturales:

- ¿Habrá un tercero?
- Si lo hay, ¿cuál es?
- ¿Cuántos números perfectos hay?
- ¿Hay alguna manera de encontrar *todos* los números perfectos?

Ahora, algunas respuestas. Y digo *algunas* no sólo porque en este texto no cabrían todas (ni mucho menos), sino porque hay algunas respuestas que aún no se conocen.

Avancemos un poco más.

El número 496 tiene como *divisores propios* a

1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 y 248

Luego, si uno los suma, obtiene:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$$

Hemos descubierto otro número perfecto: ¡el 496!

Un par de cosas más. Se sabe (y usted puede confirmarlo haciendo las cuentas pertinentes) que entre el 28 y el 496 no hay ningún otro número perfecto. Es decir que el 496 es el tercer número perfecto que aparece. Eso sí: hay que "caminar" bastante, para encontrar el cuarto... El número 8.128 es *perfecto* también. Las comprobaciones no son difíciles de hacer pero hace falta tener paciencia y una calculadora a mano.

$$8.128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254$$
$$+ 508 + 1.016 + 2.032 + 4.064$$

Hasta acá sabemos, entonces, que los primeros números perfectos son 6, 28, 496 y 8.128.

Otros datos interesantes:

a) un manuscrito del año 1456 (¡!) determinó que el 33.550.336 es el *quinto* número perfecto.
b) Hasta hoy, octubre de 2006, no se conocen números perfectos que sean *impares*.
c) El número perfecto *más grande* que se conoce es: $2^{32582657} . (2^{32582657} - 1)$

Los griegos estuvieron siempre preocupados y dedicados a *descubrir* números perfectos, y también escribieron mucho sobre ellos. En el último volumen del libro *Elementos*, de Euclides (el más leído después de la Biblia), se encuentra la siguiente afirmación:

Si n es un número *entero positivo* y $(2^n - 1)$ es primo, entonces el número

$$2^{(n-1)} . (2^n – 1)*$$

es perfecto.

Por ejemplo:

Para *n* = 2, se obtiene:

$$2^{(2-1)} . (2^2 – 1) = 2 . 3 = 6$$

Para n = 3, se obtiene:

$$2^{(3-1)} . (2^3 – 1) = 4 . 7 = 28$$

Para n = 5, se obtiene:

$$2^{(5-1)} . (2^5 – 1) = 496$$

Esto es muy interesante, porque quiere decir que Euclides encontró una manera de *descubrir* los números *perfectos*.

Para *n* = 7, se obtiene:

$$2^{(7-1)} . (2^7 – 1) = 64 . 127 = 8.128$$

Uno siente la tentación de probar ahora con el próximo *primo*, el que le sigue a 7. Es decir, la tentación de intentarlo para *n* = 11:

$$2^{(11-1)} . (2^{11} – 1) = 2.096.128$$

Y este número *no es perfecto.*

* Uno de los matemáticos más grandes de la historia, el suizo Leonhard Euler (1707-1783), demostró que *todos los números perfectos pares* son los de esta forma.

El problema radica en que el número ($2^{11} - 1$) = 2.047 ¡no es primo!

En realidad, 2.047 = 89 . 23.

Luego, el hecho que 2.096.128 *no sea perfecto* no vulnera lo que había dicho Euclides. Sin embargo, vale la pena seguir un poco más.

Si uno aplica la fórmula *al siguiente primo*, o sea, *el número 13*, se obtiene:

$$2^{(13-1)} \cdot (2^{13} - 1) = 33.550.336$$

y este número sí es perfecto.

Marin Mersenne es un matemático francés que probó en 1644 que los primeros trece números perfectos son de la forma que acabamos de ver para

$$n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127 \text{ y } 157$$

En resumen:

a) Los *primeros números perfectos* son:
6, 28, 496, 8.128, 33.550.336, 8.589.869.056, 137.438.691.328, 2.305.843.008.139.952.128
Con la ayuda de computadoras, se encontraron números perfectos para los siguientes *n*: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1.279, 2.203, 2.281, 3.217, 4.253, 4.423, 9.689, 9.941, 11.213, 19.937, 21.701, 23.209, 44.497, 86.243, 110.503, 132.049, 216.091, 756.839, 859.433, 1.257.787 y 1.398.269.

b) Dado cualquier número *n*, si $(2^n - 1)$ es primo, entonces el número $2^{(n-1)} \cdot (2^n - 1)$ es perfecto.

c) La fórmula anterior provee todos los números perfectos *pares*.

d) Hasta hoy no se conocen números perfectos *impares*. ¿Habrá?
Se han probado con *todos* los números hasta 10^{300}, es decir, un 1 con trescientos ceros después, y no se encontró ningún número perfecto impar. Se duda de que existan, pero aún no hay una demostración.

e) ¿Habrá infinitos números perfectos?
La bibliografía en este tema es amplísima. Este capítulo sólo estuvo dedicado a la presentación en sociedad de los números perfectos. Y para mostrar que la matemática tiene aún muchísimos problemas abiertos. Éste es sólo uno de ellos.

La vida en el infinito. Serie geométrica y armónica

¿Es posible sumar "infinitos" números positivos y que el resultado sea un número (no infinito)? Naturalmente, la primera reacción es decir: "No. No se puede. Si uno pudiera sumar infinitos números positivos, el resultado crecería constantemente y, por lo tanto, si siguiera sumando números indefinidamente *debería 'llegar' a infinito*".

Por supuesto, hay algunos aspectos de esta frase que son ciertos. Es decir, si uno empieza a sumar números positivos, a medida que agregue más y más, el número obtenido será cada vez más grande. Eso es cierto. Ahora bien, lo que intento poner en duda es: ¿qué quiero decir con "si siguiera sumando números indefinidamente *debería 'llegar' a infinito*"?

Ya hemos visto en *Matemática… ¿Estás ahí?* (p. 89) que la "suma infinita" de las inversas de las potencias de 2 da como resultado el número 2. Esa "suma infinita" es la suma de la serie geométrica, de razón (1/2), por la que se obtiene el número 2. Ahora, ¿qué pasaría si uno hiciera cada una de estas sumas "en forma parcial"?

Supongamos que uno va "sumando *de a poco*". Empieza con un solo término, luego suma dos, luego tres, luego cuatro, luego cinco… etcétera. Obviamente, cada una de estas sumas producirá un número, que llamaré S_n. Es decir, llamaré S_1 cuando sume un solo número; S_2 cuando sume dos; S_3 cuando sume tres, y así sucesivamente hasta *producir* una tabla como la que sigue:

$S_1 = 1$
$S_2 = 1 + 1/2 = 1{,}5$
$S_3 = 1 + 1/2 + 1/3 = 1{,}833333…$
$S_4 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 = 2{,}08333333…$
$S_5 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 = 2{,}2833333…$
$S_6 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 = 2{,}45$
$S_7 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 = 2{,}59285714285714…$
$S_8 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 = 2{,}71785714285714…$

Es decir que a medida que vamos agregando más números, los valores de S_n se hacen cada vez más grandes. La pregunta es: estos números S_n ¿crecen indefinidamente? ¿Se hacen tan grandes como uno quiera?

En el ejemplo que presenté en *Matemática… ¿Estás ahí?* vimos que al sumar parcialmente los términos, las sumas eran cada vez mayores, pero *nunca superaban el número 2*. Ahí mostré también otra sucesión (la de la suma de las inversas de las potencias de 2):

$A_0 = 1 = 1 = 2 – 1$
$A_1 = 1 + 1/2 = 3/2 = 2 – 1/2$
$A_2 = 1 + 1/2 + 1/4 = 7/4 = 2 – 1/4$
$A_3 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 15/8 = 2 – 1/8$
$A_4 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 31/16 = 2 – 1/16$
$A_5 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 = 63/32 = 2 – 1/32$
$A_6 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 = 127/64 = 2 – 1/64$

Como puede ver, si bien los elementos de esta sucesión A_n son cada vez más grandes a medida que crece el subíndice *n*, ninguno de ellos superará la barrera del número 2. Es decir que a medida que el subíndice *n* es cada vez más grande, el *valor correspondiente de* A_n *es también mayor*. Esto se indica (en la jerga matemática) diciendo que la sucesión A_n es una sucesión *estrictamente creciente*. Concluimos entonces: crece, sí, pero *está acotada por el número 2*.

En el ejemplo que analizamos ahora, las sumas son cada vez mayores también, pero lo que no queda claro es si hay una *barrera o límite* (como antes sucedía con el número 2) que no puedan superar. Hemos construido entonces lo que se llama una *sucesión* (S_n) de números reales, de manera tal que a medida que el subíndice *n* crece, el valor de S_n también lo hace. La pregunta es si los números S_n crecen indefinidamente.

Pensémoslo de la siguiente manera: si *no* crecieran indefinidamente querría decir que hay alguna *pared* que no podrán superar. No importa cuán grande sea el subíndice *n*, habría una barrera que no podría atravesar. (Por ejemplo, en el caso de la suma de las inversas de las potencias de 2, vimos que el *número 2* es una pared que no se puede “atravesar” por más que el subíndice sea tan grande como uno quiera.)

Miremos algunos términos de la sucesión:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 1/2$$
$$S_4 = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4)$$

Puse entre paréntesis los últimos dos sumandos a propósito, porque si uno *mira lo que quedó entre paréntesis,* el número:

$$1/3 > 1/4$$

Luego:

$$(1/3 + 1/4) > (1/4 + 1/4) = 2/4 = 1/2 \ ^{(*)}$$

Acabamos de mostrar entonces que

$$S_4 > 1 + 1/2 + 1/2 = 1 + 2 \ . \ (1/2) \ ^{(**)}$$

Miremos ahora lo que pasa con S_8:

$$S_8 = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8)$$

A propósito, volví a poner entre paréntesis algunos sumandos, para que hagamos juntos algunas consideraciones. El primer paréntesis (1/3 + 1/4), ya vimos en (*) que es *mayor* que (1/2). Ahora, miremos el segundo paréntesis:

$$(1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8)$$

Como:

$$1/5 > 1/8$$
$$1/6 > 1/8$$
$$1/7 > 1/8$$

Entonces:

$$(1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) > (1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8)$$

Es decir:

$$(1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) > 4 \text{ veces } (1/8)$$
$$= 4. (1/8) = 1/2$$

Hemos descubierto que el segundo paréntesis es también mayor que (1/2). Y éste es un punto importante, porque con estos datos sabemos ahora que

$$S_8 = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8)$$
$$> 1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 = 1 + 3\ (1/2) \quad ^{(***)}$$

De la misma forma, ahora miremos el término S_{16}

$$S_{16} = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) +$$
$$(1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16) \ ^{(****)}$$

Una vez más –como hice más arriba– agrupé entre paréntesis algunos términos. En este caso, la diferencia con S_8 es que ahora se agregaron los últimos *ocho sumandos que figuran dentro del tercer paréntesis.* Lo interesante aquí es notar que:

$$(1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16) >$$
$$(1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16 + 1/16) =$$
$$= (8 \text{ veces el número } 1/16) = 8 \,.\, (1/16) = 1/2$$

Es decir, "mirando" el renglón (****) podemos concluir que

$$S_{16} = 1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) +$$
$$(1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16) >$$
$$1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + 1/2 = 1 + 4 \,.\, (1/2)$$

Resumo lo que hemos visto hasta aquí, y lo invito a pensar conmigo qué conclusiones podríamos sacar:

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + 1/2$$
$$S_4 > 1 + 2 \,.\, (1/2)$$
$$S_8 > 1 + 3 \,.\, (1/2)$$
$$S_{16} > 1 + 4 \,.\, (1/2)$$

Si uno siguiera con este procedimiento, descubriría, por ejemplo, que

$$S_{32} > 1 + 5 \,.\, (1/2)$$
$$S_{64} > 1 + 6 \,.\, (1/2)$$
$$S_{128} > 1 + 7 \,.\, (1/2)$$

Quiere decir: a medida que crece el subíndice *n* en S_n, la sucesión S_n es cada vez más grande que la sucesión (1 + n . (1/2)).

En realidad, la desigualdad que uno debe escribir es:

$$S(_2{}^n) > (1 + n \,.\, (1/2)) \qquad (1)$$

Luego, como la sucesión en el término de la derecha de (1) *tiende a infinito*, es decir, se hace arbitrariamente grande, y la sucesión S_n es más grande aún, entonces se concluye que la sucesión S_n *también tiende a infinito*. En otras palabras, si una sucesión de números es mayor, término a término, que otra, y ésta *tiende a infinito*, entonces la primera, con más razón, tiende a infinito.

En conclusión, si uno *pudiera sumar indefinidamente*

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \dots + 1/n + 1/(n+1) + \dots$$

esta suma *tenderá a infinito* o, lo que es lo mismo, *superará cualquier barrera que le pongamos*.

A la serie S_n se la conoce con el nombre de *serie armónica*.

NOTAS ADICIONALES:

a) Si bien la serie armónica *diverge* (o sea, tiende a infinito), hay que sumar 83 términos para que supere la barrera del 5. Dicho de otra manera, recién:

$$S_{83} > 5$$

b) Además, hay que sumar 227 términos para superar el número 6.

c) Recién el término:

$$S_{12367} > 10$$

d) Y hay que sumar 250 millones de términos para superar el número 20.

e) En 1689 apareció en el "Tratado en series infinitas", de Jakob Bernoulli, la primera demostración de que la serie armónica era divergente. Este texto fue reimpreso en 1713. Hay una réplica del original en la biblioteca de la Universidad del estado de Ohio (Estados Unidos). Si bien Jakob escribió que la prueba se la debía a su hermano Johann Bernoulli, en realidad la primera demostración apareció publicada alrededor de 1350, cuando la matemática Nicole Oresme (1323-1382), en un libro titulado *Cuestiones sobre la geometría de Euclides*, escribió la demostración más clásica de este hecho, que es la que se usa hoy. La otra demostración se debe al matemático italiano Pietro Mengoli (1625-1686), quien en 1647 se adelantó a la demostración de Bernoulli unos cuarenta años.

Primos en progresión aritmética

Supongamos que escribo esta sucesión de números (al menos, los primeros términos):

{1, 2, 3, 4, 5, …, 10, 11, 12, … }
{1, 3, 5, 7, 9, 11, …, 23, 25, 27, 29, …}
{2, 4, 6, 8, 10, 12, …, 124, 126, 128, …}
{7, 10, 13, 16, 19, 22, …, 43, 46, 49, …}
{7, 17, 27, 37, 47, …, 107, 117, 127, …}
{5, 16, 27, 38, 49, …, 126, 137, 148, 159, …}

Le propongo que descubra cómo seguir en cada caso. Hágalo sola/o porque es mucho más entretenido que leer la solución.

De todas formas, la primera sucesión es trivial, porque es la sucesión de *todos* los números naturales. Cada término se obtiene del anterior *sumando 1*.

{1, 2, 3, 4, 5, …, 10, 11, 12, … }

La segunda son los impares, y cada término se obtiene *sumando 2* al anterior. Claro: uno empieza con el número 1, pero esto no es necesario. Podríamos haber comenzado en cualquier número.

{1, 3, 5, 7, 9, 11, …, 23, 25, 27, 29, …}

De hecho, la tercera sucesión:

{2, 4, 6, 8, 10, 12, …, 124, 126, 128, …}

cumple con la misma regla: cada término se obtiene del anterior, *sumando 2*.

En la siguiente sucesión:

{7, 10, 13, 16, 19, 22, …, 43, 46, 49, …}

cada término se obtiene del anterior *sumando 3*. Importa también decir en qué número uno empieza: en este caso, en el *7*.

La que aparece después:

{7, 17, 27, 37, 47, …, 107, 117, 127, …}

tiene la particularidad de que cada término se obtiene del anterior *sumando 10*, y también, como en la anterior, el primer término es 7.

En la última sucesión:

{5, 16, 27, 38, 49, …, 126, 137, 148, 159, …}

cada término se obtiene del anterior *sumando 11*, y el primer término es 5.

Todas estas sucesiones tienen muchas cosas en común, pero la más importante, la que las *define*, es que, sabiendo cuál es el primer término y cuál es el número que hay que sumarle (llamado la *razón*), el resto es fácil de deducir.

Estas sucesiones se dice que cumplen *una progresión aritmética*.

{1, 2, 3, 4, 5, …, 10, 11, 12, … }: el primer término es 1 y la razón es 1.
{1, 3, 5, 7, 9, 11, …, 23, 25, 27, 29, …}: el primer término es 1 y la razón es 2.
{2, 4, 6, 8, 10, 12, …, 124, 126, 128, …}: el primer término es 2 y la razón es 2.
{7, 10, 13, 16, 19, 22, …, 43, 46, 49, …}: el primer término es 7 y la razón es 3.
{7, 17, 27, 37, 47, …, 107, 117, 127, …}: el primer término es 7 y la razón es 10.
{5, 16, 27, 38, 49, …, 126, 137, 148, 159, …}: el primer término es 5 y la razón es 11.

Obviamente, usted puede agregar los ejemplos que quiera, pero creo que los que di son suficientes. Dicho esto, le voy a plantear un problema que tuvo (y aún tiene) a los especialistas en Teoría de Números ocupados durante muchísimos años.

Mire este ejemplo:

{5, 17, 29, 41, 53}

Esta sucesión,[8] a diferencia de las anteriores, *termina*. Tiene sólo *cinco términos*. Sin embargo, podemos decir que el primero es 5 y que la razón es 12. Termina ahí porque otra particularidad que tiene es que ¡son todos primos! El próximo número que deberíamos poner es… 65, pero el problema es que 65 *no es primo* (65 = 13 . 5). Luego, si queremos pedir que la sucesión esté compuesta sólo por números primos, *tiene* que parar ahí, porque el número que debería seguir ya no es primo.

Busquemos otra:

{199, 409, 619, 829, 1.039, 1.249, 1.459, 1.669, 1.879, 2.089}

Ésta es una sucesión que tiene como primer término a 199, y como razón 210. Como antes, todos los números que figuran en esta sucesión son primos. Está compuesta por sólo *diez términos*, porque el siguiente, 2.299, ¡no es primo! (2.299 = 209 . 11).

Como podrá advertir, entonces, uno está a la búsqueda de sucesiones en *progresión aritmética* de manera tal que todos los términos sean números primos.

[8] En realidad, estoy haciendo abuso de la palabra *sucesión* porque al principio de esta sección las sucesiones "no terminaban" y ahora sí. Pero creo que la idea general se entiende. Los números {5, 17, 29, 41, 53} conforman el *principio* de una sucesión, que tiene (obviamente) *muchas* maneras de continuar. Por ejemplo, podría seguir así: {5, 17, 29, 41, 53, 65, 77, 89, 101, 113, 125, …}, donde cada término resulta de sumar 12 al anterior, y uno empieza con el 5. Dicho de otra manera, es la sucesión que empieza en 5 y que tiene razón 12.

Pero también, podríamos continuarla así: {5, 17, 29, 41, 53, 5, 17, 29, 41, 53, 5, 17, 29, 41, 53, 5, 17, …}. Es decir, podría ser la sucesión que repite constantemente sus *cinco primeros términos*. De hecho, no hay una *única manera* de continuar una sucesión cuando se conocen sólo algunos términos: hay infinitas. Por eso, me imagino que usted podría agregar muchísimas más.

Como vimos más arriba, hay una sucesión de *cinco* primos en progresión aritmética, y otra sucesión de *diez* primos también en progresión aritmética.

Hasta hoy (noviembre de 2006), la sucesión más larga de primos en progresión aritmética que se conoce es de veintidós (22) términos. En realidad, se encontraron *dos de estas sucesiones*. La primera, es la que empieza en el número:

11.410.337.850.553

Es decir que este último es el primer término, y la *razón es:*

4.609.098.694.200

La otra, tiene como primer término a

376.859.931.192.959

Y la razón es:

18.549.279.769.020

La pregunta que tuvo ocupados a los especialistas en el tema durante muchos años fue si existen sucesiones de primos en progresión aritmética de cualquier longitud. Hasta 2004 la pregunta no tenía respuesta, y debería decir que aún hoy no la tiene, pero señalo la particularidad de que en el trabajo conjunto publicado en 2004, Green y Tao usaron un resultado que todavía no tiene la certificación de los árbitros que lo evalúan, y que permitiría probar que *sí* existen progresiones aritméticas de primos de cualquier longitud. Sin embargo, hasta ahora, las de mayor "largo" que se conocen son las dos que escribí más arriba, de veintidós (22) términos cada una.

Luces encendidas, luces apagadas y modelos

¿Qué quiere decir *modelar*? Sí, ya sé: hacer un modelo. Pero, ¿cómo se puede aplicar la matemática para resolver un problema práctico? Es decir: uno tiene un problema cualquiera, se sienta a pensarlo y no se le ocurre cómo atacarlo. Algunas veces uno es capaz de convertirlo en algo que sea más sencillo, que sirva para transformarlo en algo con lo que se sienta más cómodo para trabajar; quizás en eso resida la vuelta para dar con la solución.

Supongamos que uno tiene un tablero con cierta cantidad de lámparas. Cada lámpara tiene una ubicación *numerada* en el tablero. Además, cada lámpara puede estar encendida o apagada. La pregunta es: ¿de cuántas maneras diferentes pueden estar encendidas o apagadas las luces? Es decir, ¿cuántas configuraciones distintas puede tener el tablero?

Si el tablero consistiera de una sola lámpara, entonces, hay dos configuraciones posibles: o bien la luz está encendida, o está apagada. Y aquí empieza la *modelación*, es decir, quiero empezar a construir un *modelo*, algo que nos ayude a pensar el problema más fácilmente.

Marquemos con un 0 si la única luz está apagada y con un 1 si está encendida:

Apagada	0
Encendida	1

Si uno tiene dos luces en el tablero, numeradas, entonces, ¿cuántas configuraciones posibles hay?

Apagada-Apagada	o sea, 00
Apagada-Encendida	o sea, 01
Encendida-Apagada	o sea, 10
Encendida-Encendida	o sea, 11

Luego, se tienen *cuatro* posibles configuraciones:

00, 01, 10 y 11

Si ahora tuviéramos *tres luces numeradas* en el tablero, tendríamos:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110 y 111 (*)

donde cada número 0 indica que la luz correspondiente está apagada y cada número 1, que está encendida.

Por lo tanto, se tienen *ocho configuraciones posibles.*

En resumen:

1 luz	$2 = 2^1$ configuraciones
2 luces	$4 = 2^2$ configuraciones
3 luces	$8 = 2^3$ configuraciones

Antes de avanzar, lo invito a pensar qué pasa cuando uno tiene *cuatro* lámparas numeradas en el tablero. En lugar de *escribir* la solución, lo que pretendo es pensar una manera de avanzar que nos sirva para *todos* los posibles casos que vengan después. Es decir, poder *contar* cuántas configuraciones posibles se pueden tener, *sin* tener que *listarlas* todas.

Si tuviéramos cuatro lámparas, supongamos que la cuarta está apagada, es decir que tiene un 0 en el último lugar; entonces, ¿qué puede pasar con las configuraciones para las tres primeras? Esa respuesta ya la tenemos, porque son las que figuran en (*). Es decir, que todo lo que habría que hacer sería agregarles un cero al final a las que allí figuran para tener todas las configuraciones para cuatro lámparas, *con la última apagada.*

Se tiene, entonces:

0000, 0010, 0100, 0110, 1000, 1010, 1100 y 1110 (**)

Por otro lado, como ya se habrá imaginado, van a aparecer otras ocho configuraciones, que se obtienen de las que había en (*), pero ahora con la última luz encendida. Es decir que terminan en un 1.

Se tiene, entonces:

0001, 0011, 0101, 0111, 1001, 1011, 1101, 1111 (***)

A propósito, resalté el número **0** y el número **1** para que se aprecie que las primeras configuraciones de las tres lámparas corresponden a las que teníamos en (*), pero, mientras que las primeras *ocho* corresponden a las que terminan en 0, las segundas ocho corresponden a las que terminan en 1.

¿Cuál es la moraleja de todo esto? Que cuando uno tenía tres lámparas, había $2^3 = 8$ configuraciones, y ni bien agregamos *una lámpara más*, hubo que multiplicar por **2** lo que había antes (porque corresponde a agregar un **0** o un **1** al final). Es decir que cuando se tienen cuatro lámparas, el número de configuraciones posibles va a ser el doble de las que había con tres lámparas (como este número era $2^3 = 8$, ahora hay *dos veces esas posibles configuraciones*, o sea: $2^3 + 2^3 = 2 \,.\, 2^3 = 2^4 = 16$).

Creo que ahora se entenderá por qué, si uno tiene un tablero con *cinco lámparas,* tendrá:

$$2 \,.\, 2^4 = 2^5 = 32$$

configuraciones, y así sucesivamente. De modo que, si uno tiene *n* lámparas, el número de configuraciones es 2^n.

Por otro lado, la modelización en ceros y unos nos permite pensar en tiras con estos números, en lugar de tener un tablero con lámparas.

Una aplicación muy interesante (y muy útil)

Para avanzar con el tema de la modelización, voy a mostrar otra manera de usar el problema anterior (de las tiras de ceros y unos).

Supongamos que ahora uno tiene una bolsa con cuatro objetos: un reloj, una calculadora, un libro y una lapicera. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar regalos para hacer? O sea, regalos que consistan en *un solo objeto,* en *dos* objetos, en *tres* objetos o los *cuatro objetos* al mismo tiempo. Si usáramos el modelo que teníamos arriba, con las tiras de *unos* y *ceros,* podríamos darle a cada objeto un número. Digamos:

1 = Reloj
2 = Calculadora
3 = Libro
4 = Lapicera

y pensamos ahora que debajo de cada uno de estos objetos, hay un casillero, en principio, vacío.

1 2 3 4

Si figura un número *uno* en el casillero, eso quiere decir que hemos elegido ese regalo. En cambio, si figura un número cero entonces eso significa que ese regalo no lo hemos elegido.

Por ejemplo, si uno tiene la tira

1010

esto significa, que ha elegido un regalo con dos objetos: el número 1 y el número 3. O sea, el reloj y el libro

La tira

1111

implica que uno ha elegido los cuatro objetos

La tira

0001

indica que uno ha elegido sólo la lapicera. De esta forma, cada tira de éstas, que involucra solamente ceros y unos, representa una manera de elegir los objetos. Usando lo que vimos más arriba con las luces del tablero (encendidas o apagadas), todo lo que tenemos que hacer es *recordar* cuántas de estas tiras hay.

Y ya sabemos que hay $2^4 = 16$.

Claro, habría que excluir la tira “0000” porque esta implicaría *no hacer ninguna elección.*

Pero lo interesante entonces, es que con esta manera de *modelar,* hemos aprendido a *contar* todas las posibles configuraciones para elegir regalos entre cuatro objetos sin tener que hacer una lista de todos los casos. O lo que es lo mismo, cuántos posibles subconjuntos se pueden formar con cuatro elementos.

Esto que acabamos de hacer con cuatro objetos se puede generalizar, obviamente. En ese caso, si uno tuviera diez objetos y quiere saber cuántos posibles subconjuntos se pueden formar, el resultado será $2^{10} = 1.024$ (si uno incluye como subconjunto al vacío, o sea, no elegir ninguno). Si no, el resultado es $2^{10} - 1 = 1.023$.

En general, si uno tiene un conjunto con *n* elementos, y quiere saber cuántos subconjuntos se pueden formar con él, la respuesta es:

$$2^n \text{ subconjuntos,}$$

si uno incluye al subconjunto que es vacío. Si no, la respuesta es:

$$2^n - 1$$

Lo que más importa de este capítulo, es que hemos aprendido a *modelar*, al menos en este caso particular, y además, hemos aprendido a contar subconjuntos de un conjunto finito.

¿Cómo cuenta una computadora? (Números binarios)

Hay diez tipos de personas en el mundo:
aquellos que entienden el sistema binario,
y aquellos que no.
ANÓNIMO

Si una computadora pudiera hablar y uno le pidiera que *contara*, contestaría lo siguiente (lea la lista que sigue y trate de descubrir el *patrón*):

0
1
10
11
100
101
110
111
1000
1001
1010
1011
1100
1101
1110
1111 (*)
10000
10001
10010
10011
10100
10101
10110
10111
11000
11001
11010
11011
11100
11101
11110
11111
100000 ...

La primera observación es que los *únicos* dígitos que la computadora usó son el 0 y el 1. ¿Qué más? Usó el 0 y el 1, pero para poder escribir todos los números tiene que ir incrementando la cantidad de veces que los usa. Tiene que usar cada vez números de *más cifras*. Es decir, los primeros dos números que aparecen en la lista son el 0 y el 1, que se corresponden justamente con el 0 y el 1 que usamos nosotros (en la notación que se llama *decimal,* la que utilizamos todos los días*)*. Pero ni bien la computadora quiere llegar al número 2 –y como sólo puede usar ceros y unos–, necesita dos lugares o dos posiciones o números de dos cifras. Por eso, usa

10 y 11

Éstos corresponden, entonces, al número 2 y al número 3 que nosotros usamos en la notación *decimal*. Ahora se le acabaron las posibilidades con los dos dígitos que puede usar (0 y 1) y las dos cifras, de modo que para poder continuar necesita un tercer lugar, o lo que es equivalente a un número de tres cifras. Por eso, empieza con el 100:

100, 101, 110, 111

Y esto le sirve para el 4, 5, 6 y 7.

Y otra vez se le agotaron las posibilidades. Si quiere llegar hasta el *8,* necesita ampliar las cifras. O sea, necesita usar cuatro lugares. Y por eso recurre al

1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111

Con éstos cubrió el:

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15

¿Se entiende?

Hago un paso más: para alcanzar el 16 necesitará de números de cinco cifras. Por eso, si uno revisa la lista (*), advierte que seguirán:

10000, 10001, 10010, 10011, 10100, 10101, 10110, 10111,
11000, 11001, 11010, 11011, 11100, 11101, 11110 y 11111

¿Qué otros patrones podemos encontrar? Revisemos.

El 0 y el 1 *se representan a sí mismos*, entonces, no hay nada que pensar ahí. Sin embargo, voy escribir un par de cosas más:

a) 10 = 2
b) 100 = 4
c) 1000 = 8
d) 10000 = 16

Si usted sigue con este proceso, descubre que

e) 100000 = 32
f) 1000000 = 64

Es decir que estamos en condiciones de conjeturar que un *uno* seguido de *ceros*, resulta ser *siempre una potencia de 2.*

$1 = 2^0$
$10 = 2^1$
$100 = 2^2$
$1000 = 2^3$
$10000 = 2^4$

$$100000 = 2^5$$
$$1000000 = 2^6$$
$$10000000 = 2^7$$

y así podríamos seguir.

En general, se dice que la numeración utilizada en la lista (*) es la escritura *en números binarios*. Y se llaman así porque sólo aparecen involucrados dos dígitos: el 0 y el 1.

Ahora bien: si pongo un número cualquiera usando nada más que ceros y unos, ¿cómo se hace para saber a qué número en la numeración decimal corresponde?

Aquí me quiero detener en una observación. Cuando uno escribe –en la numeración decimal– el número

$$378$$

está diciendo –en forma abreviada– que hay que sumar

$$300 + 70 + 8$$

De la misma forma, cuando uno escribe

$$34695$$

es como decir que uno ha sumado

$$30000 + 4000 + 600 + 90 + 5$$

Con esta idea en la cabeza, cuando uno escribe un número utilizando la notación binaria, digamos el número

$$11010$$

está indicando que uno suma

$$10000 + 1000 + 10$$

y de acuerdo con lo que vimos recién, esto implica sumar algunas de las potencias de 2. En este caso:

$$
\begin{array}{rl}
 & 10000 = 2^4 = 16 \\
+ & 1000 = 2^3 = 8 \\
+ & 10 = 2^1 = 2
\end{array}
$$

O sea, el número $11010 = 26$ $(= 16 + 8 + 2)$

Otro ejemplo: el número 1010101 resulta de haber escrito en notación *binaria* el número

$$1000000 + 10000 + 100 + 1 =$$
$$(2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0) = 64 + 16 + 4 + 1 = 85$$

Creo que ahora, después de estos ejemplos, está en condiciones de, dado un número en notación binaria, poder determinar qué número en notación decimal representa.

Sólo con el afán de ayudarlo para que esté seguro de lo que está haciendo, agrego algunos ejemplos cuyas soluciones están más abajo.

Determine qué números en notación decimal están representados por los que siguen en notación *binaria*:

a) 11111
b) 10111
c) 100100

d) 101001
e) 100101001
f) 11111111110

Otra pregunta posible es si dado un número cualquiera, siempre se puede escribir en binario. Y si la respuesta es afirmativa, ¿cómo se hace? Es decir, lo mínimo que tendríamos que saber es cómo hacer para escribir cualquier número usando el sistema binario. Lo voy a hacer con algunos ejemplos, y estoy seguro de que después usted podrá deducir la forma *general* de hacerlo. Al menos, si yo estuviera en su lugar, lo *intentaría.* De hecho, antes de seguir leyendo, sería muy útil y mucho más interesante que trate de *descubrir* lo que hay que hacer por sus propios medios.

EJEMPLO 1

Tomemos el número 13. ¿Cómo hacer para *descubrir* su "escritura" en números binarios?

Una posible manera es empezar a dividirlo por 2 y anotar los restos de cada división. Al dividir 13 por el número 2, se obtiene un **6**, y *sobra 1.*

Es decir:

$$13 = 6 \cdot 2 + \boxed{1} \quad (**)$$

Ahora, seguimos dividiendo el número que obtuvimos como *cociente.* O sea, el número 6. Al dividirlo por 2, se obtiene 3 y no sobra *nada.* O lo que es lo mismo, *sobra 0.*

Es decir:

$$6 = 3 \cdot 2 + \boxed{0} \quad (***)$$

Ahora, dividimos otra vez *por 2* al *cociente* que obtuvimos, o sea, el número 3, y se tiene:

$$3 = 1 \cdot 2 + \boxed{1} \quad (****)$$

Por último, dividimos otra vez *por 2* al *cociente* que obtuvimos, que es el número 1. Y se tiene:

$$1 = 0 \cdot 2 + \boxed{1} \quad (*****)$$

Luego, desandando el camino, y recorriendo para atrás los *restos* que obtuvimos (los números que aparecen *recuadrados*), se tiene:

$$1101$$

Es decir: fui para atrás, marcando cada uno de los restos obtenidos, empezando del último hasta terminar en el primero. Así queda escrito un número en notación *binaria.*

Lo invito a comprobar que justamente ese número, el 1101, es el 13 que buscábamos.

EJEMPLO 2

¿Cómo escribir en notación *binaria* el número 513?

Una vez más, empiece a dividir por 2, anote los cocientes por un lado y los restos por otro. A los cocientes obtenidos los sigue dividendo por 2, y vamos a utilizar los restos cuando recorramos para arriba la lista y descubramos el número que buscamos.

Las cuentas, entonces, son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
513 &= 256 \,.\, 2 + \boxed{1} \\
256 &= 128 \,.\, 2 + \boxed{0} \\
128 &= 64 \,.\, 2 + \boxed{0} \\
64 &= 32 \,.\, 2 + \boxed{0} \\
32 &= 16 \,.\, 2 + \boxed{0} \\
16 &= 8 \,.\, 2 + \boxed{0} \\
8 &= 4 \,.\, 2 + \boxed{0} \\
4 &= 2 \,.\, 2 + \boxed{0} \\
2 &= 1 \,.\, 2 + \boxed{0} \\
1 &= 0 \,.\, 2 + \boxed{1}
\end{aligned}
$$

Luego, el número que buscamos (la escritura binaria de 513) se obtiene recorriendo hacia arriba los restos que encontramos:

1000000001

EJEMPLO 3

Encontremos la escritura en números *binarios* del número 173. (Elijo números relativamente chicos, para que las cuentas no sean tan largas.)

$$
\begin{aligned}
173 &= 86 \,.\, 2 + \boxed{1} \\
86 &= 43 \,.\, 2 + \boxed{0} \\
43 &= 21 \,.\, 2 + \boxed{1} \\
21 &= 10 \,.\, 2 + \boxed{1} \\
10 &= 5 \,.\, 2 + \boxed{0} \\
5 &= 2 \,.\, 2 + \boxed{1} \\
2 &= 1 \,.\, 2 + \boxed{0} \\
1 &= 0 \,.\, 2 + \boxed{1}
\end{aligned}
$$

Una vez más, para encontrar lo que buscamos, recorremos los restos *de abajo hacia arriba* y construimos el siguiente número binario:

10101101

Ahora creo que está en condiciones de encontrar la escritura binaria de cualquier número. No sólo eso: está en condiciones de afirmar que *siempre* la va a encontrar usando este método. Por lo tanto, estamos en condiciones de decir que *todo* número escrito en forma decimal, admite una *única* escritura en notación binaria. Y viceversa: cualquier número escrito en notación binaria admite una única escritura en notación decimal. Esto permite concluir, entonces, que las computadoras pueden sentirse libres de usar los números binarios tanto como quieran. No encontrarán ninguna dificultad, salvo la longitud o, si ustedes prefieren, la tira de combinaciones de ceros y unos que hacen falta para escribir un número relativamente pequeño.

Una pregunta que uno debería hacerse a esta altura es por qué las computadoras están *restringidas* a usar sólo *ceros* y *unos*.

Las computadoras funcionan como si uno estuviera ante una *barrera* que sube o baja para dejar pasar un auto. Depende de si el tren está por venir o no. Si la barrera está baja, uno no puede pasar. Si está levantada, entonces sí. Esto corresponde a impulsos eléctricos. O bien la barrera está *baja,* en cuyo caso lo representamos con un *cero* (porque no se puede pasar), o bien la barrera está *levantada,* en cuyo caso lo representamos con un *uno*. Luego, como los circuitos de los que están armadas las computadoras o bien dejan pasar la electricidad o *no* la dejan pasar, eso se indica (a trazos gruesos, por supuesto) con combinaciones de *unos* y *ceros*.

SOLUCIÓN:

Las respuestas son:

a) 31
b) 23
c) 36
d) 41
e) 297
f) 2.046

Probabilidades, estimaciones, combinaciones y contradicciones

... la lógica irreprochable de un niño que se negaba a aprender la letra "a" porque sabía que después vendrían la "b", la "c", la "z" y "toda la gramática y la literatura francesa".

SIMONE DE BEAUVOIR

La prueba que no se puede tomar

Pensemos juntos esta situación. Un profesor de colegio secundario (pobres... ellos reciben todos los "palos"...) anuncia a los estudiantes que tomará una prueba "sorpresa" la semana siguiente. Los alumnos cursan un ciclo de doble escolaridad, es decir que concurren a clases a la mañana y a la tarde.

El profesor les dice que la prueba la podrá tomar cualquier día, exactamente a la una de la tarde. Eso sí: ellos se enterarían el mismo día de la prueba, a las ocho de la mañana, ni antes ni después. Y las reglas serán estrictas, en el sentido de que él garantizaba su cumplimiento.

El viernes previo a la semana en cuestión, el profesor anuncia que la prueba se tomará sí o sí. Veamos ahora el siguiente razonamiento que hicieron los alumnos.

Uno dijo:

–El viernes no la puede tomar.

–¿Por qué? –preguntó otro.

–¡Fácil! –retomó el primero en hablar–. Si llegamos hasta el día jueves y no la tomó, eso quiere decir que nosotros sabríamos el *mismo jueves* que la prueba será al día siguiente, ya que no le queda otra. Pero en ese caso, el profesor violaría su propia regla, ya que dijo que nos enteraríamos el mismo día de la prueba a las ocho de la mañana. Si no la tomó hasta el jueves, ese día nosotros sabríamos que será el viernes. Y eso no puede pasar –terminó contundente.

–No, pero esperá –saltó otro–. Entonces, el jueves *tampoco* la puede tomar –dijo entusiasmado y entusiasmando a los otros–. Fíjense por qué: como nosotros ya sabríamos que el viernes no la puede tomar (si no la tomó el jueves), entonces, si no la toma el miércoles, sabríamos ese día (el miércoles) que el jueves tiene que tomar la prueba. Pero eso volvería a violar sus propias reglas. Es decir, nosotros sabríamos el miércoles a la mañana, que si la prueba no la tomó ese día, la tendría que tomar el jueves porque el viernes no puede. Y es un lío para él, porque se dan cuenta que, así siguiendo, podemos demostrar ahora que el miércoles no la puede tomar tampoco, ya que si el martes no la tomó, como no puede hacernos rendir ni el jueves ni el viernes, tendría que ser el miércoles.

El proceso puede continuar hacia atrás, de manera tal de llegar a concluir que la prueba no se puede tomar nunca. O mejor dicho, ¡no se puede tomar ningún día de esa semana! Al menos, no se puede tomar en las condiciones que propuso el docente.

La historia termina acá. La paradoja continúa abierta. Existe mucha discusión sobre ella y hay estudios en varios sentidos, sin que exista un consenso mayoritario sobre cuál es en realidad el problema principal.

Ciertamente, los profesores toman pruebas “sorpresa”, de manera que hay algo que no funciona. Esas reglas que puso el docente son *incumplibles*. O bien el profesor tiene que revisarlas y admitir que los alumnos puedan enterarse el día anterior que la prueba será tomada, o bien el carácter *sorpresivo* será un poco más discutible.

Probabilidad de ganar el campeonato mundial para un equipo considerado favorito

Este ejemplo de la utilización de la matemática para estimar las posibilidades que tiene un equipo de fútbol –considerado *favorito*– de ganar un mundial lo contó Alicia Dickenstein en ocasión del primer festival "Buenos Aires Piensa", en una charla que dio en el Teatro San Martín de la Ciudad de Buenos Aires. Por supuesto, le pedí permiso para publicarlo y acá está. Pero ella me advirtió que el ejemplo se lo había sugerido Roberto Miatello, un excelente matemático argentino, profesor en la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF) de la Universidad Nacional de Córdoba.

Lo atractivo del ejemplo es que no se pretende calcular la probabilidad de que un equipo cualquiera gane, sino la probabilidad de que gane un equipo que sea considerado *el favorito para hacerlo*, como si fuera Brasil o la Argentina, por poner un par de ejemplos.

Supongamos que uno de esos equipos llegó a los octavos de final del torneo. Es decir, quedan 16 equipos que juegan entre sí por el sistema de eliminación simple (o sea, el que pierde queda eliminado, y el ganador sigue en la competencia). Como se advierte, entonces, para que ese equipo salga campeón tiene que ganar cuatro partidos seguidos: octavos de final, cuartos de final, semifinal y la final.

Supongamos, por simplicidad, que este favorito tiene el 66 por ciento de posibilidades de ganar partidos *contra cualquier equipo que juegue*, independientemente de otros factores, como la moral del grupo, los resultados anteriores en el campeonato, etcétera. Es decir, los expertos le adjudican una posibilidad de ganar *dos de cada tres partidos que juegue contra cualquier otro* *equipo*. Puesto en otros términos, es equivalente a decir que la *probabilidad* de que le gane a cualquier equipo es de 2/3.

Computemos ahora, sabiendo estos datos, cuál es la probabilidad de que gane los cuatro partidos seguidos y se corone campeón. Para calcular esta probabilidad, se multiplica el número 2/3 en cada paso. Es decir:

a) La probabilidad de que gane el primer partido ya sabemos que es:

$$2/3$$

b) La probabilidad de que gane los *dos* primeros es:

$$(2/3) . (2/3) = (2/3)^2 = 4/9 \ (*)$$

c) La probabilidad de que gane *tres partidos seguidos* es:

$$(2/3) . (2/3) . (2/3) = (2/3)^3 = 8/27$$

Y finalmente:

d) La probabilidad de que gane los *cuatro partidos consecutivos y se corone campeón* es :

$$(2/3) . (2/3) . (2/3) . (2/3) = (2/3)^4 = 16/81 = 0{,}1975 < 0{,}20$$

Quiere decir que las posibilidades de que un equipo de estas características se corone campeón son *menores al 20 por ciento.*

Eso es lo curioso, y merece una interpretación.

El hecho de que un equipo sea doblemente mejor que cualquier otro es obviamente preferible. Eso no se discute. Pero todo lo que se puede decir, cuando faltan cuatro partidos, es que tiene menos del 20 por ciento de posibilidades de conseguirlo. ¿No es sorprendente?

Un paso más. En este ejemplo, usé el número 2/3 para mostrar cómo disminuye la probabilidad a medida que uno avanza en el torneo, aunque un equipo sea muy bueno. Con todo, el número 2/3 se puede reemplazar por cualquier otro que uno crea que se ajuste mejor, y seguir con el mismo cálculo.

De hecho, si la probabilidad de un equipo favorito fuera 3/4 (un altísimo 75 por ciento) de ganar cualquier partido, entonces su probabilidad para salir campeón se calcula:

$$(3/4)^4 = 81/256 = 0{,}3164\ldots$$

O sea, apenas *ligeramente mayor que el 30 por ciento.*

Herencia con infinitas monedas

Desafiar la intuición, ése tendría que ser el título de este capítulo. Todos tenemos ciertas ideas sobre las cosas: opiniones, juicios formados. Eso, en principio, tranquiliza, porque nos evita la ansiedad de enfrentar lo desconocido. Por supuesto, uno querría *extrapolar* los conocimientos que tiene –muchos o pocos– y utilizarlos en todas las situaciones en las que podamos encontrarnos. Pero es algo claramente imposible. Sin embargo, hay ciertos momentos en los que tenemos confianza en que lo que intuimos está bien. A veces funciona. Otras veces, no.

Le propongo pensar el siguiente ejemplo (ficticio, claro), que involucra conjuntos *infinitos*.[9] Aquí va: un señor tenía dos hijos.

[9] Este problema me lo contó Cristian Czubara, ex alumno mío en 1996, hoy uno de mis grandes amigos y además docente de la Facultad de Ciencias Exac-

Era una persona muy rica… tan rica, que su capital era *infinito*. Como sabía que estaba por morirse, convoca a sus hijos y antes de retirarse de este mundo les dice: "Yo los quiero a los dos por igual. No tengo otros herederos más que ustedes, de modo que les voy a dejar mi herencia en monedas de un peso". (Es decir que les dejaba *infinitas* monedas de un peso.) "Eso sí, quiero que hagan una *repartición justa* de la herencia. Aspiro a que ninguno de los dos trate de sacar ventaja sobre el otro". Y murió.

Llamemos a los hijos A y B para fijar las ideas. Los dos, después de pasar por un lógico período de duelo, deciden sentarse a pensar en *cómo* repartir la herencia respetando el pedido del padre. Luego de un rato, A dice tener una idea y se la propone a B.

–Hagamos una cosa –dice A–. Numeremos las monedas. Pongámosle 1, 2, 3, 4, 5… etcétera. Una vez hecho esto, te propongo el siguiente procedimiento: vos elegís primero *dos monedas cualesquiera*. Después, me toca a mí. Yo, entonces, elijo *alguna* de las monedas que vos elegiste, y te toca a vos otra vez. Elegís otra vez dos monedas de la herencia, y yo elijo una de las que seleccionaste, y así sucesivamente. Vos vas eligiendo *dos por vez*, y yo me quedo con *una* de las que ya apartaste.

B se queda pensando. Mientras piensa, le propongo que haga lo mismo (antes de mirar o leer la respuesta): ¿es justa la propuesta de A? ¿Es equitativa? ¿Reparte la herencia en cantidades iguales? ¿Respeta la voluntad del padre?

Como estoy seguro de que le sucede a veces, uno siente la tentación de ir más abajo en la página y leer la solución, pero, en ese caso, se privará de la posibilidad de desafiarse a sí mismo. Nadie lo mira. Nadie lo controla. Y de paso, uno *desafía la intuición*.

---

tas y Naturales de la UBA. Me pareció muy interesante y sirve para poner a prueba nuestra capacidad para *pensar en conjuntos infinitos*.

SOLUCIÓN:

Este problema es interesante porque no tiene una solución única. Es decir: no se puede afirmar que la propuesta es *justa ni injusta*. Veamos:

CASO 1. Supongamos que lo que propone A se lleva a cabo de la siguiente manera:

B elige las monedas 1 y 2.
A saca entonces la moneda 2.
B elige las monedas 3 y 4.
A se queda con la 4.
B elige las monedas 5 y 6.
A se queda con la 6.

Creo que está claro el *patrón* que están siguiendo. B elige dos monedas consecutivas, una impar y otra par, y A se *queda* con la moneda *par*.

¿Es justo este proceso? Uno puede decir que sí, porque B se va a quedar con todas las monedas *impares* y A con todas las *pares*. Si ésa va a ser la forma de distribuir la herencia, la voluntad del padre se verá satisfecha y ninguno de los dos sacará ninguna ventaja.

CASO 2. Supongamos que ahora el proceso se lleva a cabo de la siguiente manera:

B elige las monedas 1 y 2.
A elige la moneda 1.

B elige las monedas 3 y 4.
A elige la moneda 2 (que había elegido B en la primera vuelta).
B elige las monedas 5 y 6.
A elige la moneda 3.
B elige las monedas 7 y 8.
A elige la moneda 4...

¿Le parece que la distribución es justa? No siga leyendo; piénselo. Si este proceso continúa, y obviamente debería continuar porque las monedas son infinitas, A se estaría quedando con *todas* las monedas, mientras que a B no le quedaría *nada*. Es decir que esta repartición no es justa ni respeta la voluntad paterna.

Sin embargo, la propuesta original que A le había hecho a su hermano B no está bien ni mal. Depende de la *forma* en que sean elegidas las monedas... y eso desafía la intuición. Lo invito a que piense: si en lugar de tratarse de una herencia infinita, se tratara de una herencia *normal*, como la que podría dejar cualquier persona al morir, la pongan en monedas o no, ¿la distribución que propuso A *está siempre bien*?

CASO 3. Otra propuesta[10] es el siguiente reparto: en cada paso, a A se le permite sacar *cualquier* número (pero *finito*) de monedas, y B elige *sólo una de las que eligió A*. ¿Sería una repartición justa? Lo dejo pensar en soledad.

[10] Esta propuesta me la acercó Juan Sabia, otro gran amigo, matemático, un magnífico escritor de cuentos y docente del departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias de la UBA.

Ahora sí, agrego la solución: No importa qué número de monedas extraiga A,[11] en la medida que B se lleve primero la moneda número 1. En el segundo paso, cuando A vuelva a hacer su selección, B le "sacará" la moneda número 2. Luego A sigue llevándose monedas en forma consecutiva, y cuando termina, B le "saca" la moneda número 3, y así sucesivamente. Como el proceso es infinito, B se quedará con *todas* las monedas de A, independientemente de la cantidad que A se lleve en cada oportunidad que le toca elegir.

Este ejemplo muestra una vez más que los conjuntos infinitos tienen propiedades que atentan contra la intuición. De hecho, la *moraleja* que uno saca de estos ejemplos es que las leyes con las que estamos acostumbrados a pensar con los conjuntos finitos *no necesariamente son aplicables a los conjuntos infinitos*, y por lo tanto hay que aprender a *pensar* distinto y a entrenar la intuición.

Desfile y probabilidad

Muchas veces me sorprendo escuchando o leyendo cosas como éstas:

a) Científicos de la Universidad de Nagoya descubrieron que las personas que se lavan los pies los días pares del mes viven más años.
b) Un experimento en un Instituto de Alaska comprobó que si uno deja la televisión encendida mientras duerme, obtiene trabajo más rápido.

[11] Esto vale mientras sea un número *finito*. La restricción de que sea un número finito es importante porque, si no, A en algún paso se podría llevar todas las monedas.

c) Investigadores de una facultad en los Países Bajos demostraron que si uno toma dos copas de vino *tinto* durante el desayuno, *antes* de beber o ingerir cualquier tipo de productos lácteos, ayuda a disminuir el colesterol y evita la calvicie prematura (además de *emborrachar a quienes beben*, claro).

Ciertamente, buscar relaciones o patrones es estimulante, y además forma parte de la lógica cotidiana de cualquier científico. Pero, también, saltar a conclusiones apresuradamente conlleva un peligro.

Ariel Arbiser, profesor en la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA y generoso colaborador con mi tarea de comunicador científico, me contó la historia que sigue, y que si bien es muy sencilla en apariencia, enseña algo profundo al mismo tiempo. En realidad, el texto apareció en el libro *Problemas y experimentos recreativos* del ruso Yakov Perelman, y exhibe con claridad el peligro de usar la teoría de probabilidades en forma descuidada.

Un profesor de matemática, con pocos años de experiencia, enseña a sus alumnos conceptos elementales de probabilidades. Desde el aula se podía ver a los peatones que pasaban por la calle. Era una avenida importante y muy transitada, y naturalmente pasaban caminando diariamente hombres y mujeres. El profesor se molestaba porque los alumnos se distraían mirando por la ventana todo el tiempo. Entonces, decidió plantear un problema y preguntar a la clase:

–¿Cuál es la probabilidad de que el próximo peatón que pase sea un hombre? –Y continúa:– Lo que quiero decirles es: si hiciéramos este experimento *muchas* veces, ¿cuántas veces uno esperaría que pasase un hombre y cuántas que pasara una mujer?

Por supuesto, debe entenderse que uno apunta al caso general y la respuesta se presume aproximada. Si hace falta la aclaración, supondremos que pueden pasar mujeres y hombres por igual. Es decir, la probabilidad de que pase un hombre o una mujer *es la misma*. La respuesta, entonces, es obvia: la *mitad* de las veces uno espera que pase un hombre. Es decir, la probabilidad (que es siempre un número que está entre 0 y 1) es 1/2.

Los alumnos asienten satisfechos, porque comprenden perfectamente.

El profesor sigue:

–¿Y si quisiera calcular la probabilidad de que los próximos *dos* transeúntes sean *hombres?*

Deja a los estudiantes pensando un ratito y luego dice:

–Como ya sabemos, la probabilidad de que un evento se produzca se calcula dividiendo los casos favorables *sobre* los casos posibles.

En este escenario, los casos *posibles* son:

Hombre-Hombre (H-H, para abreviar)
Hombre-Mujer (H-M)
Mujer-Hombre (M-H)
Mujer-Mujer (M-M)

Por otro lado, el único caso *favorable* es: H-H.

Luego, la probabilidad de que pasen dos hombres es 1/4 (un caso favorable sobre cuatro posibles). Es decir, el 25 por ciento de las veces. Una cuarta parte. En consecuencia, la probabilidad de que no sea así, es decir, de que no sean dos hombres, es de 3/4 (el 75 por ciento).

Los alumnos necesitan pensar un poco por qué es cierto esto último; se detienen, piensan y al final entienden.

Luego de un rato, el profesor sigue:

–¿Y cuál es la probabilidad de que los próximos *tres* transeúntes que pasen sean hombres?

Si uno vuelve a considerar todos los casos posibles, son *ocho*:

H-H-H
H-H-M
H-M-H
H-M-M
M-H-H
M-H-M
M-M-H
M-M-M

Como ve, *importa* el *orden* de aparición de los transeúntes. Luego, volviendo a la pregunta anterior, como hay *ocho* casos posibles y *sólo uno* favorable (H-H-H), la probabilidad ahora es:

1/8, o el 12,5% de las veces

que es lo mismo que $(1/2)^3$.

Un alumno que disfrutaba de las apuestas, le dice al profesor:

–Ya que usted viene en bicicleta al colegio, ¿la apostaría a que ninguno de los tres próximos peatones va a ser una mujer?

El profesor, a quien a diferencia del alumno no le gustaba apostar, le contesta:

–No, no querría perder mi bicicleta. Por otro lado, lo que yo digo es que la *probabilidad* de que no pase ninguna mujer entre los tres próximos peatones es 1/8, pero no hay *seguridades*.

El alumno insiste.

–Mmmmm..., si acepta la apuesta, tiene sólo 1/8 de probabilidad de perder, y 7/8 de ganar. No está mal, ¿no?

–Aun así, no quiero –dice el profesor.

El alumno va por más.

–Bueno, suponga que pregunto cuál es la probabilidad de que los próximos 20 peatones sean todos hombres (es decir, ni una mujer).

El profesor responde de inmediato:

–Como antes, será 1/2 elevado a la 20, o sea: $(1/2)^{20}$, lo que es lo mismo que multiplicar el número 1/2 veinte veces por sí mismo:

$$(1/2)^{20} = 1/1048576 = 0{,}00000095$$

Entonces, la probabilidad de que no pase ninguna mujer entre los próximos 20 peatones es muy muy baja y, por lo tanto, la probabilidad de ganar es, a su vez, muy alta.

En este caso, hablamos de 99,9999 por ciento de posibilidades de ganar. Es decir que el profesor tiene *una posibilidad* en más de un millón de perder. Realmente, casi cualquiera debería aceptar, porque si bien no es *imposible* perder, es muy, muy *improbable* que ocurra.

–Y del mismo modo –siguió el alumno–, la probabilidad de que los próximos 100 peatones sean todos hombres es de 1/2 elevado a la 100. O sea:

$$(1/2)^{100} = 1/1.267.650.600.228.229.401.496.703.205.376$$

que es un número espantosamente pequeño. Le da a usted una virtual certeza de ganar. Es más: el número que aparece en el denominador (más de un *quintillón*) es mucho mayor que el número de partículas de todo el universo, de acuerdo con la física moderna.

La verdad, *está como para apostar*.

El profesor, que quería darle una lección al alumno, finalmente dice:

–Bueno, en estas circunstancias acepto, para mostrarle que confío en lo que digo. Apuesto mi bicicleta a que entre los próximos 100 peatones habrá al menos una mujer. Será simplemente cuestión de ir hacia la ventana, mirar y contar, hasta que aparezca la primera mujer.

A todo esto se oye que de la calle proviene música, algo parecido a una marcha. El profesor se pone pálido. Se acerca a la ventana, y dice:

–Perdí. ¡Adiós bicicleta!

Por la calle venía avanzando un desfile militar.

MORALEJA: En la práctica, las probabilidades se usan cuando, por ejemplo, no contamos con información certera. Pero a veces calcularlas no es tan simple. Las probabilidades pueden ser subjetivas u objetivas, y en la vida real a veces se estiman mal.

Más allá de que el alumno nunca dijo qué ganaba el profesor si aparecía una mujer entre los siguientes 100 peatones, lo que también queda claro es que cuando uno dice que las chances de que pase un hombre o una mujer son iguales, debe tener cuidado.

Por eso muchas veces las conclusiones a las que estamos decididos a saltar son, cuanto menos, *arriesgadas*.

Genoma y ancestros comunes[12]

Los "bordes" que supuestamente *definen* cada ciencia son cada vez más borrosos y el hombre requiere de poder usar *todas* las

[12] El prestigioso biólogo molecular argentino Alberto Kornblihtt revisó el texto y lo mejoró. Los aciertos son de él. Los potenciales errores corren por mi cuenta.

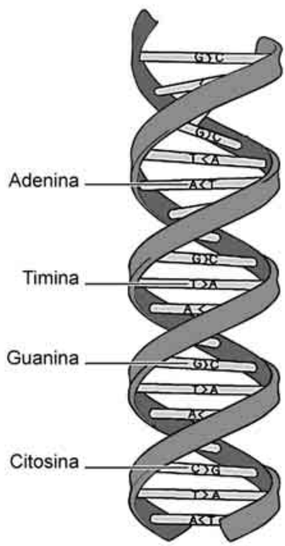
herramientas a su alcance, donde las *etiquetas* poseen cada vez menos sentido. En lugar de decir: "éste es un problema para un físico o para un ingeniero o un arquitecto o un biólogo o un matemático", uno debería decir: *tengo este problema. ¿Cómo lo resolvemos? Pensemos juntos.* Como consecuencia, *el avance llega solo.* O más fácil.

El texto que sigue muestra cómo los vasos comunicantes que generaron biólogos y matemáticos que trabajan en la frontera del conocimiento, permitieron poner en evidencia (una vez más) la existencia de *ancestros comunes.*

Durante 2005, en una charla que manteníamos en un café de la Facultad de Exactas (UBA) con Alicia Dickenstein (matemática y una de mis mejores amigas, una persona que claramente tuvo una incidencia muy positiva en mi vida), ella me comentó acerca de un trabajo muy interesante que involucró a biólogos y matemáticos. Más precisamente, me contó el resumen del trabajo "The Mathematics of Phylogenomics", escrito por Lior Pachter y Bernd Sturmfels, del Departamento de Matemática de UC Berkeley.[13] Desde el momento en que, en el 2003, se completó el Proyecto Genoma Humano (HGP, de acuerdo con su sigla en inglés, *Human Genome Project*), comenzó también la carrera por conocer e identificar a nuestros antepasados, y saber con quiénes compartimos ese "privilegio". El proyecto, que duró más de trece años, permitió identificar los (aproximadamente) entre 20.000 y 25.000 genes del genoma humano, y determinar las secuencias de los 3.000 millones de pares de bases químicas que

[13] Una versión preliminar fue publicada el 8 de septiembre de 2004 en http://arxiv.org/pdf/math.ST/0409132. Una versión revisada apareció en el mismo sitio el 27 de septiembre de 2005, y el artículo definitivamente editado saldrá en la importante *SIAM Review*, de la Society for Industrial and Applied Mathematics.

lo componen. Es decir, es como si uno tuviera un alfabeto que consista en nada más que cuatro letras: A, T, C y G (las iniciales de A = Adenina, T = Timina, C = Citosina, G = Guanina). El ADN de una persona es algo así como su cédula de identidad. Ahí está escrita toda la información necesaria para el funcionamiento de sus células y sus órganos. En esencia, en una molécula de ADN está inscripto todo lo que podemos ser, nuestras particulares aptitudes y capacidades, y algunas de las enfermedades que podemos padecer. No obstante, es la combinación de esa información con el aporte del ambiente lo que hace que cada uno de nosotros sea *único*.



Esa doble hélice es una especie de serpentina que tiene escritas dos tiras enfrentadas de largas cadenas de esas cuatro letras. Pero, además, posee una particularidad: si en una de las tiras, en un lugar hay una letra A, entonces en el lugar correspondiente de la otra tiene que haber una letra T, y si hay una C, entonces en la otra tiene que haber una G. Es decir que vienen apareadas. (De hecho, una forma de recordar esta particularidad, entre los amantes del tango, es usar las iniciales de **A**níbal **T**roilo y **C**arlos **G**ardel.)

Ahora bien, ¿a qué viene todo esto que parece más asociado a un artículo sobre biología molecular que a algo que tenga que ver con la matemática? En el artículo que mencionamos de Lior Pachter y Bernd Sturmfels, y también en el libro *Algebraic Statistics for Computational Biology* (Cambridge University Press, 2005), los autores estudiaron una situación muy particular. Miren esta porción de ADN:

TTTAATTGAAAGAAGTTAATTGAATGAAAATGATCAACTAAG

Son 42 letras, en el orden en el que están escritas. Para decirlo de otra manera, sería como una *palabra* de 42 letras. Esta "tira" del genoma fue encontrada (después de un arduo trabajo matemático y computacional de "alineación" de las distintas secuencias) en algún lugar del ADN de los siguientes vertebrados: hombre, chimpancé, ratón, rata, perro, pollo, rana, peces…

Si uno tirara un dado, que en lugar de tener las seis caras convencionales, tuviera sólo cuatro lados, rotulados A, C, G, T, la probabilidad estimada de que esta secuencia de 42 letras apareciera en ese orden es de 1 dividido por 10^{50}. Es decir, la probabilidad de que esto haya ocurrido por azar es aproximadamente igual a: 10^{-50} = 0,00000…0001. Para decirlo de otro modo, el número empezaría con un cero, luego de la coma habría *cincuenta* ceros, y sólo entonces un número uno. Justamente, la probabilidad de que esto ocurra es tan baja que permite a los autores del artículo conjeturar que todos ellos tuvieron un antepasado o un ancestro común (probablemente hace unos quinientos millones de años), que ya poseía esa secuencia de 42 bases, que fue heredada intacta a todos los descendientes de las distintas ramas de vertebrados. Por lo tanto, si bien uno no puede hablar de certeza, la probabilidad de que el hombre tenga el mismo origen que un pollo, o un perro, o un ratón (ni hablar de un chimpancé), es altísima.

Matrices de Kirkman[14]

Los problemas de combinatoria representan un desafío constante, y no sólo ahora, sino hace ya mucho tiempo. En el siglo XVIII apareció uno que se conoció con el nombre de "Rompecabezas de las alumnas de Kirkman". En realidad, Thomas Penyngton Kirkman propuso este problema en 1847 y un enunciado tan ingenuo como el que sigue tuvo múltiples implicaciones en la Teoría de Matrices.

Una matriz es una *tabla* con *columnas y filas*, donde uno ubica ciertos elementos. Por ejemplo, la platea de un cine consiste de un número determinado de filas y columnas con asientos que serán ocupados por el público. En una terminal de trenes, el tablero que indica los horarios de salida es también una matriz. Las columnas son los diferentes andenes y las filas, los horarios de salida. La grilla de televisión que aparece en todos los diarios es otro ejemplo. Las columnas indican los horarios, y las filas, los distintos canales. O podría ser al revés, dependiendo del número de canales, claro está.

[14] Este problema aparece en el libro *The Puzzle Instinct*, de Marcelo Danesi.

Creo que se entiende la idea de una matriz. Ahora sí, el problema de Kirkman:

Se tienen 7 matrices de 5 filas y 3 columnas cada una. Tomemos una de ellas. Distribuyamos los 15 primeros números naturales (del 1 al 15). Obviamente, hay *muchas formas de hacerlo* (¿cuántas?).[15] Ahora, haga lo mismo en *cada una* de las matrices siguientes, pero con una restricción.

Por ejemplo, si en la tercera fila de la primera matriz aparecen los números 1, 4 y 7, entonces, el número 1 no puede aparecer ni con el 4 ni con el 7 en la tercera fila de ninguna otra matriz. Lo mismo con el 4 que, por supuesto, puede aparecer en la tercera fila en cualquier otra matriz, pero no puede estar ni con el 1 ni con el 7.

El enunciado, en consecuencia, dice lo siguiente: se deben distribuir los primeros 15 números naturales en las 7 matrices, con el cuidado de que, si en alguna fila aparece una terna de números, entonces ningún par de ellos puede aparecer *en la misma fila* en ninguna otra matriz.

Desde 1922 aparecieron varias soluciones al *rompecabezas* de Kirkman (encontrará una más abajo), pero lo interesante es que este tipo de problemas fue siempre de gran interés para los matemáticos de diferentes épocas. Algunos de ellos interpretaron estos *acertijos* como una manera recreativa de presentar *nociones teóricas.*

El matemático inglés Charles Lutwidge Dodgson elevó este género hasta transformarlo en un arte literario. De hecho, utili-

[15] El número de distribuciones posibles de los 15 números naturales en una matriz se obtiene multiplicando en forma descendente los números desde el 15 hasta el 1:

$$15 \,.\, 14 \,.\, 13 \,.\, 12 \,.\, 11 \ldots .\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1$$

Esto se conoce con el nombre de *factorial de 15* (como hemos visto en *Matemática... ¿Estás ahí?*) y la notación que se usa es 15!

zaba el seudónimo de Lewis Carroll, nombre con el que escribió –nada menos– que *Alicia en el País de las Maravillas.*

SOLUCIÓN:

15	5	10
1	6	11
2	7	12
3	8	13
4	9	14

15	1	4
2	3	6
7	8	11
9	10	13
12	14	5

1	2	5
3	4	7
8	9	12
10	11	14
13	15	6

4	5	8
6	7	10
11	12	15
13	14	2
1	3	9

4	6	12
5	7	13
8	10	1
9	11	2
14	15	3

10	12	3
11	13	4
14	1	7
15	2	8
5	6	9

2	4	10
3	5	11
6	8	14
7	9	15
12	13	1

Los problemas de la matemática

La matemática nació para estudiar cómo resolver problemas prácticos. Bandas nómadas de cazadores podían vivir sin matemáticas, pero una vez que empezó la agricultura, empezó a ser importante poder predecir las estaciones contando los días. Una sociedad se desarrolla y adopta un sistema monetario y hace falta aritmética para manejarlo. La geometría es necesaria para medir la tierra y construir edificios razonablemente elaborados.

KEITH BALL

Una vez descartado lo imposible, lo que resta, por improbable que parezca, debe ser la verdad.

SIR ARTHUR CONAN DOYLE

¿Hay más agua en el vino o vino en el agua?

Este problema enseña a pensar (por supuesto, en un caso particular). La idea es *educar* la intuición y poder decidir mejor en aquellas situaciones de la vida en las que uno tiene que optar.

Caminaba por la Facultad de Exactas de la UBA y me encontré con Teresita Krick, matemática, profesora también y, sobre todo, muy buena amiga.

–Adrián, tengo un problema interesante para vos. ¿Tenés tiempo para que te lo cuente? Te va a servir para el final de cada programa de televisión –me dijo en un descanso de la escalera.

–Sí –le contesté–. Bienvenida sea toda historia que sirva para pensar.

–Bueno, la historia es así: se tienen dos vasos iguales. Uno contiene vino (llamémoslo V) y el otro agua (llamado A). Los dos tienen la misma cantidad de líquido. Uno toma una cuchara y la hunde en el vino. La llena (a la cuchara) y, sin que se caiga nada, vierte el vino que sacó en el vaso que contiene el agua y revuelve. Es decir, mezcla el agua y el vino. Claramente, el vaso A tiene ahora un poco más de líquido que el vaso V. Más aún, lo que le falta de líquido a V, lo tiene de más el vaso A.

”Ahora bien –siguió Teresa–. Una vez que uno revolvió bien el contenido del vaso A, vuelve a meter la cuchara en el vaso A y una vez más llena la cuchara. Claramente, lo que uno está eligiendo ahora, no es agua pura sino una mezcla. Pero no importa. Llena la cuchara con ese líquido y lo pone en el vaso V.

Teresita me miraba fijo. Yo todavía no sabía hacia dónde iba, pero la dejé seguir:

–Si mezclamos otra vez el líquido en el vaso V, ¿qué te parece que pasa ahora? ¿Hay *más agua en el vino* o *más vino en el agua*?

Fin del problema. Ahora, a pensar.

El enunciado no contiene trucos ni trampas. Se supone que el agua y el vino *no se mezclan*, en el sentido de que *no cambian sus propiedades*. Sé que esto no es cierto, pero a los efectos del problema vamos a suponerlo así.

SOLUCIONES:

La cantidad de agua en el vino *es la misma* que la cantidad de vino en el agua.

¿Cómo convencerse de que esto es cierto? Hay varias maneras de pensar este problema. Yo voy a sugerir tres.

Primera solución:

Las cantidades de líquido que había en cada vaso eran originariamente las mismas. Además, y esto es importante, las cantidades de líquido que hay al final, luego de haber mezclado en ambos vasos, también es igual.

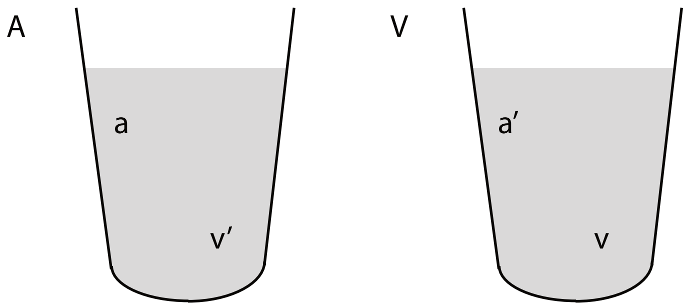
Ahora bien: está claro que algo de vino quedó en el vaso A. Pero también es claro que algo de agua quedó en el vaso V. Ese *algo* de agua que falta en el vaso A *está en* V. Y ese *algo* de vino que falta en el vaso V *está en* A.

Si esas cantidades no fueran iguales, querría decir que en uno de los dos vasos hay más líquido. Y eso no puede ser. Como las cantidades finales son las mismas, entonces, eso implica que lo que falta de agua en el vaso A es igual a lo que falta de vino en el vaso V.

Y eso era lo que queríamos demostrar.

Segunda solución:

En esta solución voy a ponerles nombres a los datos. A los vasos los hemos llamado A y V.



Llamemos:

a = cantidad de agua que quedó en el vaso A luego del proceso.
a' = cantidad de agua que quedó en el vaso V luego del proceso.
v = cantidad de vino que quedó en el vaso V luego del experimento.
v' = cantidad de vino que quedó en el vaso A luego del experimento.

Entonces, se tienen estas *igualdades*:

(1) $a + v' = v + a'$

Esto sucede porque las cantidades finales de líquido en cada vaso luego del experimento son las mismas.

Por otro lado:

(2) $a + a' = v + v'$

Esto es cierto porque las cantidades *iniciales* de líquido en cada vaso eran iguales.

Pero, además, y *éste es el dato clave*, uno sabe que

(3) $a + v' = a + a'$

ya que en el vaso A la cantidad de agua que había originariamente (a + a') tiene que ser igual a la cantidad de líquido que hay luego del experimento, que es (a + v').

Con estos datos, estamos en condiciones de resolver el problema.

De la ecuación (3) se puede *simplificar* a, y entonces queda que

$$v' = a'$$

que es lo que queríamos demostrar.

Tercera solución:

Vamos a hacer un *modelo distinto* sobre el mismo problema. En lugar de líquido, vamos a suponer que hay *bolitas* de distintos colores en cada vaso.

Supongamos que en el vaso V hay 1.000 bolitas verdes y en el vaso A, 1.000 bolitas azules. Tomamos una cuchara y sacamos del vaso V, 30 bolitas (verdes) y las pasamos al vaso A (en donde están las azules). Ahora, en el vaso V quedan 970 bolitas (todas verdes) y en el vaso A, 1.030 bolitas (1.000 azules y 30 verdes que acabo de pasar con la cuchara). Mezclamos las bolitas del vaso A. En su mayoría son azules, pero ahora hay también 30 bolitas verdes.

Para *replicar* lo que hacíamos con el agua y el vino, volvemos a usar la cuchara. La hundimos en el vaso A, donde están las 1.030 bolitas, y a los efectos de avanzar con el pensamiento, vamos a suponer que nos llevamos 27 azules y 3 de las verdes que habían pasado antes (estos números son arbitrarios).

Volvemos a depositar estas 30 bolitas en el vaso V. Por favor, tome nota de que en el vaso A quedaron ahora 973 azules y 27 verdes. Ahora, al haber pasado las 30 bolitas del vaso A al V, los dos tienen la *misma cantidad de bolitas: 1.000*.

En el vaso V quedaron 970 bolitas verdes que nunca fueron tocadas, más 27 azules que deposité la segunda vez que pasé la cuchara, más 3 verdes que volvieron. O sea, hay 973 verdes y 27 azules.

CONCLUSIONES:

a) en ambos vasos hay la misma cantidad de bolitas;

b) en el vaso V, hay 973 verdes y 27 azules;

c) en el vaso A, hay 973 azules y 27 verdes.

Como ve, hay la misma cantidad de verdes entre las azules que de azules entre las verdes. O, si se quiere, hay la misma cantidad de agua en el vino que de vino en el agua.

Final con moraleja incluida: para resolver este problema es obvio que no hace falta saber resolver ecuaciones, ni es necesario saber modelar con bolitas. Hay gente que llega a la respuesta razonando como en la primera solución. Y otra, razonando como en la segunda. O como en la tercera. Más aún: estoy seguro de que mucha otra gente lo *resuelve* de otras formas.

Por eso, *no hay una única manera de resolver problemas.* Lo que es interesante, es ser capaces de pensar. No importa tanto qué caminos uno toma, sino el resultado final. Todos iluminan.

La historia de los cuatro sospechosos

El siguiente problema tiene una particularidad: en apariencia, parece un *acertijo.* Me resisto a incluir "problemas de ingenio", porque con ellos suele pasar es que si a uno se le ocurre lo que hay que hacer, bárbaro pero, si no, genera una frustración que invita a no querer pensar más. En cambio, el problema que sigue *tiene lógica.* Tiene una lógica *impecable.* Puede que no sea sencillo, pero inexorablemente, si uno se dedica a pensarlo, seguro que lo resuelve. Podrá no disponer del tiempo o de las ganas de hacerlo, pero de lo que no me queda duda es de que presenta un desafío que cualquier persona puede enfrentar. Aquí va.

Se denunció un robo de dinero y la policía detuvo a cuatro sospechosos. Los cuatro fueron interrogados, y se sabe que *uno solo* dijo la verdad. El problema consiste en *leer* lo que dijo cada uno, y encontrar razones que demuestren quién fue el que dijo la verdad, o sea, encontrar al único que no mintió.

El sospechoso número 1 dijo que él no robó el dinero.

El sospechoso número 2 dijo que el número uno mentía.

El sospechoso número 3 dijo que el número dos mentía.

El sospechoso número 4 dijo que el número dos fue quien robó el dinero.

Le propongo hacer una pausa, sentarse un rato con un papel, una lapicera, y ganas de disfrutar pensando. Yo voy a citar las distintas posibilidades a partir del párrafo que sigue, pero, hágame caso, *no lo lea. Hágalo solo/a.* Lo va a disfrutar más.

Lo que voy a hacer ahora es analizar lo que dijo cada uno de los sospechosos suponiendo que *dijo la verdad*, y ver a qué conclusiones o contradicciones me lleva. A partir de ahora, por comodidad, a los sospechosos los voy a llamar directamente #1, #2, #3 y #4.

1) Si #1 fuera el que dijo la verdad, esto *implica* que #1 NO FUE el que robó el dinero (porque él está diciendo la verdad). En ese caso, no hay problemas en aceptar que #2 NO dice la verdad. Está mintiendo cuando dice que #1

es el que mentía. Luego, no hay problemas ahí. Pero sí hay problemas con la afirmación de #3. Porque si él –el número 3– miente (y tiene que mentir porque estamos suponiendo que #1 es el ÚNICO que dijo la verdad), entonces, sería MENTIRA lo que él dijo, es decir que sería mentira que #2 mentía… o sea, #2 decía la verdad… En ese caso, sería cierto que #1 mentía. Pero si #1 mentía, entonces, cuando él dice que NO robó el dinero, estaría mintiendo. Y eso implicaría que fue ÉL quien robó el dinero. Y ESO CONTRADICE el hecho de que estamos suponiendo que #1 es el único que está diciendo la verdad. Este caso, NO puede ser posible.

2) Si #2 fuera el ÚNICO que dice la verdad, entonces #1 estaría mintiendo; eso implica que fue ÉL quien robó el dinero. Hasta ahí vamos bien. Se concluye, entonces, que #1 fue quien robó el dinero. Por otro lado, como #3 miente, no hay problemas de contradicción alguna, porque SABEMOS que #2 dice la verdad, por lo cual, lo que dice #3 es mentira. Y si lo que dijo #4 también fuera mentira, eso querría decir que #2 NO robó el dinero. Y eso tampoco contradice nada. Es decir, SUPONER QUE FUE #2 EL ÚNICO QUE DICE LA VERDAD no ofrece contradicciones con el resto de las afirmaciones.

3) Si #3 fuera el ÚNICO que dice la verdad, significaría que #2 miente. Pero si #2 miente, entonces quiere decir que #1 decía la verdad. Pero si #1 dijo la verdad, entonces él no robó el dinero. En ese caso, lo que dice #1 TAMBIÉN sería cierto. Eso CONTRADICE que #3 sea el ÚNICO que está diciendo la verdad. Este caso no puede ser posible.

4) Si #4 fuera el ÚNICO que dijo la verdad, entonces implicaría que #2 fue quien robó el dinero. Pero, como OBLIGADAMENTE #3 miente, eso querría decir que lo que dijo es falso y, por lo tanto, #2 estaría diciendo la verdad. Y lo que dijo #2 fue que #1 mentía. Pero si #1 mentía, entonces, fue #1 quien robó el dinero… Y eso contradice que fue #2 quien robó el dinero.

MORALEJA 1: La única manera de que UNO solo de ellos dijera la verdad sin que se produzcan contradicciones es que sea #2 el ÚNICO que dijo la verdad.

MORALEJA 2: Este tipo de problemas, más allá de ser entretenidos o no, nos entrenan para tomar decisiones que aparecen como complicadas. Muchas veces en la vida uno tiene que analizar distintos tipos de escenarios y cuando advierte que hay muchas variables, la pereza lo inunda y prefiere claudicar. Por eso, más allá del valor lúdico que tienen, enseñan a pensar. Y ayudan a elegir.

Problema de los recipientes de 3 y 5 litros respectivamente

El problema a resolver es el siguiente: se tienen dos recipientes vacíos de 3 y 5 litros respectivamente. (Ésos son los únicos datos que uno tiene, es decir, no hay otra forma de medir volúmenes.) Por otro lado, hay un barril que contiene vino. ¿Cómo se puede hacer para conseguir exactamente 4 litros de vino?

SOLUCIÓN:

Una manera de resolver el problema es tomar el barril y llenar el recipiente de 3 litros. Luego se vierten en el de 5 litros. De modo que tenemos *3 litros* en el recipiente en el que caben *5* y nada en el otro. Luego se vuelve a llenar el de 3 litros, y ahora los dos recipientes tienen 3 litros. Tomo el recipiente de 3 litros, y agrego líquido en el de 5 hasta llenarlo.

El de 5 está completo, pero en el de 3 ha quedado 1 litro exactamente. Esto es lo que necesitaba. Tiro todo lo que hay en el de 5 hasta vaciarlo y luego tomo el *único litro* que hay en el de 3, y lo vierto en el de 5. En este momento tengo *1 litro* en el recipiente de 5 y *nada* en el de 3. Faltan dos pasos. En el primero, lleno el recipiente de 3, y el otro lo dejo igual. Luego, tomo los 3 litros y los vierto en el otro recipiente, donde había *un solo litro.* Listo. En el recipiente de 5 litros quedaron exactamente 4, como queríamos.

Problema de pensamiento lateral (Eminencia)

Como ya expliqué en el primer libro de esta serie, hay problemas que se consideran de "pensamiento lateral" o, lo que es lo mismo, problemas que requieren de caminos inesperados o ángulos distintos, o de *algo* diferente para llegar a su solución. Aquí va uno de los más importantes de estos problemas, no necesariamente el mejor (aunque creo que es uno de los mejores), y que genera y generó muchísimas controversias. Recuerde que no hay trampas ni cosas escondidas, todo está a la vista.

Antonio, padre de Roberto, un niño de 8 años, sale manejando su auto desde su casa en la Ciudad de Buenos Aires y se dirige rumbo a Mar del Plata. Roberto va con él. En el camino se produce un terrible accidente. Un camión, que venía de frente, sale de su carril en la autopista y embiste de frente el auto de Antonio.

El impacto mata instantáneamente a Antonio, pero Roberto sigue con vida. Una ambulancia de la municipalidad de Dolores llega casi de inmediato, advertida por quienes fueron ocasionales testigos, y el niño es trasladado al hospital. Ni bien llega, los médicos de guardia comienzan a tratarlo con mucha dedicación, aunque luego de conversar entre ellos y estabilizarle las condiciones vitales deciden que no pueden resolver el problema de Roberto. Necesitan consultar. Además, advierten el riesgo de trasladar al niño y, por eso, deciden dejarlo internado allí, en Dolores. Después de las consultas pertinentes, se comunican con el Hospital de Niños de la Capital y finalmente se asesoran con una eminencia en el tema, a quien ponen en conocimiento de lo ocurrido. Como todos concuerdan en que lo mejor es dejarlo a Roberto en Dolores, la eminencia decide viajar directamente desde Buenos Aires hacia allá. Y lo hace.

Los médicos del lugar le presentan el caso y esperan ansiosos su opinión. Finalmente, uno de ellos es el primero en hablar:

–¿Está usted en condiciones de tratar al nene? –pregunta con un hilo de voz.

Y obtiene la siguiente respuesta:

–¡Cómo no lo voy a tratar si es *mi hijo*!

Bien, hasta aquí, la historia. Ahora, ¿cómo hacer para que tenga sentido? Como no estoy con usted donde sea que esté leyendo este libro, le insisto en que no hay trampas, no hay nada oculto.

Antes de leer la solución, quiero agregar algunas cosas:

a) Antonio no es el padrastro.
b) Antonio no es cura.

Ahora sí, lo dejo con su imaginación. Eso sí, le sugiero que lea otra vez la descripción del problema y, créame, es muy, muy sencillo.

SOLUCIÓN:

Lo notable de este problema es lo sencillo de la respuesta. Peor aun: ni bien la escriba –si es que no pudo resolverlo– se va a dar la cabeza contra la pared pensando: ¿cómo es posible que no se me haya ocurrido?

La solución, o mejor dicho una potencial solución, es que la eminencia de la que se habla sea *la madre*.

Y este punto es clave en toda la discusión del problema.

Como se advierte (si lo desea, relea todo nuevamente), en ningún momento hago mención al *sexo* de la eminencia. Pero nosotros tenemos tan internalizado que las eminencias tienen que ser hombres, que no podemos pensarla mujer. Y esto va mucho más allá de ser puestos ante la disyuntiva *explícita* de decidir si una mujer puede ser una eminencia o no; creo que ninguno de nosotros dudaría en aceptar la posibilidad de que sea tanto una mujer como un hombre. Sin embargo, en este caso falla. No siempre se obtiene esa respuesta. Más aún: hay muchas mujeres que no pueden resolverlo, y cuando les comunican la solución, se sienten atrapadas por la misma conducta machista que deploran o condenan.

Diez bolsas con diez monedas

Se tienen 10 bolsas numeradas (del 1 al 10) que contienen 10 monedas cada una. Las monedas son todas iguales en apariencia y, salvo una excepción, todas tienen el mismo peso: 10 gramos. Lo único que se sabe es que *una* de las bolsas contiene monedas que pesan todas un gramo más que el resto. Es decir, las monedas de esta única bolsa pesan 11 gramos en lugar de 10. Se tiene, además, una balanza que mide el peso exacto (bueno, tan exacto como uno necesita para este problema), pero sólo se podrá usar una vez.

El problema consiste en saber qué hacer, con una sola pesada, para determinar en qué bolsa están las monedas que pesan diferente. Se trata de *pensar con creatividad*. Ése es el atractivo particular de este ejercicio.

SOLUCIÓN:

Uno tiene las bolsas numeradas. Elige entonces monedas para pesar de la siguiente forma:

1 moneda de la bolsa número 1.
2 monedas de la bolsa número 2.
3 monedas de la bolsa número 3.
4 monedas de la bolsa número 4.
5 monedas de la bolsa número 5.
6 monedas de la bolsa número 6.
7 monedas de la bolsa número 7.
8 monedas de la bolsa número 8.
9 monedas de la bolsa número 9.
10 monedas de la bolsa número 10.

Hemos elegido 55 monedas para poner en la balanza. En principio, si las monedas pesaran todas iguales, es decir, si pesaran todas 10 gramos, al poner las 55 monedas, el resultado que deberíamos obtener es 550 gramos. A esta altura, con lo que acabo de escribir, creo que ya puede pensar solo (si hasta acá no se le había ocurrido cómo resolver el problema). Si no, sigo yo más abajo. Pero piense que, con la idea *extra* de ver cómo elegir las monedas, ahora debería ser más sencillo decidir cuál es la bolsa que contiene las monedas que pesan 11 gramos.

Vuelvo a la solución. Al pesar las 55 monedas, *sabemos* que el resultado será *mayor* que 550 gramos. Ahora, ¿cuánto más podría ser el resultado de la pesada? Por ejemplo, ¿si en lugar de pesar 550 gramos pesara 551, qué querría decir?

Resulta que si pesa exactamente un gramo más es porque hay una sola moneda que pesa 11 gramos, y por la forma en que hemos elegido las monedas (1 de la bolsa 1, 2 de la bolsa 2, etc.), significa que la bolsa donde están las que pesan distinto tiene que ser la número 1. Es que de ella hemos elegido justamente *una sola moneda*.

Si, en cambio, en lugar de pesar 550 pesara 552, entonces quiere decir que hay 2 monedas que pesan 11 gramos cada una. ¿No es fácil ver ahora que la bolsa donde están las que pesan más tiene que ser la bolsa número 2?

De esta forma, si pesara 553, las monedas de mayor peso estarán en la bolsa número 3, y así sucesivamente.

Es decir, hemos resuelto el problema: con una sola pesada podemos determinar en qué bolsa están las que pesan 11 gramos.

Otro problema de sombreros[16]

Se tienen cinco sombreros, tres de los cuales son blancos y los otros dos, negros. Hay en una pieza tres personas (digamos los señores A, B y C), a quienes se les entregó al entrar uno de los cinco sombreros. Los tres señores están sentados de manera tal que el señor A puede ver los sombreros de B y de C (no el propio, claro está), pero B sólo puede ver el sombrero de C (y no el suyo ni el de A). Por su parte, C no puede ver ningún sombrero.

Cuando les preguntaron –en orden: primero A, luego B y luego C– qué sombrero tenía cada uno, éstas fueron las respuestas: el señor A dijo que no podía determinar qué color de sombrero tenía. Luego le tocó al señor B, quien también dijo que no podía decir qué color de sombrero tenía. Por último, el señor C dijo: “Entonces yo sé qué color de sombrero tengo”.

¿Qué fue lo que dijo?, ¿cómo pudo justificarlo?

SOLUCIÓN:

El señor C tenía un sombrero *blanco*, y eso fue lo que dijo. ¿Cómo lo supo? C hizo el siguiente razonamiento.

Si él y B tuvieran sombreros negros, A habría deducido que tenía puesto un sombrero blanco, ya que puede ver los sombre-

[16] En *Matemática… ¿Estás ahí?* publiqué (pp. 162 y 164) varios problemas sobre sombreros. Varios amigos me enviaron nuevos. Elegí éste que me mandó Gustavo Stolovitzky. Gustavo es licenciado en Física en la UBA, doctor en Física en Yale y ahora trabaja en los Estados Unidos, más precisamente en IBM, en el departamento de Genómica funcional y sistemas biológicos. Fue, sin ninguna duda, uno de los alumnos de quienes más aprendí en mi trayectoria como docente, además de ser una persona realmente deliciosa.

ros de los otros dos. Pero A no dijo nada. O, mejor dicho, sí dijo algo: que *no sabía qué sombrero tenía.* Eso implicaba que él estaba viendo que o bien B o bien C tenían un sombrero blanco.

Cuando le tocó el turno a B, él sólo podía ver el sombrero de C, pero tenía la misma información que C: B sabía que o bien él o bien C tenían un sombrero blanco. Si hubiera visto que C tenía un sombrero *negro,* B habría podido decir que su propio sombrero era blanco. Pero como no dijo nada, o mejor dicho, dijo que no podía decirlo, entonces le tocó el turno a C.

Como B no pudo decidir, quería decir que C no tenía el sombrero negro. Por lo tanto, a C le quedó el camino allanado, y sin poder ver ningún sombrero, pudo determinar que él tenía uno blanco. Y acertó.

Ruleta rusa

Supongamos que alguien está (involuntariamente por cierto) involucrado en un juego llamado "La ruleta rusa". Para aquellos que no lo conocen, consiste en ponerse un revólver cargado en la sien y apretar el gatillo. El revólver tiene algunas balas en la recámara, pero no todos los lugares están ocupados.

Se trata de ver si uno, luego de hacer girar el tambor, tiene la suerte de que haya quedado vacío el próximo tiro y así se salve de morir al disparar (nada menos).

Una vez hecha la presentación, supongamos que se tiene un revólver con 6 lugares para cargar las balas. Sabemos que se han ubicado sólo 3 y quedaron 3 lugares vacíos, con la particularidad de que las 3 balas están en tres lugares *consecutivos.* Supongamos ahora que hay 2 jugadores que van a participar. El tambor (o sea, el lugar que contiene las balas) se hace girar una sola vez. Cada jugador toma el arma, se apunta a la cabeza y aprieta el gatillo. Si sobrevive, le pasa el revólver al siguiente participante, que hace lo mismo: se apunta y aprieta el gatillo. El juego termina cuando un jugador muere.

La pregunta es: ¿tiene más posibilidades de *sobrevivir* el que tira primero o segundo? En todo caso, *¿representa alguna ventaja ser el que empieza o ser el segundo? ¿Qué preferiría usted?*

SOLUCIÓN:

Miremos los posibles resultados al girar el tambor.

1	2	3	4	5	6
x	x	x	o	o	o
o	x	x	x	o	o
o	o	x	x	x	o
o	o	o	x	x	x
x	o	o	o	x	x
x	x	o	o	o	x

Donde elegí poner una *"x"* hay una bala, y la *"o"* representa un lugar vacío. Además, numeré los lugares, de manera tal que el que lleva el número 1 es el que determinará la suerte del primer competidor.

Veamos qué posibilidades tiene de *salvarse* el primero. De las seis alternativas, tiene tres a favor (que son las que empiezan con una letra *"o"*). Es decir que la probabilidad de que siga vivo es de 1/2, porque se salva con tres de las seis posiciones posibles.

Ahora, contemos las chances que tiene el segundo competidor, aunque quizá convenga que le dé un poco de tiempo para pensar de nuevo el problema, ya planteada la tabla con todas las posibilidades. Si aun así prefiere seguir leyendo, *contemos* juntos.

Importa mucho saber que, si el segundo jugador va a usar el arma, es porque el primero sigue vivo. O sea que, como el *tambor* se hizo girar una sola vez, quedó detenido en una posición que es la que va a prevalecer a lo largo de todo el juego.

Mirando la tabla, ¿cuántas alternativas hay que empiecen con la letra "*o*"? Hay tres (las que figuran como segunda, tercera y cuarta), pero lo interesante es que de esas tres sólo hay *una* que tiene una bala en el segundo lugar. Las otras dos alternativas tienen nuevamente una "*o*". Es decir que de las tres posibles, el segundo competidor se salvará en *dos* de ellas. En consecuencia, la probabilidad de que el segundo se salve es de 2/3.

La conclusión entonces es que, como la probabilidad de que se salve el primero es de 1/2 y la del segundo es de 2/3, conviene ser el segundo competidor.

Si usted está interesado en continuar el proceso, y si el segundo competidor sigue con vida, le vuelve a tocar al primero y, en ese caso, a él le queda *una* sola posibilidad, sobre dos, de salvarse. Y al segundo, lo mismo. Es decir que si llegaron hasta acá (pasaron por la situación de tirar una vez cada uno y sobrevivieron), las chances son las mismas para los dos.

Problema de las doce monedas

El problema que sigue sirve para analizar situaciones complejas, en donde hay muchas variables y muchos escenarios posibles. Para resolverlo, es conveniente sentarse con un papel (o varios), lapiceras (una alcanza), tiempo (siempre es útil) y muchas ganas de pensar y analizar.

Los organizadores de la Competencia de Matemática que lleva el nombre de mi padre, Ernesto Paenza, incluimos este ejercicio en una de las pruebas (la de 1987). El enunciado es sencillo y tratar de encontrar la solución es ciertamente muy estimulante.

Se tienen 12 monedas iguales en apariencia, pero *una* de ellas pesa distinto que el resto. Con todo, no se sabe si pesa *más* o *menos*, sólo que pesa *diferente*. El objetivo es descubrirla. Para ello, se cuenta con una balanza de dos platillos. En realidad, es una balanza muy sencilla que sólo detecta si lo que se pone en uno de los platillos pesa más, igual o menos que lo depositado en el otro. Nada más. Para descubrir la moneda distinta se pueden efectuar sólo *tres pesadas*.

Las preguntas que surgen son:

a) ¿Se puede?

b) ¿Tiene solución el problema? En tal caso, ¿cuál es? Si no la tiene, también habrá que demostrarlo.

Listo. Ya está el enunciado y las condiciones para resolverlo.

Como siempre, lo invito a pensar solo. Buscar la respuesta sirve para entrenar la mente, para aprender a pensar, para "pensar" un poco más allá de lo que se ve en lo inmediato. Hágame caso, vale la pena intentarlo sin *leer* la respuesta que sigue. Es más: aunque no *llegue* a la respuesta definitiva, créame que la capacidad de razonamiento de una persona mejora sólo por el hecho de haberlo intentado.

SOLUCIÓN:

El problema *tiene solución.* No creo que sea la única, pero voy a mostrar aquí una de ellas. Con todo, como habrá advertido, mi idea es que siempre será mejor la que usted encuentre, porque ésa le pertenece; usted la peleó y pensó por sí mismo/a.

Ahora sí, aquí va. Numeremos las monedas de la 1 a la 12, y a los platillos démosle un nombre también: A al de la izquierda y B al de la derecha.

En la primera pesada, se eligen las monedas (1, 2, 3, 4) y se las coloca en A. Luego, se eligen (5, 6, 7, 8) se las coloca en B.

Caben tres posibilidades:

a) que pesen igual;
b) que el platillo A pese más que B (A > B);
c) que el platillo B pese más que A (B > A).

Analicemos cada caso.

CASO a) Si las ocho monedas pesan igual, quiere decir que la *moneda diferente* tiene que estar entre las *cuatro* (9, 10, 11 y 12) que no intervinieron en la primera pesada. ¿Cómo hacer para descubrirla, ahora que sólo nos quedan dos pesadas más?

Tomamos las monedas (9, 10) y las comparamos poniéndolas en A y B respectivamente. Como antes, hay tres posibilidades, pero en este caso sólo nos interesa considerar las siguientes:

1ª posibilidad: 9 y 10 pesan igual. Eso quiere decir que la *moneda distinta* es o bien la 11, o bien la 12. Pero ahora nos queda una sola pesada más. Entonces, usamos esa pesada para comparar 9 y 11.

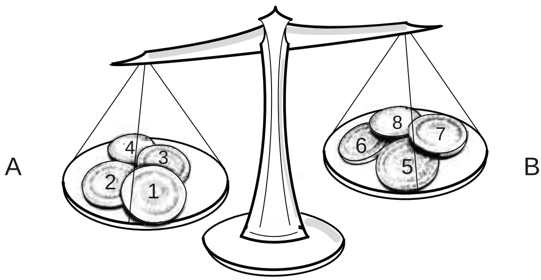
Ya sabemos que 9 no es. Está entre la 11 y la 12. Si 9 y 11 pesan igual, entonces la 12 es la moneda diferente. ¿Por qué? Porque eso querría decir que 11 es del mismo peso que 9, y ya sabemos que 9 es una de las monedas *buenas*, por llamarlas de alguna manera. Entonces, si 9 es de las buenas, y 11 pesa lo mismo que 9, la única alternativa que queda es que 12 sea *la moneda distinta*.

2ª posibilidad: 9 y 10 pesan distinto. Entonces, quiere decir que *una* de esas dos (9 o 10) es la que buscamos. Bueno, pero nos queda una sola pesada para poder descubrir cuál es.

Pesamos la 9 y la 11. Si tienen el mismo peso, entonces la moneda distinta es la 10 (porque ya sabemos que 11 es una de las monedas buenas y 9, entonces, pesaría lo mismo que 11). En cambio, si 9 y 11 pesan distinto, y como ya sabemos que la moneda que buscamos está entre 9 y 10 (y por lo tanto la 11 es una de las *buenas*), en conclusión, 9 es la moneda distinta.

Hasta aquí hemos resuelto el problema siempre y cuando en la primera pesada hayamos determinado que esas ocho monedas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8) pesan lo mismo.

CASO b) Supongamos que A > B, es decir que las monedas (1, 2, 3, 4) pesan más que las monedas (5, 6, 7, 8). Si es así, entonces hay cuatro monedas que quedan descartadas: 9, 10, 11 y 12. La moneda distinta tiene que estar entre las primeras ocho.



Ahora nos quedan dos pesadas para descubrir cuál es, entre las ocho primeras.

Para eso, elegimos *dos* monedas del platillo A (3 y 4) y agregamos *una* del platillo B: por ejemplo, la número 5. A estas tres monedas (3, 4 y 5) las ponemos en A. Del otro lado, tomamos las otras dos monedas que estaban en el platillo A (1 y 2) y las ponemos del otro lado, junto con una cualquiera de las descartadas. Digamos, la número 10. Y las ponemos en el platillo B.

Es decir:

- Platillo A: 3, 4 y 5.
- Platillo B: 1, 2 y 10.

Y usamos la segunda pesada para avanzar. Como siempre, pueden pasar tres cosas: que pesen lo mismo, que A > B, o bien al revés: que A < B.

Analicemos cada una.

1ª posibilidad: si (3, 4, 5) pesan lo mismo que (1, 2, 10), esto significa que uno *descarta que entre estas seis monedas esté la que buscamos*. Ya lo sabíamos en el caso de la 10, pero ahora agregamos 1, 2, 3, 4 y 5. Luego, la moneda distinta está entre 6, 7 u 8. Pero nos queda una sola pesada y tres monedas. Esta situación es clave en el razonamiento. Hemos llegado, una vez más, a quedarnos con *tres* monedas y *una pesada* para poder decidir.

Pesamos 6 y 7. Si estas dos pesan lo mismo, la única posible que queda es la número 8 que resulta ser la moneda distinta. En cambio, si 6 pesa más que 7, esto en principio descarta a 8. Pero, por otro lado, como en la primera pesada (1, 2, 3, 4) pesaban más que (5, 6, 7, 8), esto significa que la moneda distinta pesa *menos* que las otras. Esto sucede porque está del lado de la derecha, en el platillo B, que en la primera pesada albergaba a la moneda distinta. Luego, si 6 pesa más que 7, entonces la moneda distinta es 7. En cambio, si 6 pesa menos que 7, entonces, la moneda distinta es 6.

2ª posibilidad: ahora pasamos al caso en que las monedas (3, 4, 5) *pesan más* que (1, 2, 10). Como también tenemos el dato de que las monedas (1, 2, 3, 4) pesan más que (5, 6, 7, 8), entonces, al haber cambiado de platillo a la moneda 5, como todavía el platillo A sigue pesando más, hay que descartar esa moneda. La 5, entonces, no es la moneda distinta. Pero tampoco lo son las monedas 1 y 2, ya que también las cambiamos de platillo, del A al B, y sin embargo la balanza sigue inclinándose para el mismo lado. Como la 10 ya estaba descartada de entrada y sólo la usamos para "equilibrar" los pesos, quiere decir que la moneda distinta tiene que estar entre la 3 y la 4.

Hay que dilucidar ahora cuál de las dos es la moneda distinta, en una sola pesada.

Ponemos la moneda 3 en el platillo A y la 4 en el B. *No pueden pesar lo mismo*, porque *una de las dos tiene* que ser la moneda distinta. No sólo eso: la que pese *más* es la moneda distinta. Esto se deduce porque es lo que hace (e hizo) que el platillo A pesara más en la primera pesada y también en la segunda.

Si al compararlas 3 pesa más que 4, entonces 3 es la moneda distinta. Si resulta que 4 pesa más que 3, entonces 4 es la moneda distinta.

Y listo. Aquí termina esta parte.

3ª posibilidad: falta que analicemos el caso en que las monedas (3, 4, 5) *pesan menos* que (1, 2, 10). Aquí quedan abiertas algunas posibilidades. Las únicas monedas que pueden ser distintas son 1, 2 o 5. ¿Por qué? Con respecto a la pesada inicial, donde (1, 2, 3, 4) pesan más que (5, 6, 7, 8), las monedas que cambiamos de platillo en la segunda pesada son 1 y 2, que pasaron al platillo A, y también la 5, que pasó del platillo B al A.

Al quedar 3 y 4 en A, y al cambiar cuál de los dos platillos pesa más, entonces eso descarta a 3 y 4. Ellas, obviamente, no inciden en el peso. Ponemos entonces la moneda 1 en A, y la 2 en B. Si pesan igual, entonces la moneda 5 es la moneda distinta. Esto sucede porque todo quedaba reducido a *tres* monedas: 1, 2 y 5. Si 1 y 2 pesan lo mismo, entonces 5 tiene que ser la moneda diferente.

En cambio, si 1 pesa más que 2, eso significa que 1 es la moneda distinta (revise lo que pasó con la moneda 1 desde el principio de las tres pesadas y se dará cuenta que la que más pesa es la moneda distinta). Por otro lado, si 2 pesa más que 1, entonces 2 es la moneda distinta.

CASO c) Ahora falta analizar el caso en que en la primera pesada las monedas (1, 2, 3, 4) pesan *menos* que las monedas (5, 6, 7, 8). En este caso, igual que antes, quedan descartadas como posibles monedas distintas las (9, 10, 11, 12).

Como hemos hecho hasta acá, ahora elegimos seis monedas para comparar. Ponemos –por ejemplo– (3, 4, 5) en A y (1, 2, 10) en B. Al hacer esto, pensamos en cambiar de platillos sólo tres monedas: 1 y 2 que pasan de A a B y, al revés, la moneda 5 que pasa de B a A. La moneda 10 sólo cumple un papel estabilizador, ya que sabemos que está descartada.

¿Qué puede ocurrir? Si (3, 4, 5) pesan *igual* que (1, 2, 10), entonces la moneda distinta tiene que estar entre 6, 7 y 8 (esto surge de la primera pesada). Además, la que sea *pesa más*, porque en la primera pesada el platillo B pesó más que el platillo

A, y en el platillo B sabemos que está la moneda distinta (porque (3, 4, 5) pesan igual que (1, 2, 10)).

Ponemos 6 en A, y 7 en B. Si pesan lo mismo, entonces la moneda 8 es la distinta. Si 6 pesa más que 7, entonces la 6 es la moneda distinta. Y si 7 pesa más que 6, entonces es 7 la moneda distinta.

Si ahora (3, 4, 5) pesan *más* que (1, 2, 10), entonces la discusión sobre la moneda distinta se circunscribe a las monedas (1, 2 y 5) porque son las únicas tres que cambiaron de platillo (teniendo en cuenta la primera pesada). Ponemos 1 en A, y 2 en B. Si pesan iguales, entonces 5 es la moneda distinta. Si 1 pesa más que 2, entonces 2 es la moneda distinta, porque en la primera pesada las monedas (1, 2, 3, 4) pesaban *menos* que (5, 6, 7, 8). En consecuencia, si la moneda distinta está entre 1 y 2, la que pese *menos* es la distinta. Y al revés, si 1 pesa *menos* que 2, entonces 1 es la moneda distinta.

Por último, supongamos que (3, 4, 5) pesan *menos* que (1, 2, 10). Esto descarta a la moneda 5, porque aunque se cambie de platillo queda la balanza inclinada hacia el mismo lado (o sea, con el platillo A teniendo *menos* peso que el platillo B).

Por la misma razón, como al cambiar de platillo a las monedas 1, 2 y 5 en la segunda pesada no cambia el peso de los platillos, entonces 1, 2 y 5 quedan descartadas. La moneda *distinta* está entre la 3 y la 4. Y es la que pesa *menos* de las dos, porque la presencia de ambas en las primeras dos pesadas es la que hace que el platillo A *pese* menos que B. Luego, ponemos 3 en A y 4 en B. Sabemos que *no pueden pesar iguales*. Luego, si 3 pesa *menos* que 4, entonces 3 es la moneda distinta. Y al revés, si 4 es la que pesa *menos* que 3, entonces 4 es la moneda distinta.

Y listo. Acá se terminó el análisis.

¿Difícil? No. ¿Complejo? Tampoco. Sólo hay que “aprender” a hacer análisis de este tipo, en donde las posibilidades son muchas y las variables, en apariencia, también.

Exige concentración... Y entrenar la concentración no tiene nada de malo. Y es muy útil.

Problema del viajante de comercio

Si usted fuera capaz de resolver el problema que voy a plantear ahora, podría agregar un millón de dólares a su cuenta bancaria. Eso es lo que está dispuesto a pagar el Clay Mathematics Institute. El problema es de enunciado realmente muy sencillo y se entiende sin dificultades. Claro, eso no quiere decir que sea fácil de resolver, ni mucho menos. De hecho, seguramente pondrán en duda varias veces que a alguien le puedan pagar semejante suma por resolver lo que parece ser una verdadera pavada. Sin embargo, hace más de cincuenta años que está planteado y, hasta ahora, nadie le encontró la vuelta. Acompáñeme.

Una persona tiene que recorrer un cierto número de ciudades que están interconectadas (por rutas, carreteras o por avión). Es decir, siempre se puede ir de una hacia otra en cualquier dirección. Además, otro dato es cuánto cuesta ir de una a otra. A los efectos prácticos, vamos a suponer que viajar desde la ciudad A hasta la ciudad B sale lo mismo que viajar desde B hasta A.

El problema consiste en construir un itinerario que pase por todas las ciudades *una sola vez,* y que termine en el mismo lugar de partida, con la particularidad de que sea *el más barato.* ¡Eso es todo!

No me diga que no le da ganas de volver para atrás y leer de nuevo, porque estoy seguro de que, a esta altura, usted debe dudar de haber entendido correctamente el enunciado del problema. Una de dos: o no entendió bien el planteo o hay algo que anda mal en este mundo. Sin embargo, el asunto es que la *dificultad* del problema aparece escondida. Los intentos que distintas generaciones de matemáticos han hecho tratando de resolverlo, han permitido múltiples avances, sobre todo en el área de la optimización, pero hasta ahora el problema general no tiene solución.

Hagamos algunos ejemplos sencillos.

Supongamos que se tienen 4 ciudades, digamos A, B, C y D. Como señalé más arriba, sabemos que ir de A hacia B *cuesta lo mismo* que ir de B hacia A. Y lo mismo con todas las otras parejas. Para ejemplificar, voy a inventar algunos datos, de manera de poder pensar el problema en un caso concreto.

a) Costo del viaje AB = 100
b) Costo del viaje AC = 150
c) Costo del viaje AD = 200
d) Costo del viaje BC = 300
e) Costo del viaje BD = 50
f) Costo del viaje CD = 250

Con esto tenemos cubiertos todos los posibles caminos entre todos los posibles pares de ciudades.

Por otro lado, veamos ahora cuáles son los posibles itinerarios que cubran las 4 ciudades, pasando *una sola vez* por cada una y retornando a la ciudad de partida:

1) ABCDA
2) ABDCA
3) ACBDA
4) ACDBA
5) ADBCA
6) ADCBA
7) BACDB
8) BADCB
9) BCADB
10) BCDAB
11) BDACB
12) BDCAB
13) CABDC
14) CADBC
15) CBADC
16) CBDAC
17) CDABC
18) CDBAC
19) DABCD
20) DACBD
21) DBACD
22) DBCAD
23) DCABD
24) DCBAD

Todo lo que hay que hacer ahora es escribir los precios de los trayectos, y hacer las sumas correspondientes:

1-ABCDA	AB = 100	BC = 300	CD = 250	DA = 200
2-ABDCA	AB = 100	BD = 50	DC = 250	CA = 150
3-ACBDA	150	300	50	200
4-ACDBA	150	250	50	100
5-ADBCA	200	50	300	150
6-ADCBA	200	250	300	100
7-BACDB	100	150	250	50
8-BADCB	100	200	250	300
9-BCADB	300	150	200	50
10-BCDAB	300	250	200	100
11-BDACB	50	200	150	300
12-BDCAB	50	250	150	100
13-CABDC	150	100	50	250
14-CADBC	150	200	50	300
15-CBADC	300	100	200	250
16-CBDAC	300	50	200	150
17-CDABC	250	200	100	300
18-CDBAC	250	50	100	150
19-DABCD	200	100	300	250
20-DACBD	200	150	300	50
21-DBACD	50	100	150	250
22-DBCAD	50	300	150	200
23-DCABD	250	150	100	200
24-DCBAD	250	300	100	200

Es decir que se tienen en total 24 posibles itinerarios, con los siguientes costos:

Viaje	Costo	Viaje	Costo
1	850	2	550
3	700	4	550
5	700	6	850
7	550	8	850
9	700	10	850
11	700	12	700
13	550	14	700
15	850	16	700
17	850	18	550
19	850	20	700
21	550	22	700
23	700	24	850

El itinerario que habría que elegir es cualquiera de los que cuestan 550. Obviamente, en este caso el problema es de muy fácil solución. ¿Dónde está la dificultad, entonces? Falta muy poco para descubrirla, pero en lugar de escribirla yo, preferiría que lo hiciéramos juntos.

Hasta acá vimos que con 4 ciudades, hay 24 caminos posibles para analizar. Supongamos ahora que en lugar de 4 ciudades, hay 5. ¿Cuántos caminos posibles habrá? (Acá estará la clave.) Una vez elegida la primera ciudad del recorrido (cualquiera de las 5), ¿cuántas posibilidades quedan para la segunda ciudad? Respuesta: cualquiera de las 4 restantes. Es decir que, nada más que para recorrer las primeras 2 ciudades, hay ya 20 posibles maneras de empezar:

AB, AC, AD, AE, BA, BC, BD, BE, CA, CB, CD, CE, DA,
DB, DC, DE, EA, EB, EC y ED.

¿Y ahora? ¿Cuántas posibilidades hay para la tercera ciudad?

Como ya elegimos 2, nos quedan 3 para elegir. Luego, como ya teníamos 20 maneras de empezar, y cada una de éstas puede seguir de 3 formas, con 3 ciudades tenemos 60 formas de empezar. (¿Advierte ya dónde empieza a estar la dificultad?)

Para la cuarta ciudad a elegir, ¿cuántas posibilidades quedan? Respuesta: 2 (ya que son solamente 2 las ciudades que no hemos utilizado en el itinerario trazado hasta ahora). Luego, para cada una de las 60 formas que teníamos de empezar con 3 ciudades, podemos continuar con *2 ciudades*. Luego, tenemos 120 itinerarios con 4 ciudades.

Y ahora, para el final, no nos queda *nada* para elegir, porque de las 5 ciudades que había, ya hemos seleccionado 4: la quinta es elegida por descarte, porque es la única que queda. Moraleja: tenemos 120 itinerarios.

Si relee lo que escribimos recién, verá que al número 120 llegamos multiplicando los primeros cinco números naturales:

$$120 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1$$

Este número se conoce con el símbolo *5!*, y no es que se lea con gran admiración, sino que los matemáticos llamamos a este número el *factorial* de 5. En el caso que estamos analizando, el 5 es justamente el número de ciudades.[17] Es fácil imaginar lo que

[17] Se le da un nombre a esta operación, que resulta de multiplicar los *primeros n números naturales (el factorial de 'n'),* porque es una situación que aparece muchas veces cuando uno tiene que *contar conjuntos finitos.* O sea, tiene sentido *llamar de alguna manera al producto de los primeros números naturales.* Por ejemplo:

$$3! = 3 . 2 . 1 = 6$$
$$4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24$$
$$5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$$
$$10! = 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 3.628.800$$

pasará si en lugar de tener 5 ciudades, se tienen 6 o más. El número de caminos posibles será:

6! = 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720

7 ciudades, 7! = 5.040
8 ciudades, 8! = 40.320
9 ciudades, 9! = 362.880
10 ciudades, 10! = 3.628.800

Y paro acá. Como habrá deducido, el total de rutas posibles que habría que analizar con sólo 10 ciudades es de ¡más de 3.600.000! La primera conclusión que uno saca es que el factorial de un número aumenta muy rápidamente a medida que uno avanza en el mundo de los números naturales.

Imagine que un viajante de comercio necesita decidir cómo hacer para recorrer las capitales de las 22 provincias argentinas, de manera tal que el costo sea el menor posible. De acuerdo con lo que vimos recién, habría que analizar:

1.124.000.727.777.610.000.000 rutas posibles
(más de 1.100 trillones)

Por lo tanto, se advierte que para resolver este problema hace falta una computadora ciertamente muy potente. Y aun así, este ejemplo (el de las 22 capitales) es muy pequeño...

Creo que ahora queda claro que la dificultad no reside en hacer las cuentas ni en el método a emplear. ¡Ésa es la parte fácil! Hay que sumar y luego comparar. No; el problema, insalvable por ahora, es que hay que hacerlo con muchísimos números, un número *enorme*, que aun en los casos más sencillos, de pocas ciudades, parece inabordable.

La idea es tratar de encontrar alguna manera de encontrar la ruta más barata sin tener que realizar todos esos cálculos. Ya con 100 ciudades se sabe que el número de itinerarios posibles es tan grande que ni siquiera las computadoras más poderosas pueden procesarlo. Hay varios casos particulares que fueron resueltos, pero, en esencia, el problema sigue *abierto*.

Un último comentario: con los actuales modelos de computación, el problema no parece que tenga solución. Hará falta, entonces, que aparezca alguna nueva idea que revolucione todo lo conocido hasta ahora.

La matemática es un juego (¿o no?)

Alicia sonrió: "No tiene sentido que pruebe", dijo, "uno no puede creer en cosas imposibles". "Me atrevo a decir que no has intentado lo suficiente", dijo la reina. "Cuando yo era joven, lo intentaba al menos media hora por día. Incluso, hubo días en que me creí hasta seis cosas imposibles antes del desayuno". "¿Por dónde tendría que empezar?", preguntó. "Empieza por el principio", dijo el rey, "y detente cuando llegues al final".

Lewis Carroll, *Alicia en el País de las Maravillas*

Teoría de Juegos. Estrategia (una definición)

¿Qué es el *pensamiento estratégico*? Esencialmente se trata de cómo podemos diseñar la interacción con otras personas, que propondrán situaciones que deberemos imaginar y contrarrestar, y a la vez, nosotros ofreceremos las nuestras tratando de *ganar*. Alguien, además de nosotros, estará pensando igual que nosotros, al mismo tiempo que nosotros, acerca de la misma situación que nosotros. Si se tratara de un partido de fútbol, el director técnico rival es el que preparará las jugadas que piensa servirán para contrarrestar las jugadas que él cree que nosotros presentaremos en el transcurso de un partido. Por supuesto, así como tenemos que considerar qué es lo que el otro jugador está pensando, él, a su vez, tiene que considerar lo que *nosotros* estamos pensando.

Justamente, la Teoría de Juegos es el análisis o la ciencia (como prefieran) que estudia cómo optimizar ese tipo de *toma de decisiones* de acuerdo con un comportamiento racional.

Uno puede decir que actúa con racionalidad cuando

- piensa cuidadosamente antes de actuar;
- es consciente de sus *objetivos y preferencias*;
- conoce sus *limitaciones*;
- sabe cuáles son las *restricciones*;
- elige sus acciones de forma calculada para conseguir lo mejor de acuerdo con *su* criterio.

La Teoría de Juegos agrega una nueva dimensión al comportamiento racional, esencialmente porque enseña a pensar y a actuar en forma *educada*,[18] cuando uno tiene que enfrentarse con otras personas que usan las mismas herramientas. Esta teoría no sostiene que enseñará los secretos de cómo jugar "a la perfección", ni garantiza que uno nunca va a perder. Ni siquiera tendría sentido pensarlo así, teniendo en cuenta que tanto nosotros como nuestro oponente podríamos estar leyendo el mismo libro, y ambos no podemos ganar al mismo tiempo.

Pero más allá de esta obviedad, lo más importante es advertir que la mayoría de estos juegos es lo suficientemente compleja y sutil, y la mayoría de las situaciones involucra decisiones basadas en la idiosincrasia de las personas o en elementos azarosos; por lo tanto, la Teoría de Juegos no puede (así como ninguna otra teoría podría hacerlo) ofrecer una receta infalible para el éxito. Lo que *sí* provee son algunos principios generales para aprender a interactuar con una estrategia. Uno tiene que suplementar esas ideas y esos métodos de cálculo con tantos detalles como le sea posible, de manera tal de dejar librado al azar lo

[18] En el sentido de que se actuará de acuerdo con lo aprendido y planificado, no por "moral y buenas costumbres".

menos posible, y de esa forma diseñar la mejor estrategia, o una muy buena estrategia.

Los mejores estrategas mezclan la ciencia que provee la Teoría de Juegos con su propia experiencia. Un análisis correcto de cualquier situación involucra también aprender y describir todas las limitaciones.

Se puede pensar que uno, en algún sentido, ya es un artista, y adquirió lo que necesitaba saber a través de la experiencia. Sin embargo, la Teoría de Juegos ofrece un ángulo científico que sólo sirve para agregar más elementos de juicio. Más aún: es una manera de sistematizar muchos principios generales que son comunes en muchos contextos o aplicaciones. Sin estos principios generales, uno tendría que empezar todo de nuevo ante cada nueva situación que requiera de una estrategia. Y eso sería, ciertamente, una pérdida de tiempo.

600 soldados, el general y la Teoría de Juegos

En el libro *Judgement under Uncertainty* (*Juicio ante la Incertidumbre*), de Tversky y Kahneman, aparece un problema que requiere tomar una decisión en una situación crítica. De hecho, los dos autores, ambos psicólogos, plantean una disyuntiva cuya resolución, como veremos, depende de cómo sea presentada. En realidad, como acabamos de ver, hay una rama de la matemática, conocida con el nombre de Teoría de Juegos, que analiza este tipo de situaciones.

Supongamos que hay un general que lidera un grupo de 600 soldados. De pronto, su gente de inteligencia le advierte que están rodeados por un ejército, y que vienen con la intención de *matarlos a todos* (los soldados).

Como el general había estudiado las condiciones del terreno antes de estacionarse en ese lugar, más la información que le suministraron sus espías, sabe que le quedan dos alternativas, o mejor dicho, dos caminos de escape:

a) Si *toma el primer camino*, salvará a 200 soldados.

b) Si *toma el segundo camino,* la probabilidad de salvar a los 600 es de 1/3, mientras que la probabilidad de que *ninguno* llegue a destino es de 2/3.

¿Qué hacer? ¿Qué ruta tomar?

Aquí, le propongo realizar una pausa. Lo invito a que piense qué haría en una situación semejante. ¿Qué camino elegiría? Una vez que haya releído el problema y haya tomado una decisión *imaginaria,* lea lo que sigue, con lo que se *sabe estadísticamente* qué haría la mayor parte de la gente.

Ahora sigo. Se sabe que 3 de cada 4 personas, o sea el 75 por ciento, dice que tomaría el camino *uno*, y el argumento que dan es que si optaran por el dos, la probabilidad de que mueran *todos* es de 2/3.

Hasta acá, todo es comprensible. Más allá de lo que hubiera decidido usted en esa misma disyuntiva, ésos son los datos que recolectaron los científicos. Sin embargo, mire cómo las respuestas *cambian dramáticamente* cuando las opciones son presentadas de diferente manera.

Supongamos que ahora se plantearan estas dos alternativas de *escape*:

a) Si uno toma el *primer camino*, sabe que *se mueren* 400 de los 600 soldados.

b) Si uno toma el *segundo camino*, sabe que la probabilidad de que se *salven todos* es de 1/3, mientras que la probabilidad de que *se mueran todos* es de 2/3.

¿Qué ruta tomaría?

Otra vez, vale la pena pensar qué haría uno y luego confrontar con las respuestas que ofrecerían nuestros semejantes.

La mayor parte de la gente (4 sobre 5, o sea el 80 por ciento), cuando le plantearon el problema de esta forma, optó por el *segundo camino*, y el argumento que daba es que elegir el camino uno significaba condenar a 400 soldados a una muerte segura, mientras que, si elegía el *segundo camino*, al menos existía un 1/3 de posibilidades de que se salvaran todos.

Las dos preguntas plantean el mismo problema de *manera diferente*. Las distintas respuestas obedecen sólo a la forma en que fue planteado el problema. Es decir, depende de en qué *términos* esté puesto el mayor énfasis, si en cuántas vidas se salvan o en cuántas personas van a morir con seguridad.

Dilema del prisionero

Uno de los problemas más famosos en la Teoría de Juegos es el que se conoce con el nombre del “Dilema del prisionero”. Hay muchísimas versiones y cada una tiene su costado atractivo. Elijo una cualquiera, pero las otras son variaciones sobre el mismo tema. Aquí va.

Dos personas son acusadas de haber robado un banco en Inglaterra. Los ladrones son apresados y puestos en celdas separadas e incomunicados. Ambos están más preocupados por evitar un futuro personal en la cárcel que por el destino de su cómplice. Es decir, a cada uno le importa más conservar *su propia libertad*, que la de su cómplice.

Interviene un fiscal. Las pruebas que reúne son insuficientes. Necesitaría una confesión para confirmar sus sospechas. Y aquí viene la clave de todo. Se junta con cada uno de ellos y les plantea (por separado) la siguiente oferta:

–Usted puede elegir entre confesar o permanecer callado. Si confiesa y su cómplice no habla, yo retiro los cargos que tengo contra usted, pero uso su testimonio para enviar al otro a la cárcel por diez años. De la misma forma, si su cómplice confiesa y es usted el que no habla, él quedará en libertad y usted estará entre rejas por los próximos diez años. Si confiesan los dos, los dos serán condenados, pero a cinco años cada uno. Por último, si ninguno de los dos habla, les corresponderá sólo un año de cárcel a cada uno porque sólo los podré acusar de un delito menor por portación de armas.

”Ustedes deciden –le dice a cada uno por separado–. Eso sí, si quieren confesar, deben dejar una nota con el guardia que está en la puerta antes de que yo vuelva mañana. –Y se va.

Este problema fue planteado en 1951 por Merrill M. Flood, un matemático inglés, en cooperación con Melvin Dresher. Ambos actuaron estimulados por las aplicaciones que este tipo de dilemas podrían tener en el diseño de estrategias para enfrentar una potencial guerra nuclear. El título “Dilema del prisionero” se le debe a Albert W. Tucker, profesor en Princeton, quien trató de adaptar las ideas de los matemáticos para hacerlas más accesibles a grupos de psicólogos.

Se han hecho –y se continúan haciendo– muchos análisis y comentarios sobre este dilema, por lo que lo invito, antes de seguir leyendo, a pensar un rato sobre el tema.

En definitiva, se trata de ilustrar, una vez más, el conflicto entre el interés individual y el grupal.

- ¿Qué haría si estuviera en la posición de cada uno de ellos?
- ¿Cuál cree que es la respuesta que dieron ellos en ese caso?
- ¿Qué cree que haría la mayoría en una situación similar?
- ¿Encuentra algunas similitudes con situaciones de la vida cotidiana en las que usted estuvo involucrado?

Está claro que los sospechosos tienen que reflexionar sin poder comunicarse entre ellos. ¿Qué hacer? La primera impresión es que la mejor solución es no confesar y pasar –cada uno– un año en la cárcel. Sin embargo, desde el punto de vista de cada individuo, la mejor solución es *confesar,* haga lo que haga la otra persona.

Claro, si el otro opta por el silencio, quien confiesa queda libre y su cómplice va preso por diez años. En cambio, si el otro confiesa también, los dos tendrán que pagar con cinco años de cárcel. Pero, ¿valdrá la pena quedarse en silencio? ¿Tendrá sentido correr el riesgo de *no hablar*?

Desde el punto de vista del "juego solidario", de "cómplices unidos en la desgracia", si uno *supiera* que el otro no va a hablar, ambos pagarían con sólo un año de cárcel. Pero a poco que el otro hable y rompa el idilio del juego en equipo, quien no habló quedará preso *diez años.*

Por supuesto, no hay una respuesta única a este dilema. Y está bien que así sea, porque, si no, no serviría para modelar situaciones reales que podríamos vivir en nuestra vida cotidiana. En un mundo solidario e ideal, la mejor respuesta es callarse la boca, porque uno *sabría* que el otro va a hacer lo mismo. La situación requiere *confianza y cooperación.*

La "estrategia dominante" en este caso, la que contiene el menor de los males posibles, independientemente de lo que haga el otro, es *confesar*.

La Teoría de Juegos establece que, en la mayoría de los casos, los jugadores seguirán esta *estrategia dominante*.

¿Qué haría usted? No se lo diga a nadie, sólo piénsenlo. ¿Confesaría?… ¿Está seguro?

La banda de Moebius. Un desafío a la intuición

No, la banda no tiene que ver con lo que usted está pensando. Se la llama *banda* o *cinta* sin embargo, desde que fue descubierta por Moebius, hace más de ciento cincuenta años, presenta un curioso desafío a la intuición.

Con todo, para aquellos que no la conocen (a la cinta de Moebius), será una forma más de ver cómo se puede *hacer matemática* sin que haya cuentas ni cálculos involucrados. Si lo convenzo, paga doble... Más allá de la broma, por supuesto que los números y los cálculos son necesarios, pero no son imprescindibles para ligarlos con la matemática misma. Las *ideas* también están en otro lado: la sal, la pimienta, el orégano y la páprika son muy útiles para cocinar, aunque no *son* "la" comida. Lo que viene ahora es uno de los platos principales. Obviamente, no es el único, ni mucho menos. Pero es uno entre tantos…

Necesito de su complicidad: ¿tiene tiempo de pensar un rato? Más aún: ¿tiene tiempo para jugar mentalmente un rato? Si realmente se quiere entretener, consígase un papel relativamente grande (puede incluso usar una hoja completa del diario, después de haberla leído, claro) para fabricarse un cinturón o una "vincha", por ponerle algún nombre, un lápiz o marcador y una tijera. Funciona aun mejor si consigue un papel que sea de un color diferente de cada lado.

No es imprescindible que tenga todo eso, porque abajo aparecen algunos dibujos que evitan las manualidades, si es que uno afina su capacidad para pensar. En cualquier caso, allá voy.

Imagínese un cinturón entonces, pero sin hebilla. ¿Alguna vez se puso uno *al revés*? Seguro que la respuesta es afirmativa. Usted coincidirá conmigo en que para que haya un *revés* tiene que haber un *derecho*. Es decir, aunque uno no presta atención (y lo bien que hace) cada vez que tiene un anillo o un cinturón o una vincha, hay un lado que es considerado el de *adentro* y otro, el lado de *afuera*.

Ahora, imagínese que vamos a construir uno de esos cinturones, pero de papel. Uno corta una tira de papel larga y luego *pega los extremos*, como se ve en la figura 1. Es decir, uno *dobla* el papel y hace coincidir los lados A y B.

Figura 1

De esa forma, tiene un cinturón (sea generoso conmigo, es sólo un ejemplo). Ahora bien: cuando uno fabrica el cinturón, como decía antes, hay un lado que es el de *afuera* y otro que es el de *adentro*. Ahora tome la cinta del extremo A y dóblela como se ve en la figura 2. No la rompa, sólo tuérzale 180 grados uno de los extremos.

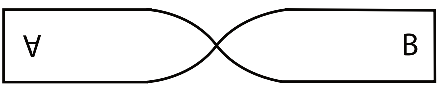


Figura 2

Una vez hecho esto, pegue los extremos tal como están, como se ve en la figura 3. Es decir que los pega como cuando hacía el cinturón, pero uno de los extremos está dado vuelta.

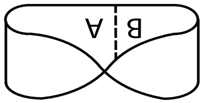


Figura 3

Ahora ya no tiene un cinturón en el sentido clásico. Queda otra superficie. Distinta. Si uno la quiere enderezar, no puede, salvo que la rompa. Tratemos de descubrir en esa nueva superficie el adentro y el afuera. Inténtenlo solo/a. Trate de descubrir *cuál de los dos lados es el de adentro y cuál el de afuera.*

Créame que la gracia de todo esto es que usted descubra algo por sus propios medios. Por supuesto que es válido que siga leyendo, pero ¿por qué privarse del placer de investigar sin buscar la solución?

Lo que sucede (sigo yo), es que la nueva superficie no tiene dos lados como el cinturón. Ahora, ¡tiene uno solo! Es un hecho hipernotable, pero esta nueva cinta es la que se conoce con el nombre de *Cinta de Moebius* (o de Möbius). Esta superficie fue descubierta por un matemático y astrónomo alemán, August Fernand Moebius, en 1858 (aunque también hay que darle crédito al checo Johann Benedict Listing, ya que varios dicen que fue él quien escribió primero sobre ella, aunque tardó más tiempo en publicarlo).

Moebius estudió con Gauss (uno de los más grandes matemáticos de la historia) e hizo aportes en una rama muy nueva de la matemática, como era –en aquel momento– la *topología*. Junto con Riemann y Lobachevsky crearon una verdadera revolución en la geometría, que se dio a conocer como *no-euclideana*.

Antes de avanzar, me imagino que se estará preguntando para qué sirve una cinta así... Parece un juego, pero téngame un poquito más de paciencia. Tome la cinta una vez más. Agarre un lápiz, o un marcador. Empiece a hacer un *recorrido* con el lápiz yendo en cualquiera de las dos direcciones, como si quisiera recorrerla toda en forma longitudinal. Si uno sigue con cuidado y paciencia, descubre que, sin haber tenido que levantar el lápiz, vuelve al mismo lugar, habiendo pasado por las *supuestas* dos caras. Eso, en un cinturón (o en algo equivalente) es imposible. En cambio, en la cinta de Moebius, sí, se puede. Es más: usted, pudo.

Ahora tome uno de sus dedos índice. Comience a recorrer la cinta por el borde. Si uno hiciera lo mismo con un cinturón, digamos con la parte de *arriba*, daría una vuelta completa y volvería al mismo lugar, pero obviamente no pasaría por la parte de abajo. Con la cinta de Moebius, en cambio, sí: contra lo que indicaría la intuición, la banda de Moebius tiene una sola cara y un solo borde. *No hay ni adentro ni afuera, ni arriba ni abajo.* Para los matemáticos, pertenece a las llamadas *superficies no orientables.*

Sigo un poco más. Tome una tijera. Haga un corte longitudinal por la mitad, como indica la figura 4. ¿Qué pasó? ¿Qué encontró? Si no tiene una tijera, hágalo mentalmente y cuénteme lo que descubre.

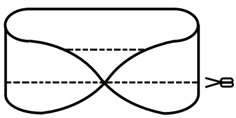


Figura 4

Lo que sucede es que, en lugar de separarse en dos, queda una sola cinta pero ahora *ya no es más una banda de Moebius:* quedó como un cinturón común y corriente, más largo que el original, con dos lados y dos bordes, *pero doblado dos veces.* Y si la vuelve a cortar por la mitad, ahora sí se obtienen dos cintas enrolladas una alrededor de la otra. Y si tiene ganas de hacer más pruebas, intente realizando un corte longitudinal sólo que en lugar de hacerlo por la mitad, como recién, hágalo a *un tercio* de uno de los bordes de la banda de Moebius, y vea qué pasa.

Algunas aplicaciones

En algunos aeropuertos ya hay bandas de Moebius para las cintas que transportan los equipajes o la carga. Esto implica el uso parejo y regular de los dos lados aunque ahora sabemos que, en este tipo de superficies, no podemos hablar *en plural sino en singular: ¡hay un solo lado!* Sin embargo, el aprovechamiento es doble, igual que el rendimiento, y el desgaste se reduce a la mitad. Es decir: este tipo de cintas tiene una vida que duplica las comunes. Por las mismas razones, también las usan las grandes empresas de transporte de carga y de correos.

Otra aplicación: en los casetes de audio, de los que se usan en los grabadores comunes pero que entran en una especie de *loop* o lazo, la cinta está enrollada como una cinta de Moebius. En ellos, se puede grabar de los dos "lados" y es obvio el aprovechamiento mayor de su capacidad.

En ciertas impresoras que funcionan a tinta o en las viejas máquinas de escribir, la cinta que va dentro del cartucho está enrollada formando una banda de Moebius. De esa forma, igual que en los ejemplos anteriores, la vida útil se duplica.

En la década del 60, los Laboratorios Sandi usaron bandas de Moebius para diseñar algunos componentes electrónicos.

En el arte, un candidato natural a usar las bandas de Moebius debería ser M. C. Escher (1898-1972), el increíble y revolucionario artista gráfico holandés que conmovió al mundo con sus dibujos, litografías y murales, por sólo nombrar algunos aspectos de su obra. Y aquí la intuición no falla. En muchas de sus litografías aparece la cinta de Moebius, en particular en una en la que hay hormiguitas circulando sobre una de esas bandas.

Aparece también en historias de ciencia ficción: las más conocidas son *El muro de oscuridad* (*The Wall of Darkness*, de Arthur Clarke) *y Un subte llamado Moebius*.

Por último, una curiosidad más: Elizabeth Zimmerman diseñó unas bufandas aprovechando las cintas de Moebius e hizo una fortuna con sus tejidos.

El interés en las bandas de Moebius no pasa sólo por sus aplicaciones, reales o potenciales. Pasa por la imaginación y el descubrimiento de algo que, *ahora*, parece sencillo y obvio. Hace un poquito más de un siglo y medio, no lo era. Y, como escribí al principio, también es producto de *hacer matemática*.

Problema del tablero de ajedrez

Imaginemos un tablero de ajedrez común y corriente. Es fácil observar que tiene 64 casillas, de las cuales 32 son blancas y las otras 32, negras.

Supongamos, además, que tenemos 32 fichas de dominó.

Ahora bien. ¿Está claro que con las 32 fichas de dominó uno puede cubrir el tablero de ajedrez sin que quede ninguna casilla libre? Yo creo que sí, pero lo invito a pensar alguna forma de hacerlo. Si no se le ocurre ninguna (lo cual creo ciertamente poco posible), ponga en forma horizontal cuatro fichas de dominó, hasta cubrir la primera fila. Haga lo mismo con la segunda fila y repita el proceso para todas las demás, de manera que el tablero quede totalmente cubierto por las fichas de dominó. Claro que cada ficha sirve para cubrir exactamente *dos* casillas del tablero, independientemente de que uno las ponga en forma vertical u horizontal. Hasta acá, una pavada.

Supongamos ahora que un buen señor viene con una tijera y *recorta* los dos casilleros de las puntas de una de las diagonales. Es decir: el tablero tiene dos diagonales (que serían las diagonales del cuadrado). El señor *saca* los dos casilleros que están en las puntas de *una* de las diagonales, cualquiera de las dos. Ahora el tablero tiene 62 casillas. Esto también tiene que ser claro, porque originariamente había 64, y como recortó dos, quedan 62 casillas. Como teníamos 32 fichas de dominó y con ellas cubríamos el tablero de 64 casillas, ya no necesitamos las 32 fichas porque ya no hay tantas casillas. Eliminamos una de las fichas y nos quedamos con 31.

La cuestión es si ahora se puede encontrar alguna manera de cubrir el tablero con esas 31 fichas. (Las reglas son las mismas. Es decir, cada ficha de dominó puede ser utilizada en forma vertical u horizontal.)

Vale la pena pensar el problema, sobre todo porque el desafío es el siguiente: si se puede, muestre al menos una manera de hacerlo. En cambio, si cree que *no se puede*, entonces, deberá encontrar alguna razón que *demuestre* que no hay ninguna forma de hacerlo. Es decir, encontrar algún argumento que *sirva para convencerse* de que, sea cual fuere, la estrategia que uno utilice, fracasará *siempre*.

SOLUCIÓN:

La respuesta es que *no se puede.* No importa lo que uno haga, no importa el tiempo que invierta, ni la paciencia que tenga, ni la destreza que involucre. No alcanzará nunca. Ahora bien: ¿por qué?

Acompáñeme a pensar un argumento que lo demuestre.

Como quedaron 62 casillas en el tablero, si se fija, al haber sacado las dos de las puntas de una diagonal, eso significa que o bien hay dos casillas negras menos, o bien hay dos casillas blancas menos. Luego, si bien el tablero tiene 62 casillas, ahora ya no están repartidas de la misma manera como en el tablero original, que tiene el mismo número de blancas que de negras: o hay 32 negras y 30 blancas, o 32 blancas y 30 negras. En todo caso, el número de blancas y negras ya no es más igual. Y ésta es la clave en el argumento que sigue.

Cualquier intento que uno haga con las fichas de dominó, al apoyar una en el tablero, sea en forma vertical u horizontal, esa ficha siempre cubrirá una casilla blanca y otra negra. Luego, si hubiera alguna manera de distribuir las 31 fichas de dominó, éstas cubrirían 31 casillas blancas y 31 negras. Y sabemos que eso es imposible, porque no hay la misma cantidad de negras y blancas. (Doy por sobreentendido que cuando uno apoya una ficha en el tablero, lo hace de forma tal que cubre una casilla blanca y otra negra.)

Más allá de la solución del problema, lo que pretendo con este ejemplo es invitarlo a reflexionar que, si uno intenta, por la fuerza bruta, tratar de forzar a mano la distribución de las fichas, no sólo tropezará con la dificultad de que no va a poder, sino que intentando con casos particulares y fallando ¡no demuestra nada!

En cambio, el argumento que utilicé más arriba es contundente. ¡No se puede! Y nadie va a poder, porque las 31 fichas de dominó deben cubrir la misma cantidad de blancas que de negras (31 en cada caso) y el nuevo tablero *no las tiene*.

Pensar ayuda, obviamente. Pero si no se le ocurrió, no pasa nada. No es ni mejor ni peor persona. Ni más capaz ni menos. Sólo que todo esto sirve para entrenarnos a pensar. Una pavada, ciertamente...

Truelo

Supongamos que uno tiene –en lugar de un *duelo* entre dos personas– un *truelo*, que sería un enfrentamiento entre *tres* personas armadas. Ganar el truelo significa eliminar a los otros dos adversarios. Supongamos que las tres personas se llaman A, B y C.

Se van a ubicar en los vértices de un triángulo equilátero, es decir, que tiene los tres lados iguales, como muestra la figura 1.

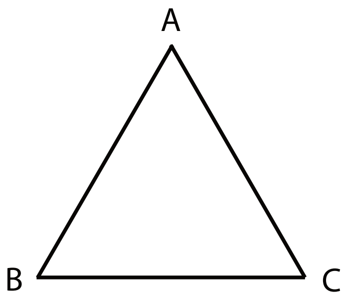


Figura 1

Se sabe que cada vez que tira A, acierta el 33 por ciento (*) de las veces (una de cada tres). Cada vez que tira B, acierta el 66 por ciento de las veces (dos de cada tres). En cambio, la puntería de C es infalible. Cada vez que tira, acierta.

El truelo consiste en que cada uno tire una vez, empezando por A (ya que es la ventaja que le da el resto, teniendo en cuenta que es el peor tirador), luego seguirá B y por último C. El orden establecido se mantiene siempre: A, luego B y después C.

¿Cuál es la mejor estrategia para A?

Es decir, lo estoy invitando a pensar qué es lo que más le convendría hacer *al tirador* con su primer tiro.

SOLUCIÓN:

Para saber qué le conviene hacer a A con su primer tiro, analicemos las consecuencias que tendrían, para él, los tres posibles caminos:

1) tirarle a B con la idea de matarlo;
2) tirarle a C con la idea de matarlo;
3) tirar a errar (a cualquiera de los dos). (Quizás usted *no pensó* en esta posibilidad.)

Claramente, si A tira a matar, le conviene tirarle a C, ya que si le tira a B y acierta, quedarán enfrentados A y C, y le toca tirar a C porque B está muerto.

El mejor escenario posible corresponde al segundo camino: A mataría a C y quedarían enfrentados con B, quien ahora debe tirar. (*)

En cambio, si A elige la tercera posibilidad, veamos qué sucede: quedan los tres vivos como al principio, y ahora el tiro lo tiene B.

¿Qué puede hacer B? No puede darse el lujo de A de tirar a errar, porque sabe que si no mata a C, en el próximo tiro, C va a tratar de matar a quien tiene más posibilidades en la próxima ronda (esto es, tirarle a B). Por lo tanto, B no puede tirar a errar. Tiene que tirar a matar, y debe intentar matar a C.

Si B mata a C, entonces quedan enfrentados A y B, pero A tiene el primer tiro otra vez. (**) Si B *no mata a C*, entonces quedan enfrentados los tres, pero le toca a C, que, por supuesto, acierta siempre y le tiene que tirar a B porque le conviene eliminar al que mayor riesgo representa a él.

MORALEJA: B mata a C, y quedan vivos A y C, pero A tiene el primer tiro otra vez. (***)

Luego, como se ve, considerando (*), (**) y (***), la mejor estrategia para A es tirar a errar en el primer tiro.[19]

El juego del "numerito"

Cuando era chico, mi padre me enseñó un juego muy divertido. Lo jugamos muchísimas veces y consumíamos el tiempo entretenidos, pensando. Más tarde, con el correr del tiempo (y el fallecimiento de mi querido viejo), sólo lo jugué con algunas personas y amigos, pero en quien más prendió fue en Víctor Hugo (Morales). Con él también lo jugué muchísimo, en nuestros infinitos viajes en avión y en las largas esperas en hoteles, aeropuertos, durante los campeonatos del mundo o, incluso, en viajes en auto. El juego consiste en que cada participante elija cuatro de los diez dígitos posibles, sin repetir, y los anote en alguna parte. Como el orden en que estén escritos *importa*, no es lo mismo haber elegido

[19] En realidad, acertar uno de tres tiros *no* es exactamente lo mismo que el 33 por ciento, de la misma forma que acertar dos de tres *no* es exactamente el 66 por ciento. A los efectos del ejemplo, preferí *redondear* los números, y espero que el lector sea *generoso* con esta aproximación también

1 2 3 4

que

4 1 3 2

Si bien los números son los mismos, la posición en la que aparecen los distingue. Digamos, para fijar las ideas, que yo elijo

1 4 2 5

y los anoto. A su vez, el otro jugador, eligió (sin que yo lo sepa, ni que él vea los míos)

0 7 2 6

El objetivo del juego es, naturalmente, descubrir el número (o el "numerito" como lo solía llamar mi padre) que tiene el rival.

Empieza alguno de los dos (y se verá después que ser el primero se compensa con lo que puede hacer el otro) diciendo un posible número de cuatro cifras que supone tiene su rival.

Obviamente, si uno acierta con este intento, abandona el juego inmediatamente y vuela a Las Vegas y Montecarlo. Luego de comprar ambas ciudades, vuelve a su país de origen como Rey del Universo. Para eso, tiene que probar que siempre puede acertar el número que eligió el otro, sea el que sea.

Bromas aparte, uno tiene que empezar con algún número y, por eso, elige *tentativamente*.

Digamos que empezó mi rival, y eligió decir:

8 4 7 2

Como el número que yo elegí es el 1 4 2 5, le contesto que tiene uno *bien* y uno *regular*.

¿Cómo se entiende esto? Es que él acertó con el número 4 pero además acertó la posición del 4, porque lo ubicó en el segundo lugar. Ése es el dígito que está bien, aunque no le diga cuál es. Yo sólo respondo un "bien".

¿Cuál es el *regular*? Al decir el 8 4 7 2 también acertó con el número 2, que yo elegí entre mis dígitos, pero en este caso erró la posición. Mientras que yo tengo el número 2 ubicado en la segunda posición, mi rival lo ubicó en la cuarta.

Y ahora, me toca a mí. Repito el proceso, intentando acertar con un intento. El juego continúa hasta que uno de los dos llega a descubrir el numerito del otro. Si el que llega primero es el que empezó primero, entonces el otro participante tiene un tiro, para completar ambos la misma cantidad de intentos. En cambio, si el que llega primero es el que empezó segundo, el juego termina ahí.

El problema resulta apasionante, y ofrece una multiplicidad de alternativas para pensar. No es fácil, pero tampoco difícil, y sirve de entrenamiento mental. Lo invito a que lo pruebe.

Más pedestre, y para evitar algunas cuestiones logísticas menores:

a) si alguien intenta con un número y no acierta con ninguno de los dígitos, la respuesta de la otra persona será: "Todos mal". Aunque uno no lo crea en principio, es muy provechoso empezar así, aunque más no sea porque elimina de inmediato cuatro de los diez dígitos posibles que se pueden elegir.

b) Hay veces en que uno llega a reducir las posibilidades a dos números posibles, digamos 1 4 2 5 y 1 4 2 9, por poner un ejemplo. En este caso, con el pasar del tiempo Víctor Hugo me convenció de que si alguien llega a esa situación, debería ganar, salvo que la otra persona en el tiro que le queda acierte sin tener que optar.

Como usted advierte, las reglas las establece uno. Y en principio la Corte de La Haya no ha recibido quejas, al menos, hasta la última vez que yo chequeé, que fue en septiembre de 2006.

Números naturales consecutivos

Ahora que se ha puesto de moda hablar sobre la Teoría de Juegos,[20] vale la pena plantear alguno de los problemas más característicos y atractivos que hay. El que sigue, justamente, es un desafío precioso y sutil. Es además muy interesante para pensar.[21]

[20] Los ganadores del Premio Nobel de Economía 2005, el israelí Robert J. Aumann y el norteamericano Thomas C. Shelling, lo consiguieron gracias a sus aportes a la Teoría de Juegos. La propia Academia Sueca, encargada de decidir a quiénes condecora, señaló: "¿Por qué algunos grupos de individuos, organizaciones o países tienen éxito en promover cooperaciones y otros sufren y entran en conflicto?

"Tanto Aumann como Schelling han usado en sus trabajos la Teoría de Juegos para explicar conflictos económicos como la batalla de precios y situaciones conflictivas que llevan –a algunos de ellos– a la guerra". Schelling dijo que no conocía personalmente al coganador, pero que mientras "él se dedica a *producir avances* en la Teoría de Juegos, yo soy quien aprovecha de lo que él hace para aplicarlo en mi trabajo. Es decir: él produce, yo uso lo que él hace".

[21] Este problema me lo contó Ariel Arbiser, un entusiasta de todo lo que tenga que ver con la Teoría de Juegos y la Lógica. Ariel me comentó que este problema se lo escuchó relatar en un curso de posgrado ("Razonando acerca del conoci-

Supongamos que hay dos personas que van a jugar al siguiente juego. A cada una se le coloca en la frente un número natural (ya sabemos que se llaman *naturales* los números 1, 2, 3, 4, 5…). Sin embargo, la particularidad es que los números van a ser *consecutivos*. Por ejemplo, el 14 y el 15, o el 173 y el 174, o el 399 y 400. Obviamente, *no* les dicen qué número tiene cada uno, pero ellos, a su vez, *pueden ver el número del otro*. Gana el juego quien es capaz de acertar qué número tiene escrito en la frente, aunque dando una explicación de por qué dice lo que dice.

Se supone que ambos jugadores razonan perfectamente y sin errores, y esto es un dato no menor: saber que los dos tienen la misma capacidad de razonamiento y que no cometen errores es crucial para el juego (aunque no lo parezca). La pregunta es: ¿será posible que alguno de los competidores pueda ganar el juego? Es decir, ¿podrá en algún momento uno de ellos decir "*yo sé que mi número es n*"?

Por ejemplo: si usted jugara contra otra persona, y viera que en la frente de su rival hay pintado un número 1, su reacción debería ser inmediata. Ya ganó, porque podría decir: "Tengo el 2". Con certeza usted podría afirmar que su número es el 2 porque, como no hay números más chicos que 1 y ése es justo el que tiene el otro competidor, usted *inexorablemente* tiene el 2. Éste sería el ejemplo más sencillo. Ahora, planteemos uno un poco más complicado.

Supongamos que la otra persona tiene pintado el 2. Si nos dejamos llevar por las reglas, en principio, no se podría decir nada con certeza, ya que podríamos tener o bien el 1 o bien el 3.

miento") al profesor de origen indio Rohit Parikh, quien trabaja en la City University de Nueva York. Parikh utilizó este ejemplo (entre otros) para ilustrar problemas autorreferentes del conocimiento, recurriendo incluso a *lógicas no clásicas*.

Supongamos que usted ve que la otra persona tiene pintado el 2. Si se dejara llevar por las reglas que le fueron explicadas, en principio no podría decir nada con certeza. Porque, en principio, podría tener el 1 o el 3. Sin embargo, aquí interviene otro argumento: si su rival, que es tan *perfecto* como usted, que razona tan rápido como usted, que puede elaborar ideas exactamente igual que usted, no dijo nada hasta ahí, es porque no está viendo que usted tiene el 1. Si no, ya hubiera gritado que tiene el 2. Pero como no dijo nada, eso significa que usted *no tiene el 1*. Por lo tanto, aprovechando que él no dice nada, es usted el que habla y arriesga: *yo tengo el 3*. Y cuando le pregunten: "¿Y cómo lo sabe, si está viendo que él tiene el 2? ¿Qué otros argumentos usó?", usted contestará: "Mire, yo vi que él tenía el 2, pero como no dijo nada, eso significa que yo no tenía el 1, porque, si no, él hubiera sabido inmediatamente qué número tenía". Y punto.

Es decir, en la Teoría de Juegos no importa sólo lo que hace usted, o lo que ve usted, sino que también importa (y mucho) lo que hace el otro. Aprovechando lo que hace el otro (en este caso, lo que no hizo, que es también una manera de hacer), es que usted pudo concluir qué número tenía.

Hagamos un paso más. Si usted viera que el otro tiene un 3 en la frente, entonces, eso significaría que usted, o bien tiene el 2 o el 4. Pero si tuviera el 2, y su contrincante está viendo que lo tiene pero usted no habla, no dice nada rápido, entonces, le estará indicando que él no tiene el 1. Su rival diría: "*Yo tengo el 3*". Y ahí está el punto. Como su rival no dijo nada, eso significa que usted no tiene el 2, sino que tiene el 4. Y usted se apura y grita: "*Yo tengo el 4*". Y gana.

Con esta misma idea, uno podría avanzar aún más y usar números cada vez más grandes. ¿Podrá ganar alguno entonces? La pregunta queda abierta.

Este tipo de argumentos (llamados *inductivos*) requieren de razonamientos hilvanados, finos y sutiles, pero todos comprensibles si uno *no* se pierde en la maraña de las letras. Le propongo, por lo tanto, que se entretenga un rato pensándolo solo.

Aunque no parezca, todo esto *también* es hacer matemática. La discusión queda centrada en cuán rápido razonan los jugadores y cuánto tiempo debería esperar para gritar su número o hacer una declaración que se base en lo que el otro no dijo o no declaró.

Uno podría suponer que lo que quedó aquí descripto es una paradoja, porque aparece como posible que sólo sabiendo el número del otro y con la regla de que ambos participantes tienen números consecutivos, uno puede deducir el número propio. Lo interesante es que los datos con los que se cuenta son más de los que uno advierte en principio. Los silencios del otro, o el tiempo que tarda en no decir lo que debería al ver el número que usted tiene, le estarán dando una información adicional. En algún sentido, es singular también cómo el conocimiento va cambiando con el paso del tiempo. En la vida real, uno debería aplicar también este tipo de razonamientos, que se basan no sólo en lo que *uno* percibe, sino también en lo que *hace (o no hace) el otro.*

Problema de los siete puentes de Königsberg

La matemática tiene mala prensa. Eso es obvio. Yo quiero empezar una campaña para modificar la percepción que hay de ella. Me gustaría que le diéramos una segunda oportunidad, una segunda chance.

Hoy por hoy, los chicos ya vienen "elegidos" de antemano: la matemática es aburrida, pesada, difícil… O en todo caso, es así sólo si la seguimos enseñando como hasta ahora. Está claro que los docentes hemos fracasado en nuestro intento de comunicarla, de transmitirla. El propósito de este libro es tratar de revertir la imagen y de mostrar ángulos distintos, otras “formas” de hacer matemática que no sean las clásicas del colegio.

Sería interesante aproximarse a ella tratando de no dar respuestas a preguntas que uno *no* se hizo, sino al revés: mostrar problemas, disfrutar de pensarlos y aun de la frustración de *no* poder resolverlos, abordarlos de modo diferente, y que sean, en todo caso, disparadores de preguntas, de nuevas conjeturas, de nuevos desafíos, hasta poder descubrir el lugar donde está escondida tanta belleza.

Quiero presentarle un problema, ingenuo si se quiere. El enunciado es muy sencillo y uno puede sentarse inmediatamente a pensarlo. Eso sí: aguántese un rato el fastidio si no le sale. Pero dedíquele un tiempo razonable, digamos, unos veinte minutos. Si le da para más, métale para adelante. Si no, puede pasar inmediatamente a la respuesta, aunque será una lástima, porque se va a perder el placer de pensar, de dudar, de frustrarse, de enojarse, de intentar de nuevo... En definitiva, se privará de gozar. Es su decisión. La solución está más abajo, y también aparece una conclusión sobre lo que es *hacer* matemática.

Todo transcurre a mediados del siglo XVIII, en Königsberg, una ciudad prusiana (devenida luego en Kaliningrado, hoy Rusia) que es atravesada por un río, el Pregel. Además, en medio del río hay dos islas. Los pobladores construyeron *siete puentes* para cruzar de una orilla a la otra, pasando por alguna de las islas. La distribución es la que se ve en el gráfico 1. Hay cuatro sectores de tierra A, B, C y D, y siete puentes, numerados del 1 al 7.

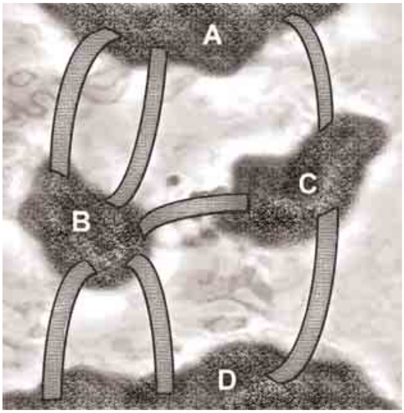


Gráfico 1

La pregunta es la siguiente: empezando en cualquier parte de la geografía, ¿es posible recorrer los siete puentes sin pasar dos veces por el mismo? Es decir, si uno se para en cualquier lugar (incluso en cualquiera de las dos islas) e intenta cruzar los siete puentes sin repetirlos, ¿se puede?

Por supuesto, la tentación mía es escribir la respuesta aquí mismo, y la tentación del lector es leer la respuesta sin pensar más que un minuto. ¿Y si lo intenta solo/a? Quizá se entretenga y valore el desafío, aunque en principio (o "en final") no le salga. Es sólo una sugerencia…

SOLUCIÓN:

El problema no tiene solución. Es decir, no sé cuánto tiempo le dedicó usted, pero en lo que sigue voy a tratar de explicar por qué no hay manera de recorrer los siete puentes sin repetir ninguno. Pero antes, voy a contar una breve historia. Mire el gráfico 2:

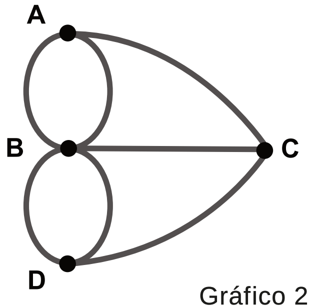


Gráfico 2

¿Puede relacionarlo con el problema anterior? Es verdad que ahora ya no hay más islas, ni puentes. Hay sólo puntos o vértices que hacen el papel de la tierra firme en el gráfico original, y los arcos que los unen son los que antes hacían el papel de puentes. Como se ve, el problema no cambió. El gráfico sí, pero en esencia todo sigue igual. ¿Cuál sería la nueva formulación del problema? Uno podría intentarlo así: "Dada la configuración del gráfico 2, ¿se puede empezar en cualquier punto o vértice y recorrerlo sin levantar el lápiz ni pasar dos veces por el mismo arco?". Si lo piensa un instante, se dará cuenta de que no hay diferencia conceptual. Una vez aceptado esto, pensemos juntos por qué *no se puede.*

Contemos el número de arcos que salen (o entran) de cada vértice.

Al vértice A llegan (o salen) tres arcos.
Al vértice B llegan (o salen) cinco arcos.
Al vértice C llegan (o salen) tres arcos.
Al vértice D llegan (o salen) tres arcos.

Es decir, en todos los casos, entran (o salen, pero es lo mismo) un número *impar* de arcos. Ahora supongamos que alguien ya comenzó el camino en alguna parte, salió de algún vértice y cayó en otro que no es ni el inicial ni el final. Si es así, entonces a ese vértice llegó por un arco y tendrá que salir por otro. Tuvo que haber usado un arco para llegar, porque sabemos que ése no es el inicial, y sabemos que tiene que usar un arco para salir, porque ése no es el final.

¿Cuál es la moraleja? Una posible es que si uno *cae* en algún vértice en el recorrido, que no es el inicial ni el final, entonces, el número de arcos que salen (o entran) tiene que ser *par,* porque uno necesita *llegar* por uno y *salir* por otro. Si eso es cierto, ¿cuántos vértices puede tener, en principio, un número de arcos que entran o salen que sea *impa*r?

(Piense la respuesta… Si quiere, claro.)

La respuesta es que hay sólo *dos* vértices que pueden tener un número *impar* de arcos que entran o salen, y éstos son, eventualmente, el vértice *inicial* (que es el que uno elige para *empezar el recorrido*) y el vértice *final* (que es el que uno eligió como final del recorrido).

Como sabemos (porque ya hicimos la cuenta más arriba) que a todos los vértices llega o sale un número *impar* de arcos, entonces, el problema *no tiene solución* porque, de acuerdo con lo que hemos visto, a lo sumo *dos* de los vértices pueden tener un número *impar* de arcos que llegan. Y en nuestro caso (el de los puentes de Königsberg), todos tienen un número impar.

VARIAS OBSERVACIONES FINALES

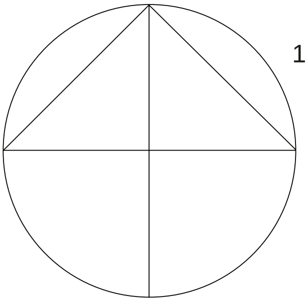
a) Proponer un modelo como el que transformó el problema original (el de los siete puentes) en un gráfico (el 2) *es hacer matemática.*

b) Este problema fue uno de los primeros que inauguró una rama de la matemática que se llama *teoría de grafos*. Y también la topología. Uno de los primeros nombres que tuvo la *teoría de grafos* fue el de *geometría de posición*. Con el ejemplo de los puentes de Königsberg se advierte que no interesan los tamaños ni las formas, sino las posiciones relativas de los objetos.

c) El problema es ingenuo, pero el análisis de por qué no se puede requiere pensar un rato. El primero que lo pensó y lo resolvió (ya que muchos fracasaron), fue un suizo, Leonhard Euler (1707-1783), uno de los matemáticos más grandes de la historia. A él se le ocurrió la demostración del teorema que prueba que no importa qué camino uno recorra, nunca tendrá éxito. Entender que hace falta un teorema que demuestre algo general, para cualquier grafo (o dibujo), también es *hacer matemática*. Es obvio que una vez que uno tropezó con un problema de estas características (véase más abajo) se pregunta cuándo se puede y cuándo no se puede encontrar un camino. Euler dio una respuesta.

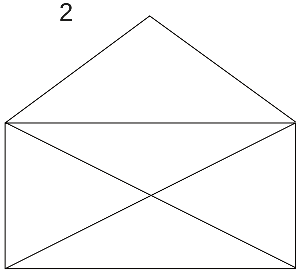
d) En la vida cotidiana, tenemos ejemplos de grafos en distintos lugares, pero un caso típico son los "modelos" que se usan en todas las grandes ciudades del mundo para comunicar cómo están diseminadas las estaciones de subte y las líneas asociadas. Allí no importan las distancias sino las posiciones relativas. Los *vértices* son las estaciones, y las *aristas* son los tramos que unen las estaciones.

e) Aquí abajo aparecen algunos grafos; decida si se pueden recorrer, o no, sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por el mismo arco. En caso que se pueda, encuentre un trayecto. Y en caso que *no*, explíquese a usted mismo la razón.

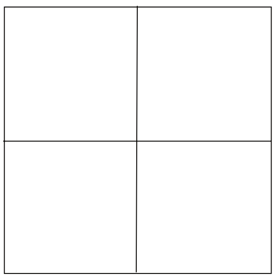


1

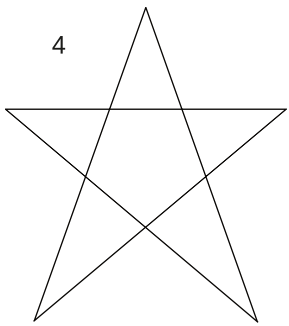
2



3



4



SOLUCIONES:

El dibujo 1 tiene solución, porque de todos los vértices sale (o entra) un número PAR de arcos.

El dibujo 2 tiene solución, porque hay sólo dos vértices a los cuales llega (o sale) un número IMPAR de arcos.

El dibujo 3 no tiene solución, porque hay cuatro vértices a los que llega (o sale) un número IMPAR de arcos.

El dibujo 4 tiene solución, porque hay sólo dos vértices a los cuales llega (o sale) un número IMPAR de arcos.

Polo Norte

Éste es un problema muy interesante. Estoy seguro de que mucha gente escuchó hablar de él y supone (con razón, por cierto) que puede dar una respuesta inmediata. Con todo –aun para ese grupo de personas–, le pido que siga leyendo porque se va a sorprender descubriendo que, además de la solución "clásica", hay muchas otras que quizá no se le ocurrieron. Y para quien lea el problema por primera vez, creo que va a disfrutarlo un rato. Aquí va.

Para empezar, voy a suponer que la Tierra es una esfera *perfecta*, lo cual –obviamente– no es cierto, pero a los efectos de este problema pensaremos que lo es. La pregunta, entonces, es la siguiente: ¿existe algún punto de la Tierra en el que uno se pueda parar, caminar un kilómetro hacia el sur, otro kilómetro hacia el este y luego un kilómetro hacia el norte y *volver* al lugar original?

Por las dudas, como voy a escribir la respuesta en el párrafo que sigue, si nunca lo pensó antes, éste es el momento de detenerse y hacerlo; *no lea* aún lo que sigue más abajo. Gracias. Vuelva cuando quiera, que hay más…

Para aquellos que *sí* escucharon hablar de este problema, la solución les parece inmediata. Basta colocarse en el Polo Norte, caminar un kilómetro hacia alguna parte (forzosamente eso es hacia el sur), luego caminar un kilómetro hacia el este (lo cual lo hace caminar por un paralelo al Ecuador) y por último, al caminar hacia el norte otra vez, uno recorre un trozo de meridiano y termina nuevamente en el Polo Norte, que es donde había empezado.

Hasta aquí, nada nuevo. Lo que sí me parece novedoso es que esta respuesta, que parece única, en realidad no lo es. Peor aún: *hay infinitas soluciones.* ¿Se anima a pensar ahora por qué?

Como siempre, le sugiero que no avance si no lo pensó, porque la gracia de todo esto reside en disfrutar uno de tener un problema. Si la idea se reduce a leer el problema y la solución en su conjunto, es como ir a ver una película de suspenso con las luces encendidas, conociendo al asesino, o viéndola por segunda vez. ¿Qué gracia tiene?

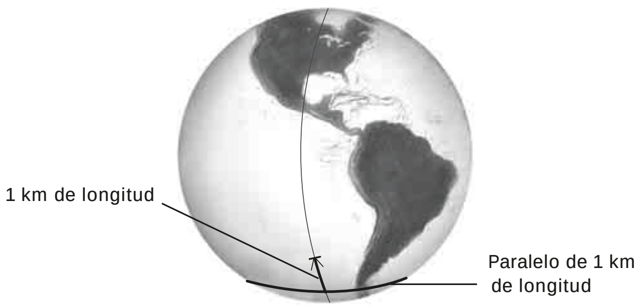
Antes de las soluciones, me quiero poner de acuerdo en algunos nombres. Si la Tierra es una esfera perfecta, cada círculo que uno pueda dibujar sobre ella que pase simultáneamente por el Polo Norte y el Polo Sur, se llama *círculo máximo.* Hay, entonces, *infinitos* círculos máximos. Pero *no son los únicos.* Es decir, hay otros círculos que se pueden dibujar sobre la superficie de la Tierra, que son máximos, pero que no pasan ni por el Polo Norte ni por el Polo Sur. Como ejemplo, piense en el Ecuador.

Mejor aun: imagine una pelota de fútbol. Uno podría identificar *un* polo sur y *un* polo norte en la pelota, y dibujar allí círculos máximos. Al mismo tiempo, puede girar la pelota y fabricarse un nuevo polo norte y un nuevo polo sur. Por lo tanto, puede graficar otros círculos máximos.

También se puede pensar en una pelotita de tenis y en gomitas elásticas. Uno advierte que tiene muchas maneras de enrollar la gomita alrededor de la pelotita. Cada vez que la gomita da una vuelta entera a la pelota (o a la Tierra), ese recorrido es un círculo máximo.

Ahora, la idea es pararse en el Polo Sur. A medida que uno va hacia el norte, los paralelos (al ecuador) son cada vez de mayor longitud. Obviamente, el ecuador mismo es el más largo. Caminamos hacia el norte hasta llegar a un paralelo que mida un kilómetro (es decir que al dar vuelta a la Tierra *caminando* por encima de ese paralelo se recorra un kilómetro). Desde ese paralelo, caminamos un kilómetro hacia el norte, por un círculo máximo, y paramos allí: ése es el punto que buscamos. ¿Por qué? Comprobémoslo.

Si uno empieza allí y recorre un kilómetro hacia el sur, cae en algún punto del paralelo que medía un kilómetro al dar toda la vuelta. Por lo tanto, cuando caminemos un kilómetro hacia el este, habremos dado una vuelta completa y caeremos en el mismo lugar. Luego, desde allí, cuando volvamos a caminar hacia el norte un kilómetro, apareceremos en el lugar de partida.



Y eso no es todo. Se pueden encontrar muchos más, *infinitos* puntos más. Le propongo un camino para que desarrolle usted mismo: piense que en la solución que di recién había que encontrar un paralelo que midiera un kilómetro de longitud. Esto permitía que, cuando uno caminaba hacia el este un kilómetro, terminaba dando una vuelta entera y quedaba en el mismo lugar. Bueno, ¿qué pasaría si, saliendo del Polo Sur, en lugar de haber encontrado un paralelo que midiera *un kilómetro*, encontramos un paralelo que mida *medio kilómetro*? La respuesta es que haciendo lo mismo que en el caso anterior, al caer en ese paralelo y caminar un kilómetro, uno terminaría dando *dos vueltas* alrededor de la Tierra y volvería al punto inicial. Y como usted se imaginará, este proceso puede seguirse indefinidamente.

MORALEJA: Un problema que parecía tener una sola solución tiene, en realidad, infinitas. Y aunque parezca que no, esto *también* es hacer matemática.

Fixture (a la Dubuc)

Lo que sigue es la historia de cómo un matemático argentino resolvió un problema ligado con el fútbol y la televisión. No sé si habrá prestado atención alguna vez a un *fixture* de fútbol, la programación de todos los partidos que se juegan en el año. Un *fixture* estándar consiste en 19 fechas en las que los 20 equipos jueguen todos contra todos. Además, se supone que semana tras semana alternan su condición de local y visitante. Confeccionarlo no debería ser una tarea difícil. Sin embargo, lo invito a que lo intente para comprobar el grado de dificultad que presenta.

Este problema está resuelto (matemáticamente) hace ya mucho tiempo (con la salvedad de que los equipos tengan que repetir *una única vez su condición de local o visitante*). Desde que se juega fútbol en la Argentina siempre se han podido hacer los ajustes necesarios para que, por ejemplo, Racing e Independiente no jueguen de local en la misma fecha, y lo mismo los dos equipos de Rosario, La Plata o Santa Fe.

Pero la televisión cambió todo. Cuando los partidos se jugaban todos el día domingo (sí, aunque parezca mentira, antes todos los partidos se jugaban los domingos a la misma hora, pero eso correspondía a otra generación de argentinos), todo era relativamente sencillo. Después, la televisación de partidos obligó a ciertas restricciones: había que seleccionar un partido para televisar los viernes, y tenía que ser un partido que enfrentara a un equipo de los denominados “grandes” (River, Boca, Racing, Independiente y San Lorenzo), que se jugara en la capital, con uno de los denominados “chicos” (éstos van variando de acuerdo con el campeonato, pero creo que se entiende la idea).

Después se agregó un partido para televisar los sábados, con la condición de que tenía que ser una transmisión originada en el interior del país (Córdoba, Rosario, La Plata, Santa Fe, Mendoza, Tucumán, etcétera) y debía involucrar a un equipo de los “grandes” (grupo al que se permitía añadir a Vélez). Luego se sumó un partido para televisar los lunes entre dos clubes “chicos”. Y para complicar más las cosas, aparecieron los codificados. Y después, “El clásico del domingo”. Además, había que dejar algún partido atractivo para que se pudiera ver por primera vez en el programa *Fútbol de primera* el domingo a la noche.

Si uno intenta hacerlo a mano (y créame que hubo mucha gente que se lo propuso) son tantos los ajustes que hay que hacerle a un *fixture* para que cumpla con todas esas restricciones, que ya se dudaba de que un *fixture* así existiera, o que fuera posible armarlo. ¿Qué hacer? En ese momento, enero de 1995 (hace ya casi doce años), la gente de la empresa Torneos y Competencias (dedicada a la difusión de deportes en radio, televisión y medios gráficos) me derivó el problema para ver si algún matemático (como yo sostenía) era capaz de presentar un programa de partidos a la AFA (Asociación del Fútbol Argentino) que contemplara todas las restricciones señaladas. Me reuní con Carlos Ávila, el creador de la empresa, quien es un gran intuitivo, y finalmente entendió que lo mejor que podíamos hacer era consultar con alguien que supiera. Bien, pero, ¿quién sabría?

–Mirá –le dije–, en la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA hay matemáticos a quienes les podría plantear el problema. Son ellos los candidatos naturales para resolverlo.

–Dale para adelante –me dijo.

Y le di. En realidad, le di el problema al doctor Eduardo Dubuc, profesor titular del departamento de Matemáticas desde hace años, y uno de los más prestigiosos que tiene el país. Su vida circuló por distintas ciudades de los Estados Unidos, Francia y Canadá, y hace ya algunos años reside en la Argentina.

Me formuló las preguntas lógicas para alguien que sigue el fútbol sólo como aficionado. Cerró la carpeta que contenía los datos, se sacó los anteojos que usa siempre, mi miró en silencio durante un rato y me preguntó:

–¿Vos estás seguro de que este problema tiene solución?

–No sé, pero seguro que si la tiene, vos sos la persona para encontrarla.

Unos días más tarde, me entregó un *fixture* junto con algunos comentarios escritos. Recuerdo uno en particular: "El problema está resuelto de la mejor manera posible".

Yo estaba entusiasmado, pero le dije:

–Eduardo, ¿qué significa "la mejor manera posible"? Necesitamos que sea la *mejor* y no la mejor *posible*.

–Como ya vimos el día que me trajiste el problema, es imposible que en todas las fechas haya un partido entre dos clubes *chicos*, ya que hay sólo seis (en ese momento eran Deportivo Español, Argentinos Juniors, Ferro, Platense, Lanús y Banfield). En todo el campeonato, jugarán entre ellos 15 partidos. Aunque logremos hacerlos jugar a todos en fechas diferentes, igualmente habrá cuatro semanas en las que va a faltar un partido para los días lunes.

Una obviedad. Sin embargo eso ponía en peligro todo. Si ya había una dificultad irresoluble, ¿qué quedaría para el resto? ¿Es que no habría manera de poder ordenar todo el caos que había siempre con el programa de los partidos? Sonaba a fracaso. Sin embargo, Eduardo me insistió.

–Fijate bien en el *fixture* que te entrego y leé mis apuntes.

Y los leí. Digo, leí sus apuntes. Aquí van.

Tomá un *fixture* estándar (¿no debería decir *standard*?) cualquiera. Si intercambio dos equipos (por ejemplo, Boca juega en lugar de Ferro, y Ferro en lugar de Boca), se obtiene otro *fixture* (que sigue siendo estándar).[22] Así se obtienen distintos *fixtures* y puede verse[23] que hay en total

2.432.902.008.176.640.000 *fixtures* estándar distintos.

Es decir, un número que llega casi a los dos trillones y medio, y que se obtiene multiplicando los primeros veinte números naturales (o, lo que es lo mismo, calculando el factorial de 20, que se escribe 20!).

20 . 19 . 18 . 17 . ... . 5 . 4 . 3 . 2 . 1

[22] Como dijimos, un *fixture* estándar consiste en 19 fechas en las que los 20 equipos jueguen todos contra todos y que lo hagan alternadamente de visitante y de local. El intercambio entre Boca y Ferro, por ejemplo, no altera esto. Ningún intercambio de ningún equipo por otro lo puede hacer. Eso sí: puede modificar, eventualmente, las otras condiciones, pero no deja de ser estándar.

[23] Ya hemos mencionado que el número factorial de 20 (y se escribe 20!), o en general el factorial de un número natural *n* (se escribe *n!*), sirve para contar todas las permutaciones de 20 (o de *n*) elementos.

Claro, si hubiera sólo 6 equipos, habría 720 posibles *fixtures*, y ese número se obtendría multiplicando los primeros seis números:

$$6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 720$$

Es posible que, en algunos casos, el intercambio de dos equipos permita generar un nuevo *fixture equivalente* al que le dio origen. Es decir, si el original cumplía con ciertas restricciones, el nuevo también lo hará. Y si el primero no cumplía algunas, el derivado tampoco lo hará. Por ejemplo, los equipos "grandes" que formaban una pareja (porque no podían jugar de local el mismo día, como era el caso de River y Boca, o Newell's y Central) podían intercambiarse entre sí y el resultado no variaría.

Lo mismo valía para los equipos "chicos", o los que formaban "pareja" en el interior (como Colón y Unión o, en ese momento, Talleres e Instituto en Córdoba).

Una vez hechas estas observaciones, el número total de *fixtures diferentes* es de

$$1.055.947.052.160.000$$

que son casi 1.056 *billones* de *fixtures*. ¡Una barbaridad!

Surgía inmediatamente una pregunta: ¿quién los revisaría para saber cuál o cuáles eran los que servían? Y un tema clave, muy importante: ¿cuánto tiempo tardaría en examinarlos todos? A razón de investigar 5.000 *fixtures* por segundo (sí, dice *5.000 fixtures por segundo*, que es lo que se podía hacer en ese momento con un programa adecuado en las computadoras PC más veloces), llevaría casi *10.000 años* hacerlo.

Había que intentar otra cosa. Probar a mano uno por uno no resultaría. Y Dubuc ya lo sabía. Pero se le ocurrió una idea que serviría para dar un salto cualitativo muy importante y, eventualmente, llegar a la solución.

Hay un método matemático que se conoce con el nombre de "recocido simulado", y Dubuc decidió probar con él. Para ello, primero hay que empezar por calificar los *fixtures*. ¿Qué quiere decir esto? Elijan un *fixture* estándar cualquiera. Lo más probable es que no cumpla la mayoría de los requisitos que se necesitan. Entonces, a Eduardo se le ocurrió que le iba a poner una multa por cada restricción que no cumpliera. Por ejemplo, si en el *fixture* que había elegido, en la primera fecha no había partido para los viernes, le ponía tres puntos de multa. Si le faltaba partido desde el interior, dos puntos de penalidad. Y así siguió hasta agotar la primera fecha. Pasó entonces a la segunda, y esencialmente las recorrió todas acumulando las multas que sufrían en el camino. Al finalizar el proceso, ese *fixture* tenía adosada una cantidad de puntos en contra, es decir, una multa.[24]

En definitiva, cuanto mayor fuera la multa de un *fixture*, peor era. Como se advierte, el objetivo de Eduardo era encontrar el o los *fixtures* que tuvieran multa *cero*. Es decir, aquellos programas de partidos que no infringieran *ninguna* de las normas pedidas. ¿Existirían? ¿Tendría solución el problema?

El proceso de revisar todas las alternativas estaba (y está) fuera de las posibilidades, ya que involucraría más de diez mil

[24] En el lenguaje matemático, Eduardo definió la *función multa*, que tiene como dominio todos los posibles *fixtures* y como codominio todos los números enteros positivos y el cero. Lo que trataba de hacer era encontrar mínimos absolutos de esta función.

años, sin embargo, la diferencia ahora era que el problema estaba *cuantificado*. Es decir, se contaba con una función *multa*, y eso es lo que posibilita un tratamiento matemático para minimizar esa función.

Aquí es donde interviene el *recocido simulado*. Una aclaración muy importante: seguro que quienes concibieron, usan o usaron el recocido simulado no tuvieron *in mente* resolver un problema de estas características. Pero ahí también reside la capacidad de un matemático para saber que hay una herramienta que, en principio, no parece haber sido construida para esta ocasión en particular y, sin embargo, con una adaptación no sólo se transformó en *útil*, sino que permitió encontrar la solución.

A grandes rasgos, el sistema funciona así. Imagine que todos los *fixtures* posibles (los más de 1.000 billones) están escritos, cada uno en una hoja de papel, y metidos dentro de una pieza. Uno entra a la pieza repleta de *fixtures* con un pinche en la mano, como si se tratara de recoger las hojas en una plaza. Más aún: en cada hoja que hay dentro de la pieza, no sólo hay un *fixture* escrito, sino que además está agregada la *multa* que le corresponde, que, como vimos, depende del grado de incumplimiento de las restricciones pedidas.

Entonces, uno procede así. Ni bien entra, pincha un *fixture* cualquiera y se fija en la multa que tiene asignada. Por supuesto, si uno tuviera la suerte de que ni bien empieza encuentra un *fixture* con multa *cero*, detiene el proceso inmediatamente, sale rápido de la pieza y se va a comprar un billete de lotería, a jugar al casino y apostar todo lo que tenga.

Cuando uno pincha el *fixture* y se fija en la multa que tiene asignada, decide caminar en alguna dirección. Cualquier dirección. Pincha alguno de los vecinos (*fixtures*), y si la multa aumentó, entonces, no avanza en esa dirección. Si en cambio, al pinchar un vecino, la multa disminuye, entonces se encamina por ese lugar, seleccionando los que va encontrando en ese trayecto en la medida que siempre vaya disminuyendo la multa.

Si en algún momento llega a un lugar donde, independientemente del camino que elija, la multa aumenta siempre, entonces habrá llegado a un *mínimo local*, o a una especie de cráter.

Imagínese caminando por un camino montañoso, en el que la multa indicara la altura a la que se encuentra. De pronto, llegará a un lugar donde no importa para qué lado elija avanzar, para todas partes se *sube*, pero se está todavía lejos del nivel del mar. ¿Qué hacer? Hay que permitirse trepar para luego poder llegar más abajo por otro camino. Ésa es clave en el proceso.

El método del *recocido simulado* indica los movimientos que hacen subir (es decir, cambian el *fixture* por otro con una multa mayor) para salir de los mínimos locales, los cráteres, y eventualmente volver a descender, esta vez más abajo. Termina conduciendo a un lugar al nivel del mar, es decir, con multa cero.

No es posible que incluya aquí las precisiones sobre el método del *recocido simulado* en sí mismo, pero, en todo caso, vale la pena decir que involucra movimientos al azar, la teoría de probabilidades y se inspira en un análisis probabilístico de lo que sucede cuando se enfría lentamente el vidrio en la fabricación de botellas (de ahí el nombre *recocido*), y es simulado, porque se usa una simulación por medio de una computadora.

En nuestro caso, eligiendo al azar dónde empezar (es decir, al entrar en la pieza se elige un *fixture* estándar cualquiera para comenzar), después de revisar entre 500.000 y un millón de *fixtures* en alrededor de 20 minutos en una PC 384 de aquella época, el programa que diseñó Eduardo encontraba un *fixture* que resolvía el problema. Aunque, como ya se sabía de antemano, la multa no podía ser cero (porque sabíamos que cualquier *fixture* tenía por lo menos cuatro fechas sin un partido entre dos equipos chicos).

Lo que el programa encontró fue un *fixture* con la mínima multa posible, es decir, con 15 fechas con un partido entre dos equipos chicos, que, además, satisfacía todos los otros requerimientos. Lo curioso en este caso es que el programa que construyó Dubuc encontraba siempre el mismo *fixture* (salvo las equivalencias mencionadas al principio), independientemente de con cuál comenzaba el recorrido al entrar en la pieza.

Esto le permitió conjeturar que el que había encontrado *era el único*. O sea, *había un solo fixture que resolvía el problema*, y el método lo encontraba.[25]

La Asociación de Fútbol Argentino (AFA) implementó su uso a partir del campeonato Apertura de 1995 (que fue el torneo en el que Maradona produjo su retorno a Boca después de jugar en Europa). La utilización de matemática de alta complejidad permitió resolver un problema que hasta ese momento tenía enloquecidos a todos. Y a mano, hubiera llevado *¡diez mil años!*[26]

[25] Fíjese que la fracción de *fixtures* analizados sobre el total es, como *máximo*, de *un millón* dividido por 20! O sea, 1.000.000/(2.432.902.008.176.640.000), aproximadamente 0,000000000001; es decir, sólo el 0,0000000001 por ciento del total.

[26] El método del *recocido simulado* es increíblemente poderoso, y se utiliza en problemas mucho más complejos. Por ejemplo, cuando uno quiere minimizar multas en ciertos estados que aparecen en el cálculo de resistencia de materiales, en particular en la construcción de estructuras como submarinos, puentes y otras por el estilo. El tamaño de los problemas involucrados es frecuentemente un número de entre *mil y diez mil dígitos*. Piensen que el caso de todos los *fixtures* posibles era de sólo *dieciséis*.

Sabiendo que el número total de años desde el comienzo del universo es de unos 15.000 millones, o sea 473.040.000.000.000.000 segundos, si hubiésemos comenzado a examinar estados a partir del big bang con una supercomputadora, a razón de, supongamos, un millón por segundo, para hoy se habrían examinado unos 473.040.000.000 estados, un número de sólo 12 dígitos, una ínfima parte de los estados posibles. De tener que examinarlos todos, se tardarían tantas vidas del universo como un número de 80 dígitos. Sin embargo, con el *recocido simulado* se encuentran en la práctica estados con multas cercanas a lo

APÉNDICE

Para aquellos interesados en conocer con más detalle el problema planteado, ofrezco algunos datos que se tuvieron en cuenta en ese momento. Los datos corresponden a los equipos que había en ese campeonato, pero claramente son adaptables a cualquier situación.

20 equipos del campeonato AFA
5 equipos grandes
2 equipos grandes ampliados (Vélez y Huracán)
6 equipos chicos
7 equipos del interior

El torneo se juega en dos ruedas, que actualmente están divididas en dos torneos distintos: Apertura y Clausura. Los equipos juegan alternadamente de local y de visitante, salvo una sola vez, que repiten la condición. La condición siempre se invierte en una rueda respecto de la otra. Ambas ruedas satisfacen las mismas restricciones.

RESTRICCIONES SATISFECHAS

1) Éstas fueron las parejas (equipos que nunca podían ser locales o visitantes simultáneamente en la misma fecha):

---

mínimo posible. El doctor Eduardo Dubuc no tuvo nunca el reconocimiento por lo que hizo. Ni tampoco lo buscó. Sólo que, sin su aporte, hasta hoy estarían pujando por encontrar “a mano” en forma infructuosa una solución que, en términos ideales, no existe.

(River-Boca) (Racing-Independiente) (Newell's Old Boys-Rosario Central) (Talleres-Belgrano) (San Lorenzo-Huracán) (Vélez-Ferro).

2) A River y Boca (que formaban pareja) no se los podía codificar en la misma fecha.

3) Partidos codificados. En todas las fechas había un partido que se jugaba los días viernes (un equipo "grande" contra un no grande). Además, el equipo grande no podía jugar ese partido contra uno del interior en el interior. Por otro lado, debía contemplar que se jugara un partido los días sábados, que debía enfrentar a un equipo grande ampliado (o sea, con el agregado de Vélez y Huracán) con un equipo del interior.

4) Huracán y Vélez podían ser codificados desde el interior (o sea, jugando de visitante) un máximo posible de siete veces cada uno.

5) En todas las fechas había un partido de un chico contra un chico. Con todo, como la cantidad de equipos chicos no era suficiente para alcanzar el número de partidos que debían jugarse, había que aceptar seis fechas malas (en cada rueda) en las que no habría programado ninguno de esos partidos.

Hasta aquí el *fixture* que entregó el programa ideado por Eduardo Dubuc. Conviene notar que la condición 5, satisfecha en forma ideal, tendría sólo cuatro fechas "malas" por rueda. Sin embargo, resulta incompatible con la condición 3.

ALGUNAS CIFRAS Y COMENTARIOS

El número total de *fixtures* posibles es de N = 20! (factorial de 20). Sin embargo, hay *fixtures* distintos que en la práctica resultan equivalentes. Por ejemplo, los equipos de una pareja grande pueden intercambiarse entre sí. Lo mismo vale para las parejas de equipos chicos y las parejas que involucren a equipos del interior. Había cinco parejas en esas condiciones. Además, las dos parejas del interior pueden intercambiarse entre sí, pero los dos equipos grandes no. Esto sucede porque, por ejemplo, River y Boca deben satisfacer adicionalmente la restricción 2.

Además hay tres equipos chicos "sueltos" que pueden intercambiarse entre sí, y lo mismo pasa con tres equipos del interior.

Esto significa que para calcular el número total de *fixtures* realmente diferentes hay que dividir N = 20! por K, donde:

$$K = (2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 6 \,.\, 6) = 2.304$$

Se tiene, entonces:

$$N/K = 20! \;/\; 2.304 = 1.055.947.052.160.000$$

que son casi 1.056 billones, o sea, millones de millones de *fixtures* realmente diferentes.

Eduardo me escribió en sus notas: "Se tiene suficiente evidencia de que existe un *único fixture* entre todos ellos que satisface las restricciones 1, 2, 3 4 y 5. Ese *fixture* es el que, justamente, encuentra el programa".

Y siguió: "El programa logra encontrar ese único *fixture* examinando sólo entre 500.000 y un millón de *fixtures* en promedio, lo que le lleva unos 20 minutos, más o menos. Comenzando por un *fixture* elegido al azar, siempre termina por encontrar el mismo.

”Con todo, si uno pudiera permitir un pequeño relajamiento en las restricciones (por ejemplo, que haya una o dos fechas en una rueda que tengan un solo partido codificado), eso simplificaría enormemente el problema, ya que entonces hay muchísimos *fixtures* que cumplen todo lo que necesitamos. Si ello se permite, el programa encuentra un *fixture* así luego de examinar sólo (en promedio) unos 10.000 *fixtures* (diez mil), lo que hace en unos 20 segundos”. Piensen, además, que esto fue escrito hace casi doce años...

Palíndromos

Si le dijera que usted sabe lo que es un palíndromo, seguramente me diría: “¿Un qué?”, y yo volvería a decirle: “Un palíndromo”. O, si prefiere, un “número palindrómico”. Nada. Su cara lo dice todo. Y eso que no estoy ahí para verla.

Lo puedo ayudar así: quizá sí lo sabe, pero lo conoce con otro nombre. Nada...

Aquí van algunos ejemplos y usted, después de verlos, me dirá: “Ahhhhhhhh, se refería a los…”

121
1234321
648846
555555
79997
89098

¿Hace falta que ponga más? Creo que no. Ya habrá advertido que estos son los números que llamamos, *también, capicúas.* En lenguaje común, el de todos los días, los palíndromos son los capicúas.

Según el diccionario de la Real Academia Española, capicúa quiere decir número que es igual leído de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. Este vocablo viene de una expresión catalana *cap i cua*, que significa *cabeza y cola.*[27] Por otro lado, *palíndromo* viene del griego *palindromos*, palabra formada de *palin* (de nuevo) y *dromos* (pista de carrera).O sea, carrera en círculo.

Aquí van algunas curiosidades respecto de los *capicúas* o *palíndromos.* Algunas cosas se saben y son fáciles de comprobar. Otras, no sólo no se saben sino que –si tiene ganas de intentarlo– llegar a su solución permitiría resolver algunos problemas que hace mucho que están abiertos en el mundo de la matemática.

Si uno empieza con los dígitos, desde el 0 en adelante:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

son *todos* capicúas, porque leyéndolos desde la izquierda o desde la derecha, dan lo mismo. O sea, hay *diez capicúas de un solo dígito.*

¿Cuántos capicúas hay de *dos* dígitos? La respuesta es 9:

11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 y 99

Si ahora pasamos a números de *tres* dígitos, resulta claro que no será muy práctico hacer una lista de todos los que hay. Podríamos empezar con:

[27] Esto me lo contó mi amigo Alberto Kornblihtt (biólogo molecular de la Facultad de Ciencias Exactas de la UBA).

101, 111, 121, 131, 141, …, 959, 969, 979, 989 y 999

Son en total 90. Y como se empieza a ver, tendríamos que buscar una forma de contarlos que no involucre tener que realizar una lista de todos. ¿Se anima a contarlos sin escribirlos todos?

Tomemos un número de *tres dígitos*. Obviamente, no puede empezar con el número 0 porque, si no, no tendría tres dígitos. Un número *capicúa* de tres dígitos puede empezar con cualquier número, salvo 0. Luego, hay 9 posibilidades.

¿Cuántas posibilidades hay para el *segundo dígito*? En este caso no hay restricciones. El segundo puede ser cualquiera de los diez dígitos posibles: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Dos preguntas importantes acá:

a) ¿Se entiende que como se puede empezar con nueve dígitos y el segundo número tiene diez posibilidades, entonces hay 90 posibles comienzos? Es fundamental entender esto porque no hay problemas si no se entiende bien, y no tiene sentido avanzar sin volver a pensarlo. Lo digo de otra forma: ¿cuáles son los posibles dos primeros dígitos de este número que al final va a tener tres dígitos? Los números con los que puede empezar son:

10, 11, 12, 13, 14, …, 97, 98 y 99

Es decir, empezando con 1 hay 10, empezando con 2 hay otros 10, empezando con 3 hay 10… hasta que, empezando con 9, hay 10 también. En total, entonces, hay 90 formas de empezar.

b) Si el número que estamos buscando tiene tres dígitos, y tiene que ser un palíndromo, una vez conocidos los primeros dos,

¿puede cambiar el tercero? Es decir, ¡conocer los dos primeros obliga al tercero a ser algo que ya sabemos!

Esto también es muy importante, porque quiere decir que el primer dígito condiciona al tercero, que tiene que ser igual al primero.

Luego, los 90 que habíamos contado son *todos* los que hay. ¡Y no necesitamos escribirlos todos! Alcanzó con imaginar una forma de contarlos sin tener que hacer una lista con todos ellos.

Con esta idea, uno ahora puede preguntarse: ¿cuántos palíndromos de *cuatro dígitos* hay?

Si uno piensa un poco, se da cuenta que, como ahora uno tiene un número de cuatro dígitos pero palindrómico, entonces, los dos primeros determinan a los dos últimos.

Es más, si el número empieza con

$$ab$$

Entonces, los dos que siguen tienen que ser

$$ba$$

El número final va a ser entonces: *abba.* Y como recién vimos que para los dos primeros lugares hay 90 posibilidades, con números de cuatro dígitos *no cambia nada.* Curiosamente, hay también *90 capicúas* de cuatro dígitos.

Lo dejo para que compruebe usted solo/a estos datos:

a) Hay 199 palíndromos menores que 10.000.
b) Hay 1.099 capicúas menores que 100.000.
c) Hay 1.999 capicúas menores que 1.000.000.
d) Hay 10.999 palíndromos menores que 10.000.000.

Y si tiene ganas, siga usted con el resto. La idea es la misma.

Ahora, algo que *no* se sabe. Se *conjetura* –aunque no se ha demostrado todavía– que hay *infinitos* números primos que son capicúas. Sí se sabe que, salvo el número 11 (que es un palíndromo y primo a la vez), para que un capicúa *sea primo* debe tener un número *impar* de dígitos. Esto se demuestra comprobando que cualquier número capicúa con un número *par* de dígitos es siempre múltiplo de 11. Haga usted la cuenta para convencerse.

En el afán de buscar palíndromos, uno puede tomar un número cualquiera de dos dígitos o más, digamos:

9253

Si lo escribimos al revés, como si lo estuviera mirando en un espejo, da

3529

Sumamos los dos números: (9253 + 3529) = 12782. A este resultado lo damos vuelta y sumamos ambos números: (12782 + 28721) = 41503. Y una vez más, lo mismo: (41503 + 30514) = 72017. Ahora, un paso más: (72017 + 71027) = 143044; hasta que, por último: (143044 + 440341) = 583385. *¡Que es capicúa!*

Pruebe usted empezando con un número cualquiera y vea qué pasa. Si lo intenta con un número cualquiera, descubrirá que en un número finito de pasos, si sigue con el mismo procedimiento de arriba, se debería llegar a un palíndromo.

La pregunta natural es la siguiente: ¿es verdad que *siempre* sucede? Lamentablemente, la respuesta parece que va a ser *no*. A pesar de que seguramente intentó con varios números y con *todos* le dio, y por lo tanto uno tendría ganas de decir que lo que afirmé recién está equivocado, permítame sugerir algunos números para empezar. (Hágalo, se va a divertir.)

196
887
1675
7436
13783
52514

En realidad, entre los primeros cien mil números, solamente empezando con 5996 de ellos (es decir, menos del 6 por ciento) *no* se llegó a palíndromos. Sin embargo, no hay una *demostración* formal de que empezando con esos números no se llegue.

Sobre este fenómeno curioso de sumas e inversiones, si uno comienza con un número de *dos dígitos* cuya suma dé 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 y 18, entonces, aplicando el procedimiento explicado, se llega a un palíndromo en 2, 1, 2, 2, 3, 4, 6 y 6 pasos, respectivamente. Por ejemplo, empezando con el 87, cuyos dígitos suman 15 (8 + 7 = 15), hacen falta 4 pasos para llegar al palíndromo:

87
78
165
561
726
627
1353
3531
4884

Si uno empieza con *dos dígitos* cuya suma sea 17 (sólo el 89 y 98 sirven), se requieren 24 pasos para llegar, y el palíndromo al que se llega es:

8813200023188

Como último dato, el número más grande entre los primos que es capicúa ¡tiene más de treinta mil dígitos![28]

Si hablamos de años, ¿cuáles son los primos capicúas? 2002 fue capicúa, pero no es primo. El último año que fue un número primo y también capicúa fue el 929, hace ya más de mil años. ¿Cuándo habrá un primo capicúa que indique el año? Obviamente, no en este milenio, porque como este milenio empieza con el número 2, todos los capicúas terminan en 2 y, por lo tanto, serán todos números pares, que no pueden ser primos. Además, como escribí más arriba, si los capicúas pretenden ser números primos, deben tener un número impar de dígitos. Luego, para encontrar el próximo año que sea un número capicúa y también primo, habrá que buscar después de 10.000. Yo no tengo pensado vivir hasta ese momento, pero si le interesa saber exactamente cuánto tiene que esperar, el próximo "capicúa y primo" a la vez será el 10.301.

Los palíndromos también tienen cultivadores de alto nivel. Ernesto Sabato propone en *Abaddón, el exterminador* (1974, p. 223) la creación de la novela capicúa que se pueda leer de atrás para adelante y de adelante para atrás. Un experimento cercano es la novela *Rayuela* del argentino Cortázar, donde los capí-

[28] En realidad, tiene exactamente 30.913 dígitos. Fue descubierto por David Broadhurst en 2003.

tulos son intercambiables. El editor de Sabato sugiere que capicúa es una palabra del dialecto italiano muy común en Buenos Aires y quiere decir *capocoda*, es decir, cabeza-cola. Catalana o italiana, la palabra significa lo mismo.

Además, mi querida amiga la socióloga Norma Giarraca, me dijo que no puedo escribir sobre los números "capicúas" sin hablar de que históricamente siempre se creyó que traían suerte. Por ejemplo, al viajar en tranvía, tren o colectivo, si el boleto era capicúa, había garantías potenciales de que algo bueno estaba por pasarnos.

Mucha suerte y que no llueva.

Juego del 15

Uno de los juegos que más adeptos tuvo en la historia de la humanidad es el que se conoce con el nombre de "Juego del 15".

Se tiene un cuadrado de 4 . 4 (dividido en casillas, como se indica en la figura), en el que están dispuestos los primeros 15 números (del 1 al 15) de la siguiente manera:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Es decir, cuando uno compraba el juego original, obtenía en la caja ese "cuadrado" de madera, con quince piezas móviles y un lugar vacío (el que correspondería al número "dieciséis"). Uno "desarreglaba" el original hasta llevarlo a una posición que consideraba lo suficientemente complicada para que otra persona rastreara lo que hizo, y lo desafiaba a que “ordenara” los cuadrados como estaban al principio.

Antes de avanzar, un poco de historia.

Este problema fue “inventado” por Samuel Loyd (conocido como Sam Loyd, 1841-1911), quien fue uno de los más grandes creadores de entretenimientos con ligazón matemática. El “Juego del 15” o el “Dilema del 15” apareció recién en 1914 en un libro que publicó el hijo de Loyd después que muriera su padre. En realidad, lo había diseñado en 1878.

En general, mucha gente, con un poco de paciencia, podía resolver los problemas que surgían al “desordenar” la distribución original. Pero la novedad la impuso el propio Loyd, cuando ofreció mil dólares a quien pudiera volver a la posición inicial la siguiente configuración (obviamente, con movimientos “legales”, es decir, deslizando los cuadraditos en forma horizontal o vertical, ocupando alternativamente el que está vacío):

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Si uno mira bien descubre que la única modificación respecto del original es que los cuadrados 15 y 14 están permutados.

Pasaba el tiempo y nadie podía reclamar el premio; por supuesto, se cuentan las historias más increíbles de gente que le dedicaba todo el tiempo y dejaba de concurrir a su trabajo, gente que no dormía, desesperados buscando la solución… y el dinero de la recompensa. Loyd sabía por qué estaba dispuesto a arriesgar esa cifra: este problema tiene raíces muy profundas en la matemática, y *no tiene solución.*

Para poder entender un poco *por qué no se puede resolver,* voy a mostrar, con un ejemplo más sencillo, dónde residen las dificultades insalvables. Aquí va.

Supongamos que en lugar de tener un cuadrado de 4 . 4, como el que teníamos más arriba, tenemos uno de 2 . 2, que replica el juego del 15, pero esta vez, se debería llamar "el problema del 3", porque si uno reduce las dimensiones queda así:

1	2
3	

Es decir, el juego original con sólo tres cuadraditos tiene esta distribución. A los efectos de ilustrar lo que sigue, voy a evitar dibujar los cuadraditos. Simplemente voy a poner:

1 2
3

A ésta la vamos a llamar *posición inicial.* Para reproducir la pregunta que hizo Loyd, nos preguntamos si se puede llegar a la siguiente distribución:

2 1
3 (*)

La respuesta es: *no se puede.* Pero, ¿por qué no se puede?

Generemos todos los posibles movimientos que se puedan obtener a partir de la posición inicial. Éstos son:

12 12 2 2 23 23 3 3 31 31 1 1
3 , 3, 13, 13, 1 , 1, 21, 21, 2 , 2, 32, 32

Es decir, en *total* se tienen 12 posibles configuraciones. En lugar de escribir las distintas configuraciones como hice hasta acá, las voy a escribir así: (1, 2, 3) (donde no importa en qué posición está el lugar vacío, lo que sabemos que importa es el orden relativo que tienen al leerla en sentido horario). Fíjese en lo siguiente: si uno se para en el número 1, y recorre los cuadraditos en el sentido de las agujas del reloj (eventualmente, salteando el lugar vacío), siempre se tiene la configuración (1, 2, 3). Es decir, el orden relativo entre los números 1, 2 y 3 no se altera.

Luego, si uno tiene una configuración como la propuesta más arriba, en (*)

2 1
3

uno tiene razones para decir que esa posición no se puede alcanzar por movimientos legales a partir de la inicial.

Recién analizamos exhaustivamente todas las posibilidades, y esta última no está. Por otro lado, otro argumento que uno podría esgrimir (y que va a servir sin tener que escribir todas las posibles configuraciones) es que si uno se para en el número 1 y recorre los cuadraditos en sentido horario, no se tiene ahora la distribución (1, 2, 3) como antes, sino que se tiene (1, 3, 2). O sea, esa última posición, la que aparece en (*), ¡no es alcanzable desde la inicial!

En este caso, lo invito a que haga el recorrido por *todas las que sí* se puede, empezando por la que figura en (*).

21 21 1 1 13 13 3 3 32 32 2 2
3 , 3, 23, 23, 2 , 2, 12, 12, 1 , 1, 31, 31

Lo que se ve entonces, es que ahora hay otras 12 posiciones y que ahora sí quedan cubiertos todos los posibles casos. Además, si uno recorre en sentido horario cualquiera de estas últimas 12, si empieza parándose en el número 1 otra vez, la configuración que se tiene siempre es (1, 3, 2).

Ya estamos en condiciones de sacar algunas conclusiones. Si se tienen 3 números y un cuadrado de 2 . 2, entonces hay en total 24 posibles configuraciones, que se pueden agrupar en dos *órbitas*, por llamarlas de alguna manera. Una órbita es la que –al recorrerla– tiene la configuración (1, 2, 3), mientras que la otra órbita es la que al recorrerla tiene la configuración (1, 3, 2). Con esto se agotan las posibilidades. Lo interesante del juego es que no se puede pasar de una órbita a la otra. La pregunta que sigue, entonces, es si se puede saber, sin tener que escribirlas todas, si una configuración *dada* está en la órbita original o no. Le sugiero que piense un rato esta respuesta, porque ilustra mucho sobre lo que hace la matemática en casos similares.

Las configuraciones (1, 2, 3) y (3, 1, 2) están en la misma órbita. En cambio, (3, 1, 2) y (1, 3, 2) no. ¿Se da cuenta por qué? Es que al leer la última, empezando en el 1, el orden en que aparecen los números no es correlativo, como en el caso de la primera.

Algo más. Si uno tiene (3, 1, 2) y "cuenta" cuántas veces aparece un número *mayor* antes que uno menor, hay *dos casos:* el 3 está antes que el 1, y el 3 está antes que el 2. Es decir, hay dos *inversiones* (así se llaman). En el caso del (3, 2, 1), hay tres inversiones, porque se tiene el 3 antes que el 2, el 3 antes que el 1, y el 2 antes que el 1. Es decir, el número de inversiones puede ser un número par o impar. Lo que uno hace es agrupar las ternas que tenemos, de acuerdo con que el número de inversiones sea justamente par o impar.

Y ésta es la gracia. Todas las que pertenecen a una órbita, tienen la misma *paridad*. Es decir, las de una órbita o bien tienen todas un número *par* de inversiones o tienen todas un número *impar* de inversiones.

Esto soluciona el caso original que planteó Loyd. Si uno mira el ejemplo que él propuso (el que tenía el 14 y el 15 invertidos), verá que el número de inversiones es 1 (ya que el único número "mayor que uno menor" es el 15, que está antes que el 14).

En cambio, en la configuración original, no hay inversiones, es decir, los dos casos no están en la misma órbita… y por lo tanto, el problema planteado no tiene solución.

Loyd lo sabía, y por eso ofreció los mil dólares a quien lo resolviera. No había riesgo. Lo interesante es que uno, frente a un problema que parece ingenuo, apela a la matemática para saber que no tiene solución, sin tener que recurrir a la fuerza bruta de intentar e intentar…

Triángulo de Pascal

¿Qué es este triángulo formado por números que parecen elegidos en forma caótica? Mírelo un rato, entreténgase con el triángulo y trate de descubrir *leyes* o *patrones*. Es decir, ¿estarán puestos los números al azar? ¿Habrá alguna relación entre ellos? Si bien uno advierte que hay un montón de números *uno* (de hecho, hay *unos* en los dos costados del triángulo), ¿cómo habrán hecho para construirlo?

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

Como se imaginará, el triángulo podría seguir. En este caso escribí sólo una parte de él. Es más: en cuanto descubra efectivamente cómo se arma, estoy seguro de que podrá completar la fila siguiente (y seguir con más, si no tiene nada que hacer). Llegar a ese punto será sólo una parte –importante por cierto– porque es algo así como un juego (de todas formas, nadie dijo que está mal jugar, ¿no?); sin embargo, lo interesante va a ser mostrar que este triángulo, ingenuo como lo ve, tiene en realidad múltiples aplicaciones, y los números que figuran en él sirven para resolver algunos problemas.

Este triángulo fue estudiado por Blaise Pascal, un matemático y filósofo francés que vivió sólo treinta y nueve años (1623-1662), aunque, en realidad, los que trabajan en historia de la matemática sostienen que el triángulo y sus propiedades fueron descriptos ya por los chinos, en particular por el matemático Yanghui, algo así como quinientos años antes que naciera Pascal, y también por el poeta y astrónomo persa Omar Khayyám. Es más, en China se lo conoce con el nombre de triángulo de Yanghui, no de Pascal, como en Occidente.

Primero que nada, ¿cómo se construye? La primera fila tiene un *solo* 1, de manera tal que hasta ahí vamos bien. La segunda fila, tiene *dos* números 1, y nada más. Nada que decir. Pero mirando el triángulo, lo que podemos afirmar es que cada nueva fila empezará y terminará con 1.

Una observación que uno puede hacer es la siguiente: elija un número cualquiera (que no sea 1). Ese número tiene otros dos números inmediatamente por encima. Si los sumamos, se obtendrá el número elegido. Por ejemplo, busque el número 20 que está en la séptima fila; arriba tiene dos números 10; la suma, obviamente, da 20. Elijamos otro: el 13, que está en la última fila sobre la mano derecha. Si sumamos los dos números que están arriba de él (1 y 12), se obtiene 13.

Si aceptamos que en las dos primeras filas hay sólo números 1, entonces, en la tercera fila tendrá que haber 1 en las puntas, pero el número en el medio tiene que ser un 2, porque justamente arriba de él tiene dos números 1. Así queda conformada la tercera fila. Pasemos a la cuarta.

De la misma forma, empieza con dos 1 en las puntas. Y los otros dos lugares que hay para rellenar se obtienen sumando los dos números que tienen arriba: en ambos casos, hay un 1 y un 2 (aunque en diferente orden), luego, los números que faltan son dos números 3.

Supongo que ahora queda claro cómo seguir. Cada fila empieza y termina con 1, y cada número que se agrega es el resultado de *sumar* los dos que tiene arriba. De esa forma, hemos resuelto el primer problema que teníamos: saber cómo se construye el triángulo. De hecho, la primera fila que no está escrita, la primera que iría debajo de la que está en la figura, empieza con un 1, como todas, pero el siguiente número que hay que escribir es 14, y el siguiente, 91. ¿Entiende por qué?

ALGUNAS OBSERVACIONES

Observe que el triángulo queda *simétrico*, es decir, da lo mismo leer cada fila desde la izquierda que desde la derecha.

Analicemos algunas diagonales. La primera está compuesta por *unos*. La segunda, está compuesta por todos los números naturales.

La tercera…

(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, …) (*)

¿Qué números son éstos? ¿Hay alguna manera de construirlos sin tener que recurrir al triángulo de Pascal?

Le propongo que haga lo siguiente, para ver si puede descubrir cómo se construye esta diagonal. Empiece por el segundo, el número 3, y réstele el anterior, el número 1. Obtiene un 2. Siga con el 6, y réstele el anterior. Obtiene un 3. Luego el 10, y réstele el anterior (que es un 6). Obtiene un 4… En otras palabras, la diferencia o la resta de dos números consecutivos, se va incrementando en uno cada vez. Es decir, la sucesión (*) se obtiene empezando con

1

Luego se suma 2, y se obtiene 3.

Luego se suma 3 al número 3, y se obtiene 6.

Se suma 4 al número 6 y se tiene 10.

Y así sucesivamente, se va construyendo de esta manera:

1	1
1 + 2	3
1 + 2 + 3	6
1 + 2 + 3 + 4	10
1 + 2 + 3 + 4 + 5	15
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	21
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7	28

Estos números se llaman *números triangulares.*

Por ejemplo, supongamos que estamos invitados a una fiesta y, al llegar, cada persona *saluda* a los que ya llegaron, dándoles la mano. La pregunta es, si en el salón hay en un determinado momento 7 personas, ¿cuántos apretones de mano se dieron en total?

Veamos cómo analizar este problema. Al llegar la primera persona, como no había nadie en el salón, no hay nada que contar. Cuando llega la segunda, sin embargo, como adentro hay una persona, le da la mano, y ya tenemos 1 para incorporar a nuestra lista. Ni bien llega la tercera persona, tiene que darle la mano a las *dos* personas que hay adentro. Luego, en total, ya se dieron 3 apretones de mano: 1 que había en el momento en que llegó la segunda persona y 2 ahora. Recuerde que vamos por tres apretones cuando hay tres personas en el salón. Cuando llegue la cuarta persona, le tiene que dar la mano a las 3 que están dentro, por lo que sumadas a las 3 que ya llevábamos, se tienen 6. Así, cuando llega la quinta, tiene que dar 4 apretones, más los 6 que ya había, permiten sumar 10.

O sea:

1 persona	0 apretón de manos
2 personas	1 apretón de manos
3 personas	(1 + 2) = 3 apretones de manos

4 personas	(3 + 3) = 6 apretones de manos
5 personas	(6 + 4) = 10 apretones de manos
6 personas	(10 + 5) = 15 apretones de manos

Como habrá notado ya, los apretones van reproduciendo los números triangulares que habíamos encontrado antes. Es decir, esa diagonal del triángulo de Pascal sirve, en particular, para contar en determinadas situaciones.

Volvamos a la misma diagonal que contiene a los números triangulares:

(1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, …)

Ahora, en lugar de restar un término menos el anterior, como hicimos más arriba, empecemos a sumar los términos de a dos, y a escribir los resultados:

$$\begin{array}{rcr} 1 + 3 & = & 4 \\ 3 + 6 & = & 9 \\ 6 + 10 & = & 16 \\ 10 + 15 & = & 25 \\ 15 + 21 & = & 36 \\ 21 + 28 & = & 49 \\ 28 + 36 & = & 64 \\ 36 + 45 & = & 81 \\ 45 + 55 & = & 100 \end{array}$$

Ahora que escribí varios términos, ¿le sugieren algo? Sigo: los números que están a la derecha:

(4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, …)

resultan ser los cuadrados de todos los números naturales (exceptuando al 1). Es decir:

$$(2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, \ldots)$$

Más allá de *todas* estas curiosidades (y créame que existen muchísimas más), hay un hecho muy importante que no se puede obviar.

Sólo para simplificar lo que sigue, vamos a numerar las *filas* del triángulo, aceptando que la primera (la que contiene un solo 1) será la número 0.

La fila *uno,* es la que tiene: 1, 1
La fila *dos,* es la que tiene: 1, 2, 1
La fila *tres,* es la que tiene: 1, 3, 3, 1
La fila *cuatro,* es la que tiene: 1, 4, 6, 4, 1

Ahora planteo un problema, cuya solución se encuentra increíblemente (o quizá no…) en los números que figuran en el triángulo de Pascal. Supongamos que uno tiene cinco delanteros en un plantel de fútbol pero sólo usará dos para el partido del domingo. ¿De cuántas formas los puede elegir?

El problema también podría ser el siguiente: supongamos que uno tiene cinco entradas para ver espectáculos un determinado día de la semana, pero sólo puede comprar dos, ¿de cuántas formas puede seleccionar adónde ir? Como ve, se podrían seguir dando múltiples ejemplos que conducen al mismo lugar. Y la forma de pensarlos todos, en forma genérica, sería decir:

"Se tiene un conjunto con *cinco* elementos, ¿de cuántas formas se pueden elegir subconjuntos que contengan *dos* de esos *cinco* elementos?"

Se tiene, digamos:

(A, B, C, D, E)

¿De cuántas formas podemos elegir subconjuntos de *dos elementos* (dos letras en este caso), elegidos entre estos *cinco*? Esto sería equivalente, a elegir dos delanteros de los cinco, o bien, dos entradas para ver dos shows diferentes, elegidas entre las cinco posibles.

Hagamos una lista:

AB	AC
AD	AE
BC	BD
BE	CD
CE	DE

Es decir, hemos descubierto que hay diez formas de elegirlos. ¿Puedo pedirle que ahora vaya hasta el triángulo de Pascal, se fije en la fila cinco y busque el elemento número dos? (Recuerde que empezamos a contar las filas desde 0, y que los elementos en cada fila los comenzamos a contar desde 0 también. Es decir, el número 1 con que empieza cada fila, es el número 0 de la fila.)

Ahora sí, ¿cómo es la fila número cinco? Es: 1, 5, 10, 5, 1. Por lo tanto, el elemento que lleva el número 2 en la fila cinco es justamente el número 10, que contaba el número de subconjuntos de dos elementos elegidos entre cinco.

Hagamos otro ejemplo. Si uno tiene seis camisas, y quiere elegir tres para llevarse en un viaje, ¿de cuántas formas posibles puede hacerlo? Primero, busquemos en el triángulo de Pascal el que *debería* ser el resultado. Hay que buscar en la fila 6 el elemento que lleva el número 3 (recordando que el 1 inicial, es el número 0), que resulta ser el 20.

Si uno les pone estos nombres a las camisas: A, B, C, D, E, F, las posibles elecciones de tres camisas, son las siguientes:

ABC	ABD	ABE	ABF
ACD	ACE	ACF	ADE
ADF	AEF	BCD	BCE
BCF	BDE	BDF	BEF
CDE	CDF	CEF	DEF

De esta forma, uno descubre las 20 maneras de elegir subconjuntos de 3 elementos seleccionados de un conjunto que tiene 6.

Para simplificar, este número que cuenta la cantidad de subconjuntos que se pueden formar seleccionando, digamos, k elementos de un conjunto de n elementos, se llama *número combinatorio*:

$$C(n, k)$$

que tiene una definición que involucra el cociente de algunos números factoriales y que –por ahora–escapa al objetivo de este libro.[29]

[29] La definición del número combinatorio $C(n,k)$ es:

$$C(n,k) = n!/(k!\ (n-k)!))$$

Por ejemplo, ya contamos en el caso que figura más arriba, que el combinatorio C(5,2) = 10, y el combinatorio C(6,3) = 20. Redescubrámoslos ahora:

$$C(5,2) = 5!/(2!3!) = \\ = 120/(2 \cdot 6) \\ = 120/12 = 10$$

Por otro lado,

$$C(6,3) = 6!/(3!3!) = \\ = 720/(6 \cdot 6) \\ = 720/36 = 20$$

En definitiva, lo que hemos aprendido –un hecho *muy*, pero *muy importante*– es que los numeritos que aparecen en el triángulo de Pascal también sirven para contar la cantidad de subconjuntos que se pueden formar con cierto grupo de elementos de un conjunto dado.

El triángulo de Pascal, entonces, habría que escribirlo así:

1
C(1, 0) C(1, 1)
C(2, 0) C(2, 1) C(2, 2)
C(3, 0) C(3, 1) C(3, 2) C(3, 3)
C(4, 0) C(4, 1) C(4, 2) C(4, 3) C(4, 4)
C(5, 0) C(5, 1) C(5, 2) C(5, 3) C(5, 4) C(5, 5)

Esto explica varias cosas. Por ejemplo, la razón por la que hay 1 en las dos diagonales exteriores. Así, en la diagonal que va hacia la izquierda, los números que aparecen son:

C(n, 0)

pero son todos números 1. Y está bien que sea así, ya que C(n, 0) quiere decir cuántas maneras hay de no elegir nada, o bien, de elegir *0 elementos* de un conjunto que contenga *n*? ¡Una sola! Porque, ¿cuántas formas tengo de no elegir ningún delantero para el partido del domingo? Una sola, la que corresponde a no elegir. ¿Cuántas formas hay de no elegir ninguna camisa de las seis que tengo? ¡Una sola!

¿Y la diagonal exterior que viene hacia la derecha? Ésa corresponde a los números combinatorios:

C(n, n)

Entonces, ¿cuántas formas hay de elegir los cinco delanteros entre los cinco que tengo? Respuesta: ¡una forma! ¿De cuántas formas puedo elegir las seis camisas de las seis que tengo? De una forma, que es llevándolas todas. ¿De cuántas formas puedo ir a los cinco espectáculos para los que tengo entradas? ¡De una sola forma, que es eligiendo todas las entradas!

De ahí que la diagonal exterior que va hacia la derecha también esté formada por 1.

MORALEJA: Como se alcanza a ver, el triángulo de Pascal, que tiene una apariencia ingenua, en realidad *no lo es*.

¿Se anima, con estos datos, a deducir por qué el triángulo es simétrico? Lea lo que está más arriba, y fíjese si se le ocurre algo que tenga que ver con los números combinatorios.

¿Qué quiere decir que el triángulo sea simétrico? ¿Qué números combinatorios tendrían que ser iguales? Por ejemplo, tome la fila que lleva el número 8. Es la que tiene estos números:

1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1

O, lo que es lo mismo, en términos de números combinatorios:

C(8, 0) C(8, 1) C(8, 2) C(8, 3) C(8, 4) C(8, 5) C(8, 6) C(8, 7) C(8, 8)

¿Qué quiere decir que aparezca, por ejemplo, dos veces el número 28? Esto significa que C(8, 2) tiene que ser igual a C(8, 6).

De la misma manera, dice que el número

C(8, 3) = C(8, 5)

O que el número

$$C(8, 1) = C(8, 7)$$

¿Por qué será? Pensemos juntos. Tomemos el ejemplo:

$$C(8, 3) = C(8, 5)$$

¿Quién es C(8, 3)? Es la forma de elegir subconjuntos de tres elementos tomados entre ocho.

Acá voy a detenerme y hacerle una pregunta: cuando elige los dos delanteros para formar su equipo, ¿no quedan también separados los otros tres que *no* eligió? Cuando elige los dos espectáculos que va a ver, ¿no está eligiendo también los tres que no va a ver? Es decir, cuando uno elige un subconjunto, está eligiendo otro subrepticiamente, que es el que queda formado con lo que *no* elige. Y ésa es la clave. Eso hace que el triángulo sea simétrico.

Lo que hemos verificado es que

$$C(n, k) = C(n, n-k)$$

Antes de terminar el segmento dedicado al triángulo de Pascal, no deje de divertirse con estas cuentas, y sobre todo, de buscar usted mismo otras relaciones entre los números que aparecen en las filas y las diagonales.

APÉNDICE

En el triángulo de Pascal se encuentran *escondidos los resultados* a muchos problemas. Aquí van sólo dos ejemplos.

1. ¿Cómo hacer para descubrir *todas* las potencias de 2? Es decir, ¿qué hacer para obtener

(1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024…)?

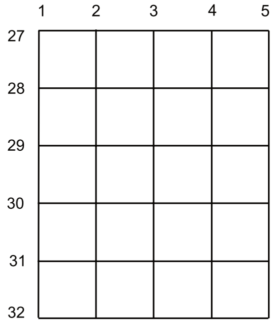
Es que

$$
\begin{aligned}
2^0 &= 1\\
2^1 &= 2\\
2^2 &= 4\\
2^3 &= 8\\
2^4 &= 16\\
2^5 &= 32\\
2^6 &= 64\\
2^7 &= 128\\
2^8 &= 256\\
2^9 &= 512\\
2^{10} &= 1024
\end{aligned}
$$

2. Este ejemplo está inspirado en uno que leí en un libro de Rob Eastaway y Jeremy Wyndham.

Supongamos que uno está caminando en una ciudad, cuyo dibujo es un rectángulo. Se sabe además que las calles son las líneas horizontales y las avenidas, todas las verticales. Las avenidas están ordenadas: primera, segunda, tercera, cuarta y quinta avenida (e identificadas con los números 1, 2, 3, 4 y 5). Las calles están numeradas también.

A los efectos del ejemplo, supongamos que la primera es la número 27, la segunda es la 28, la tercera es la 29, luego la 30, la 31 y la 32.

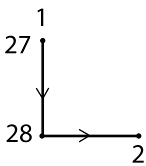


Supongamos que uno va a comenzar a recorrer la ciudad usando las distintas alternativas de caminos posibles, pero se cumplen dos condiciones:

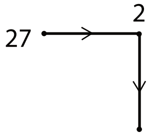
a) siempre empieza en la intersección de la 1 y la 27, y
b) siempre camina o bien hacia la derecha o bien hacia abajo para ir de un lugar a otro.

Por ejemplo, ¿de cuántas formas puede caminar hasta la 2 y la 28? Claramente, la respuesta es: de dos formas.

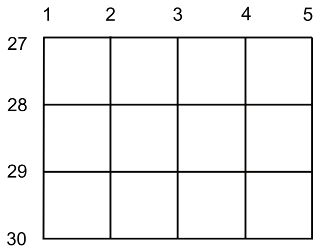
1. Caminando en forma *vertical* por la avenida 1 desde la calle 27 hasta la 28, y luego a la derecha en forma *horizontal* hasta llegar a la avenida 2.



2. Caminar por la calle 27 en forma *horizontal* hasta llegar a la avenida 2. Allí, bajar en forma *vertical* por esa avenida, hasta llegar a la calle 28.

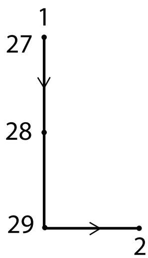


Otro ejemplo: ¿de cuántas formas puede caminar desde la 1 y la 27, hasta la 2 y la 29? (NOTA: no se cuentan las cuadras, sino cada vez que uno tiene que o bien bajar o bien doblar a la derecha.)

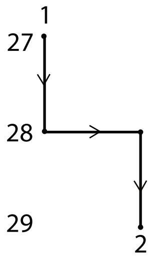


Por el dibujo, uno ve que sólo hay tres caminos posibles:

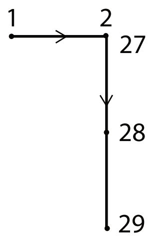
a) Caminar por la avenida 1 desde la 27 hasta la 29 y luego *doblar a la derecha* hasta llegar a la 2.



b) Caminar por la avenida 1 en forma *vertical* hasta la calle 28, luego doblar a la derecha y caminar en forma *horizontal* hasta llegar a la avenida 2, y luego *bajar* en forma *vertical* hasta llegar a la calle 29.



c) Caminar por la 27 desde la avenida 1 hasta la 2, y luego bajar en forma *vertical* caminando por la avenida 2 hasta llegar a la calle 29.



Dicho esto, planteo el problema: encuentre cuántos caminos posibles hay para ir desde la 1 y la 27 hasta cualquier otro punto de la ciudad (siempre observando las reglas de caminar sólo hacia la derecha o hacia abajo).

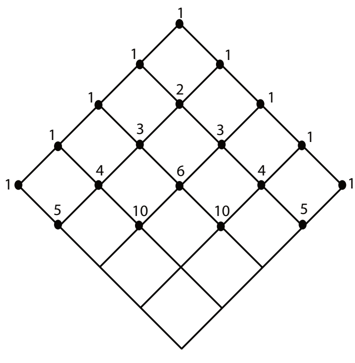
SOLUCIONES:

1. Si uno suma las filas del triángulo de Pascal, descubre que

Números en la fila	Suma
{1}	$1 = 2^0$
{1, 1}	$2 = 2^1$
{1, 2, 1}	$4 = 2^2$
{1, 3, 3, 1}	$8 = 2^3$
{1, 4, 6, 4, 1}	$16 = 2^4$
{1, 5, 10, 10, 5, 1}	$32 = 2^5$
{1, 6, 15, 20, 15, 6, 1}	$64 = 2^6$

La *suma* de los números que aparecen en cada una de las filas reproduce la potencia de 2 correspondiente al número de fila.

2. Solución al problema de los caminos en la ciudad cuadriculada. Lo notable es que si uno gira 45 grados esta figura –en el sentido de las agujas del reloj– e imagina que tiene dibujada una parte del triángulo de Pascal, y ubica en cada intersección el número que corresponde al triángulo, obtiene exactamente el número de caminos posibles con las reglas establecidas.



Epílogo. Las reglas del juego

Uno de los más grandes errores que perpetramos en nuestras clases es que el maestro pareciera que siempre tiene la respuesta al problema que estuvimos discutiendo. Esto genera la idea en los estudiantes de que debe haber un libro, en alguna parte, con todas las respuestas correctas a todos los problemas interesantes, y que el maestro se las sabe todas Y que, además, si uno pudiera conseguir ese libro tendría todo resuelto. Eso no tiene nada que ver con la naturaleza de la matemática.

LEON HENKIN

Luego de muchos años de ser docente, de estar en la Facultad, de conversar con alumnos y profesores... o sea, luego de muchos años de dudar y convencerme de que cada día tengo *menos* cosas seguras, me parece que nada de lo que pueda proponer para pensar tiene el carácter de final, de cosa juzgada.

Por eso, se me ocurrió poner una cantidad de pautas a ser consideradas como bases en una clase (de matemática en principio, pero son fácilmente adaptables a otras situaciones similares) en el momento de comenzar un curso. Y como yo las he adoptado hace ya tiempo, quiero compartirlas.

Éstas son las reglas del juego:

- Es nuestra responsabilidad (de los docentes) transmitir ideas en forma clara y gradual. Lo que necesitamos de ustedes es que estudien y *piensen*.

- Ustedes nos importan. Estamos acá específicamente para ayudarlos a aprender.

- *Pregunten.* No todos tenemos los mismos tiempos para entender. Ni siquiera somos iguales a nosotros mismos todos los días.

- La tarea del docente consiste –prioritariamente– en generar preguntas. Es insatisfactorio su desempeño si sólo colabora mostrando respuestas.

- No nos interesan las competencias estériles: nadie es mejor persona porque entienda algo, ni porque haya entendido más rápido. Valoramos el esfuerzo que cada uno pone para comprender.

- (Ésta vale sólo para el ámbito universitario.) En esta materia no hay trabas burocráticas. En principio, toda pregunta que empiece con:

  "Como todavía no rendí Matemática 2 en el CBC....", o
  "Como todavía no aprobé Historia de la Ciencia...", o
  "Como todavía no hice el secundario...", o
  "Como todavía no me inscribí...", etcétera,

  y que concluya con: "¿Puedo cursar esta materia...?", tiene por respuesta un: "*¡Sí!*".

- Pongamos entusiasmo.

- La teoría está al servicio de la práctica. Este curso consiste en que uno aprenda a pensar cómo plantear y resolver cierto tipo de problemas.

- No se sometan a la autoridad académica (supuesta) del docente. Si no entienden, pregunten, porfíen, discutan… hasta entender (o hasta hacernos notar que los que no entendemos somos nosotros).

¿CÓMO ESTUDIAR?

a) La primera recomendación es: tomen la práctica y traten de resolver los ejercicios. Si se dan por vencidos con uno o simplemente no saben una definición, lean la teoría y vuelvan a intentar tratando de razonar por analogía. Eviten estudiar primero y enfrentarse después con la práctica.

b) Traten de entender qué significa cada enunciado propuesto, ya sea de un ejercicio o un resultado teórico.

c) Traten de fabricar ejemplos ustedes mismos… ¡Muchos ejemplos! Es una buena manera de verificar que se ha comprendido un tema.

d) Dediquen una buena dosis de tiempo a *pensar*… Ayuda… y es muy saludable.

MATEMÁTICA... ¿ESTÁS AHÍ?

Episodio 3,14

por

ADRIÁN PAENZA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Colección "Ciencia que ladra..."
Dirigida por DIEGO GOLOMBEK

Universidad Nacional de Quilmes

Siglo veintiuno editores Argentina

siglo veintiuno
editores

Siglo XXI editores Argentina s.a.
Tucumán 1621 7º (c1050aag), Buenos Aires, Argentina

Siglo XXI editores, s.a. de c.v.
Cerro del agua 248, Delegación Coyoacán, 04310, México, D.F.

Siglo XXI de España editores, s.a
Príncipe de Vergara 78, 2º (28006) Madrid, España.

Paenza, Adrián
Matemática... ¿estás ahí? episodio 3,14 - 1a ed. - Buenos Aires : Siglo XXI Editores Argentina, 2007.
240 p. ; 19x14 cm. (Ciencia que ladra... dirigida por Diego Golombek)

ISBN 978-987-629-017-3

1. Matemática. I. Título
CDD 510

Portada de Mariana Nemitz

ISBN 978-987-629-017-3

Impreso en Artes Gráficas Delsur
Almirante Solier 2450, Buenos Aires,
en el mes de octubre de 2007

Hecho el depósito que marca la ley 11.723
Impreso en Argentina – Made in Argentina

ESTE LIBRO
(y esta colección)

Y se va la tercera… Entrar nuevamente en el universo Paenza es un viaje de ida y, además, adictivo. Por eso, y porque sobraban ideas, enigmas, problemas e invitaciones a pensar, sale este nuevo libro de Adrián, tan fascinante como los primeros *Matemática… ¿Estás ahí?* y *Matemática… ¿Estás ahí? Episodio 2.* Nuevamente, el autor nos abre la puerta para ir a pensar (y, por qué no, a jugar), una nueva puerta de entrada a la matemática, esa musa que tantas veces se nos presenta esquiva y díscola.

Quiero contarles aquí algo de mi experiencia como primer lector de algunos de estos textos, de la tarea de ir soñándolos juntos en forma de libro. Leer a Adrián es más bien escucharlo, sentir las pausas, las comas, las inflexiones. Efectivamente: les aseguro que el texto inicial es aún más "oral", con multitudes de negritas, bastardillas, mayúsculas, signos admirables y preguntones. Es como tener al autor en un café leyéndonos –o, mejor todavía, contándonos, frente a un pizarrón– cada una de las frases, cada uno de los misterios.

En algún lado de esa comunicación se produce un milagro, y tantos lectores-oyentes convierten dos libros de matemática en un éxito increíble. ¿Será que el autor es cara conocida en estas costas? Si es así, difícil explicar el suceso del libro en España y México, o su próxima publicación en Brasil, Portugal, República Checa, Alemania e Italia. ¿Será que queda bien mostrar en la oficina o el colectivo que uno lee matemática? Mmmm… tampoco: la gente se guarda el texto como un tesoro y, por si fuera poco, lo puede bajar gratis de Internet. En definitiva: es un misterio maravilloso, que despierta las ganas de saber, de preguntar, de ser un poco más racionales en la vida de todos los días, que buena falta nos hace.

Tal vez sin saberlo, con sus historias Paenza nos trae otro regalo. Existe una tribu en el Amazonas, los pirahã, que es la favorita de los lingüistas: entre otras curiosidades, no tienen palabras ni conceptos para los números. El asunto es que su lenguaje es también limitado en el sentido de que no tiene referencias temporales: entre los pirahã no sólo faltan los números, sino que tampoco hay ayer ni mañana. Quizá sea, entonces, que Adrián nos brinda, junto con sus preguntas, sus problemas y sus números la posibilidad de una historia, y de un futuro. Casi nada.

Esta colección de divulgación científica está escrita por científicos que creen que ya es hora de asomar la cabeza por fuera del laboratorio y contar las maravillas, grandezas y miserias de la profesión. Porque de eso se trata: de contar, de compartir un saber que, si sigue encerrado, puede volverse inútil.

Ciencia que ladra... no muerde, sólo da señales de que cabalga.

DIEGO GOLOMBEK

Este libro es para mis padres, Fruma y Ernesto.
Una vez más, mi gratitud eterna. Todo lo que haga en la vida estará siempre dedicado a ellos primero.
A mi hermana Laura y su compañero Daniel.
A todos mis sobrinos.

A mis amigos Miguel Davidson, Leonardo Peskin, Miguel Ángel Fernández, Héctor Maguregui, Cristian Czubara, Eric Perle, Lawrence Kreiter, Kevin Bryson, Alejandro Fabbri, Víctor Marchesini, Luis Bonini, Fernando Pacini, Santiago Segurola, Carlos Aimar, Marcelo Araujo, Marcos Salt, Diego Goldberg, Julio Bruetman, Gabriel Cavallo, Eduardo Bertoni, Antonio Laregina, Woody González, Gary Crotts y Claudio Pustelnik.

A mis amigas Ana María Dalessio, Nilda Rozenfeld, Teresa Reinés, Alicia Dickenstein, Beatriz de Nava, Beatriz Suárez, Nora Bernárdez, Carina Marchesini, Laura Bracalenti, Etel Novacovsky, Marisa Gimenez, Mónica Muller, Érica Kreiter, Susy Goldberg, Holly Perle, Marisa Pombo y Carmen Sessa.

A la memoria de mis seres queridos que perdí en el camino: Guido Peskin; mis tías Delia, Elena, Miriam y Elenita; mi primo Ricardo, y a la de mis entrañables compañeros de vida, Noemí Cuño, León Najnudel y Manny Kreiter.

Acerca del autor

Adrián Paenza cql@sigloxxieditores.com.ar

Nació en Buenos Aires en 1949. Es doctor en Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires, en la que se desempeña actualmente como profesor asociado del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Es, además, periodista. En la actualidad conduce el ciclo "Científicos Industria Argentina". Trabajó en las radios más importantes del país y en los cinco canales de aire de la Argentina. Fue redactor especial de varias revistas y colaborador en tres diarios nacionales: *Clarín*, *Página/12* y *La Nación*. Publicó en esta misma colección *Matemática… ¿Estás ahí?* y *Matemática… ¿Estás ahí? Episodio 2*.

Agradecimientos

A Diego Golombek y Carlos Díaz. Ellos dos son los grandes impulsores de que esta serie de libros –de matemática nada menos– haya sido publicada. Diego tuvo la idea y Carlos se dejó seducir. Los dos merecen el mayor crédito.

A mis alumnos. Muchos de ellos reconocerán los problemas, los giros y los dichos que usé para contarlos. Varios ya me lo hicieron notar en los volúmenes anteriores. Ellos fueron parte interactiva en distintos momentos de mi carrera docente y me enseñaron a entender mejor cada enunciado y solución. Y porque me enseñaron a enseñar.

A quienes leyeron apasionadamente el manuscrito, y me ayudaron a mejorarlo, muy especialmente Carlos D'Andrea y Gerardo Garbulsky, quienes invirtieron infinito tiempo y paciencia. El rigor con el que ambos analizaron y criticaron cada uno de los problemas de cada uno de los tres tomos fue invalorable para mí.

A Alicia Dickenstein, Eduardo Cattani, Teresita Krick, Pablo Milrud, Pablo Coll, Cristian Czubara, Gabriela Jerónimo, Matías Graña, Pablo Amster, Pablo Mislej, Juan Sabia, Gustavo Stolovitzky, Lucas Monzón, Ariel Arbiser, Juan Carlos Pedraza, Rodrigo Laje y Gerardo Garbulsky, por las ideas con las que colaboraron en toda este serie, varias de ellas publicadas acá.

A Claudio Martínez, porque además de amigo personal es un gusto encarar con él cualquier proyecto profesional.

A Alicia Dickenstein, Eduardo Dubuc, Carmen Sessa, Néstor Búcari, Miguel Herrera, Oscar Bruno, Jorge Fiora, Ricardo Durán, Ricardo Noriega, Pablo Calderón, Leandro Caniglia, Luis Santaló, Ángel Larotonda, Baldomero Rubio Segovia y Enzo Gentile, porque con ellos aprendí matemática.

A Guillermo Alfieri, Jorge Guinzburg, Lalo Mir, Tristán Bauer, Ernesto Tenembaum y Marcelo Zlotogwiazda, por la generosidad y el afecto con que me tratan.

A Ernesto Tiffenberg por atreverse a publicar semanalmente –en una suerte de “salto al vacío”– estas columnas de matemática en la contratapa de *Página/12.*

Una vez más, mi gratitud para todos los comunicadores de los distintos medios que promovieron los libros anteriores y formaron parte (sin saberlo ni proponérselo) en una suerte de cruzada en pro de la matemática.

A toda la comunidad matemática, que desde los lugares más impensados piensa por mí (y lo bien que hace). Muchos encontrarán en este tomo las ideas que me dieron.

A Violeta Collado y Héctor Benedetti por la protección que me ofrecen con cada uno de los libros.

A mis compañeros de la Editorial Siglo XXI, de El Oso Producciones, del Canal Encuentro y de Canal 7, de *Página/12* y de la empresa de grabación Non-Stop, por el calor que me brindan.

A Oriol Castanys y Joaquín Palau, ambos directores de RBA Libros en España, por el afecto con que me abrigaron en mi visita a Madrid y por lo que hicieron por mí y por los libros en Europa.

Y (como siempre) a Marcelo Bielsa, Nelson Castro, Alberto Kornblihtt, Víctor Hugo Morales y Horacio Verbitsky, por su postura ética en la vida. Concerlos y tratarlos me hace mejor persona.

Me llevó diez años tener éxito
de la noche a la mañana.

WOODY ALLEN

La inspiración existe, pero cuando pasa
te tiene que encontrar trabajando
(¿o habrá pasado justamente
porque te vio trabajando?).

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Índice

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Prólogo

Viernes 7 de enero de 2005. Suena el teléfono de mi casa en Chicago. Es Diego Golombek desde Buenos Aires.

–Adrián –me dice–. Como sabés, estoy dirigiendo una colección de libros que sirven para difundir la ciencia. Quiero publicar textos *no acartonados,* que acerquen la ciencia a la gente. ¿No tenés ganas de escribir un volumen sobre matemática?

Me quedé callado por un momento –que Diego entendió como vacilación– y arremetió nuevamente:

–Mirá: alcanzaría con que escribas las historias que contás al final de cada uno de los programas –se refería a *Científicos Industria Argentina*.

–Diego –le dije–, eso no le va a interesar a nadie –un visionario yo, evidentemente.

–No importa. Eso dejalo por mi cuenta. No me contestes ahora. Pensalo y nos hablamos el lunes.

Obviamente, el diálogo fue más largo y no lo recuerdo con precisión, pero de lo que sí estoy seguro es de que –conceptualmente– fue así.

Y me quedé pensando: si habíamos hecho dos años consecutivos de programas en Canal 7, a 52 por año, eran 104 historias. Teniendo en cuenta que sólo habíamos repetido un programa (el de Alberto Kornblihtt hablando de biología) y no se habían emitido los dos que correspondían a los respectivos fines de año (2003 y 2004), tenía alrededor de 100 historias. Si escribía dos historias por día, en 50 días terminaría… ¡y tendría un libro!

Lunes 10 de enero del 2005.

–Diego. Soy Adrián –esta vez, llamé yo.

–¿Qué tal? ¿Lo pensaste?

–Sí, lo voy a hacer.

–Bárbaro, teneme informado y contá conmigo para lo que te haga falta.

–¿No necesito hablar con la gente de la editorial?

–No te preocupes. Eso lo arreglo yo.

Durante ese fin de semana, había hablado con Claudio Martínez, Alicia Dickenstein, Alberto Kornblihtt y Víctor Hugo Morales. Cada uno me impulsó a que lo hiciera.

No tardé cincuenta días, sino más del doble. Yo no lo sabía, pero por más que había contado por televisión casi todas las historias que figuran en el primer volumen de *Matemática…¿Estás ahí?*, una cosa era haberlas "hablado", y otra, muy diferente, era escribirlas. Pero lo hice.

Llegó el momento de la firma del contrato. Hasta ahí, nunca había hablado de dinero, ni con Diego ni con ninguna otra persona. Todavía no conocía a Carlos Díaz, el director de Siglo XXI. Nos sentamos en su oficina de la calle Tucumán y luego de las charlas triviales de presentación, le dije que tenía que hacerle un pedido.

–Adelante –me dijo

–Quiero que el libro se pueda *bajar* por Internet.

–Por supuesto –me interrumpió.

–Sí –agregué yo–, pero quiero que se pueda bajar *gratuitamente.* Quiero que el libro sea accesible para todos.

Carlos me miró a los ojos e hizo silencio. Diego, que no sabía lo que yo iba a decir, hacía ruido con los nudillos de los dedos contra la mesa. El tiempo *no transcurría.* Parecía que estábamos en una película en la que alguien había apretado el botón de *pausa***.**

–De acuerdo –me dijo Carlos–. No hay problema. Es algo que nunca pensé que un autor me propondría, pero no le veo inconve-

nientes. ¿Dónde querés que aparezca? ¿En qué página de Internet? ¿En la de la editorial?

–No tengo problema de que lo incluyan ahí también, pero quiero que figure en la página del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Yo soy profesor ahí, y siento que usé el tiempo que me paga la facultad para escribir el libro.

–Sólo quiero pedirte algo. No lo *cuelgues* de Internet hasta que publiquemos el libro. Yo sé que tenés el material listo, pero hagámoslo simultáneamente.

Y así fue. Pero la historia no termina ahí; hay más. Carlos me acercó el texto del contrato que tenía preparado y me dijo:

–Leelo y fijate en qué partes no estás de acuerdo. Cambiá lo que quieras y traémelo cuando puedas. Yo lo voy a firmar ni bien lo tengas listo.

–Un momento –dije yo–. ¿Qué pasa si no estás de acuerdo con las modificaciones que yo haga?

–No importa. Yo voy a firmar el contrato de cualquier manera, cambies lo que cambies.

Me quedé perplejo. Por segunda vez. La primera fue cuando Carlos aceptó tan rápido que el libro figurara en Internet, sin condiciones.

Obviamente, después de lo que había escuchado no me iba a llevar el contrato; no debía (ni quería) leerlo.

–Aquí está, entonces –le dije–. ¿Dónde tengo que firmar?

–¿No lo vas a leer? –me preguntó él.

–No. Si vos estás dispuesto a firmar cualquier cosa que yo corrija, entonces yo estoy dispuesto a firmar cualquier cosa que figure aquí. Sin leer.

Carlos se sonrió y desde ese momento se transformó en uno de mis mejores amigos.

Ésta es la historia que precede al primer libro. Hoy, usted tiene en sus manos el tercero de esta saga. Y Carlos, aunque usted no lo pueda creer, ya me propuso que escriba un cuarto.

Eso sí, ninguno de nosotros pudo imaginar lo que iba a pasar. De hecho, la editorial imprimió *3.000* (tres mil) ejemplares como primera edición del tomo 1. En cambio, imprimió *40.000* (cuarenta mil) de la primera edición del tomo 2. O sea, yo no sabía lo que iba a pasar, pero ellos tampoco.

Estos libros no tienen (casi) material inédito. Muy pocas cosas son ideas mías. La mayor parte está expuesta en múltiples lugares en la literatura dedicada a la matemática desde hace siglos. En todo caso, lo que sí me pertenece son:

a) Mis opiniones, que obviamente son personales. Son discutibles, como cualquier opinión. Lo único que puedo decir es que escribí lo que pienso después de más de cuarenta años de *comunicar matemática.* No me autoriza –ni mucho menos– a tener razón. Sólo me autoriza a tener una opinión. No pienso ahora lo mismo que hace veinte años, pero hace veinte años no había escrito estos libros.
b) La selección de los problemas. No tengo ninguna razón en particular para decir por qué sí a algunos y por qué no (por ahora) a otros (como el caso de los números de Fibonacci, por poner un ejemplo). Son decisiones anárquicas, que espero poder corregir con el tiempo. En todo caso, escribo sobre lo que me gusta, me atrapa y me hace/hizo pensar. A eso lo invito: a que piense.
c) La *forma* de la comunicación. Si bien la gran mayoría de los textos son conocidos desde hace muchísimos años (en algunos casos siglos), los escribí de acuerdo con lo que creo que es una buena manera para que se entiendan. Me peleo mucho con lo que escribo y no siempre gano, pero lo intento. Eso sí: si usted no entiende algo de alguno de los problemas que va a leer, es *siempre* mi culpa. Significa que en algún lugar yo tampoco entendí. No puede ser que usted lea algo (contando –por supuesto– con que le está prestando atención al texto) y no lo comprenda. Algo hice mal yo.
d) También son mías las anécdotas e historias de vida. De hecho, son el corazón del libro. Yo no soy un locutor que *vende* un producto sin importarle si es bueno o malo. Si hay algo que

figura en alguno de estos libros, es porque a mí me interesó y me gustó. No podría seducirla/o con algo que a mí no me hubiera cautivado.

Este tercer tomo podría ser, en realidad, el primero o el segundo. Las historias y los problemas son intercambiables. Con todo, quiero enfatizar algo: toda persona que sepa leer y escribir (y *pensar*) está en condiciones de enfrentar todas y cada una de las secciones y/o problemas que presenta el libro. No importa la edad, no importa la experiencia: sólo hay tener ganas de pensar.

Obviamente, los problemas tienen distintos grados de dificultad. Pero mi experiencia me indica que lo que a algunas personas les resulta difícil, a otras les puede parecer obvio. Y viceversa. La matemática está diseminada a lo largo del libro en cada cuento, en cada problema, en cada historia. Usted puede empezar por donde quiera, yo sólo le voy a dar un consejo (si me puedo permitir semejante cosa): diviértase, disfrútelo, aun cuando alguna propuesta no le salga. El hecho de que *no pueda resolver un problema* no significa nada. Al contrario: aproveche para tenerlo en la cabeza, para entretenerse cuando tenga tiempo. Es como tener un buen libro esperando en casa, o una buena película que uno quiere ver, o una buena comida que uno quiere comer. De eso se trata. De poder aprender a disfrutarlo.

Por último, una reflexión. Algo tiene que haber cambiado en la sociedad. Me explico: hace casi veinte años, en febrero de 1988, el periodista (y amigo personal) Carlos Ulanovsky era uno de los jefes de editoriales del diario *Clarín*. Me llamó y me propuso lo siguiente: "Adrián, ¿por qué no escribís por qué habría que estudiar matemática? Escribí sobre para qué sirve, para qué te sirvió a vos… Convenceme de que me estoy perdiendo algo".

Lo hice. La nota salió publicada el miércoles 3 de febrero de 1988. Ulanovsky la tituló: "En defensa de las Matemáticas". Salió en las dos páginas centrales del diario, y empezaba así: "Matemática.. ¿estás ahí? (igual que el título de los libros, casi una premonición). No. Me estoy poniendo las preguntas…".

¿Por qué cuento esta historia? Porque la nota pasó inadvertida en el diario más importante del país. Y si alguien la advirtió, yo no me enteré. Contenía varios de los ejemplos que figuran en los dos primeros tomos de esta colección. Pero no me llamó Carlos al día siguiente para decirme que quienes dirigían el diario querían que empezara a escribir con regularidad sobre esos temas, ni me dijo que ninguna persona hubiera llamado al diario para pedir más. No me ofreció un contrato como columnista.

Es decir que, si hubiera sabido que los libros iban a tener una respuesta como la que *ustedes* dieron a los dos primeros tomos, los habría escrito hace veinte años. Y no lo hice. Porque no sabía. Más aún: todavía hoy, no lo creo.

Eso sí: gracias.

¿Ya se sabe "todo" en matemática?

Es curioso, pero es tal la desconexión entre la sociedad y la matemática que la mayoría de la gente piensa (con razón, porque ésos son los elementos con los que cuenta) que la matemática "está toda inventada" o que es algo "cuadrado" que uno va, estudia, y *no* aplica, salvo en contadísimas ocasiones (suma, resta, división y multiplicación incluidas).

Sin embargo, no sólo *no* es así, sino que la matemática anda por la vida como la mayoría de las ciencias: sabiendo algunas cosas (pocas), e ignorando otras (muchas). El siguiente recorrido no pretende ser exhaustivo ni mucho menos original. Más aún: aparece en casi todos los "prólogos" de libros dedicados a la difusión de la matemática. Pero, si lo que usted llegó a cursar hasta completar (con suerte) fue el colegio secundario, lo invito a que reflexione sobre lo que va a leer (si es que no se aburrió ya).

Se trata de una historia que quiero empezar así: "Los chicos que se gradúan hoy del colegio secundario, aun aquellos que tienen una sólida formación en álgebra, geometría y trigonometría, están casi 400 (cuatrocientos) años atrasados con respecto a lo que es la matemática de punta hoy. Es decir: aprenden lo que se sabía ya hace cuatrocientos años. Por eso, la mayoría de las cosas resultan *aburridas e inexplicables.* Peor aún: de difícil aplicación".

Sin embargo, estoy convencido de que uno puede aspirar a más. Sígame en este recorrido apresurado sobre lo que pasó en los últimos siglos.

1) La matemática del siglo XVII produce un quiebre esencial: la aparición del cálculo, con el aporte casi simultáneo de dos científicos que se odiaron mientras vivieron. Me refiero al inglés Isaac Newton y al alemán Gottfried Leibniz. Más allá de las disputas personales, ambos coinventaron la noción de límite y, con ello, floreció el cálculo y/o el análisis. Esto significó el desarrollo de la física matemática, de la teoría de la relatividad, la mecánica cuántica y del conocimiento de la naturaleza de la materia.

2) Luego Georg Cantor con su teoría sobre los conjuntos infinitos irrumpe sobre el final del siglo XIX y continúa hasta principios del siglo pasado, creando en algún sentido un paraíso para la investigación en matemática. Cantor terminó poco menos que loco y vilipendiado por una comunidad que no lo comprendió.

Aquí, una pausa: en general, en los programas de matemática de los colegios secundarios, las teorías de Newton-Leibniz, de Cantor, los aportes de Gauss, Fermat y Euler *no* se estudian. Ése es un pecado que necesitamos corregir. Y lo antes posible.

3) Con el advenimiento del siglo XX, justo en el año 1900, David Hilbert enuncia en París, en el marco del Congreso Internacional de Matemática, los 23 problemas más importantes de la matemática que aún no tenían solución.[1] Con esto desafió al mundo –matemático, obviamente– e invitó a la comunidad científica a "arremangarse" y tratar de producir resultados. Hilbert dijo: "Tenemos que saber y vamos a saber". Estas palabras son las que están escritas en su tumba en Göttingen.

4) Nuevas ramas, como la topología, nacieron de la geometría y del análisis, y dominaron la investigación en matemática

[1] Fueron los problemas más importantes para Hilbert. Algunos se resolvieron fácilmente al poco tiempo, y obviamente varios adquirieron celebridad por haber sido formulados por él en ese congreso.

durante muchísimo tiempo. Se produjo también la enfática irrupción de las "Probabilidades y estadísticas", muy ligadas a la teoría de conjuntos, las funciones que se llaman "medibles" y las "teorías de integración".

5) Los últimos dos matemáticos universalistas fueron Gauss y Poincaré. Es que hace un siglo era posible imaginar que un extraordinario matemático pudiera *manejar* todo lo que se sabía de su especialidad en el mundo. Pero eso hoy no puede pasar. Otra vez, no sólo es improbable, sino casi "imposible". La cantidad de matemáticos en el mundo se ha multiplicado por miles. Más aún: se publican también miles de revistas de variadas especialidades en más de 100 idiomas. El volumen del conocimiento ha llegado a límites para el asombro. Se estima que se producen más de 200.000 nuevas teoremas por año, lo cual significa unos 600 teoremas nuevos ¡por día!

6) El 24 de mayo del año 2000, en el College de Francia, en París, el Clay Mathematics Institute, que tiene su base en Cambridge, Massachusetts, hizo algo parecido a lo que produjo Hilbert cien años antes: eligió siete problemas sin solución aún y los llamó Millenium Prize Problems (los Premios a los problemas del milenio). La idea fue publicitar los problemas y ofrecer *un millón de dólares* a quien pudiera resolver alguno de ellos. Justamente, ésos son los problemas que hoy están en la *frontera* del conocimiento.

7) Hace muy poco, en agosto de 2006, el ruso Grigori Yakovlevich Perelman sorprendió al mundo cuando anunció que había resuelto la famosa Conjetura de Poincaré. Perelman se negó a retirar su premio, sin embargo, la comunidad matemática le confirió la medalla Fields (equivalente al Premio Nobel). Perelman también se negó a retirar este premio y en la actualidad se encuentra recluido en su ciudad de origen, San Petersburgo, en Rusia.

¿Quién dijo que se sabía "todo"? El solo hecho de que "aceptemos" esto como posible demuestra qué lejos estamos del contacto con la "matemática real", la que investiga porque *no sabe*, la que es curiosa y atractiva, la que es seductora y útil. La que hay que *mostrar*, la que hay que sugerir. Y creo que ya es hora de empezar.

La matemática tiene sus problemas

Dos pintores y una pieza[2]

En una casa hay una habitación grande que hay que pintar. Un pintor, llamémoslo A, tarda 4 horas en pintarla solo. El otro, a quien llamaremos B, tarda 2 horas.

¿Cuánto tardarían si los dos se pusieran a pintarla juntos?

(Antes de avanzar: la respuesta no es 3 horas.)

¿Da lo mismo subir que bajar un 40%?

Algunas preguntas sobre porcentajes.

1. Si uno empieza con un número cualquiera, digamos 100, y le quita el 40%, y al resultado lo incrementa un 40%, ¿se llega otra vez a 100?
2. Al revés ahora: si uno empieza con el número 100, le agrega un 40%, y al resultado le descuenta ahora un 40%, ¿se llega otra vez a 100?
3. Las respuestas que dio para las dos preguntas anteriores, ¿dependieron de que empezara con el número 100, o habría dado lo mismo si hubiera empezado con cualquier otro número?

[2] Las respuestas a los problemas las encontrará en el capítulo "Soluciones" (pp. 181-237).

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

4. Y las respuestas que dio para las dos primeras preguntas, ¿dependieron de que fuera un 40%, o habría dado lo mismo con cualquier otro porcentaje?
5. Si uno incrementa un número en el 100% y luego descuenta el 100%, ¿se tiene el mismo número con el que empezó? Y al revés, si uno descuenta el 100% y luego lo aumenta, ¿qué obtiene?

Problema de los seis fósforos

Se tienen seis fósforos iguales. ¿Es posible construir con ellos cuatro triángulos equiláteros cuyos lados sean iguales al largo del fósforo?

Nota 1: No conteste rápido si no se le ocurre la solución. Piense.

Nota 2: Triángulo equilátero quiere decir que tiene *los tres lados iguales.* De hecho, "equi" = "igual", "látero" = lado. En este caso, lados iguales y, además, de igual longitud que la del fósforo.

¿Cómo hacer para pesar diez kilos con una balanza desbalanceada?[3]

Mucha gente cree que tiene mala suerte y lo expresa de distintas maneras. Por ejemplo: "El día que llueva sopa, yo voy a estar con un tenedor en la mano". O algo equivalente. El hecho es que si Murphy viviera, diría que uno siempre tiene un destornillador cuando necesita un martillo (o al revés). Pero con el tiempo y con paciencia, al final, nos ingeniamos para salir del paso.

Es posible que usted *nunca* tenga que enfrentar el problema que viene a continuación. Sin embargo, estoy seguro de que, el haber pensado en cómo resolverlo, *lo ayudará* a tener una llave extra en su arsenal, que uno *nunca sabe* cuándo necesitará utilizar.

[3] Este problema fue publicado por A. K. Peters en 2004, en el libro *Puzzles 101*.

Supongamos que tiene que pesar *exactamente* diez kilos de azúcar. Para lograrlo, se tienen dos pesas de cinco kilos cada una, y una balanza con dos platillos.

La dificultad reside en que la balanza está *desbalanceada.* Esto significa que, sin que haya ningún peso en ninguno de los dos platillos, hay uno que está más arriba que el otro.

¿Cómo hacer?

Los tres recipientes con dos tipos de monedas que tienen las etiquetas cambiadas

Supongamos que tiene tres recipientes iguales que contienen monedas. Y no se puede ver lo que hay en el interior de cada uno.

Lo que sí se puede ver es que en la parte de *afuera* de cada recipiente hay pegada una etiqueta.

Una dice: "Monedas de 10 centavos".

Otra dice: "Monedas de 5 centavos".

Y la tercera dice: "Mezcla".

Un señor que pasó por el lugar antes que usted, despegó *todas* las etiquetas que había y las puso, a propósito, en recipientes que *no correspondían.* ¿Alcanza con elegir *una sola moneda de un solo recipiente* para tener suficiente información para reordenar las etiquetas y poner cada una en el lugar que le corresponde?

Las cuatro mujeres y el puente

El problema que sigue se inscribe entre los llamados de "pensamiento lateral". En realidad, son problemas sencillos de enunciar, pero cuya solución aparece como resbaladiza. Lo curioso es que no bien uno la encuentra no puede entender cómo no se le ocurrió antes. Y la dificultad consiste en que uno "empuja" para ir en una dirección (aunque no lo advierte) que luego resulta equivocada (cosa que uno "tampoco" advierte). Créame que vale la pena pensarlo.

El problema que sigue requiere planificar una estrategia. No es difícil, pero tampoco trivial. Eso sí: no tiene trampas. Es un ejercicio muy conocido en el mundo de los que juegan a planificar e inventar caminos donde, en apariencia, no los hay. Y tiene el atractivo extra de que permite entrenar al cerebro. Acá va:

Hay cuatro mujeres que necesitan cruzar un puente. Las cuatro empiezan del mismo lado del puente. Sólo tienen 17 (diecisiete) minutos para llegar al otro lado. Es de noche y sólo tienen una linterna. No pueden cruzar más de dos de ellas al mismo tiempo, y cada vez que hay una (o dos) que cruzan el puente, necesitan llevar la linterna. Siempre.

La linterna tiene que ser transportada por cada grupo que cruza en cualquier dirección. No se puede "arrojar" de una costa hasta la otra. Eso sí: como las mujeres caminan a velocidades diferentes, cuando dos de ellas viajan juntas por el puente, lo hacen a la velocidad de la que va más lento.

Los datos que faltan son los siguientes:

Mujer 1: tarda 1 (un) minuto en cruzar
Mujer 2: tarda 2 (dos) minutos en cruzar
Mujer 3: tarda 5 (cinco) minutos en cruzar
Mujer 4: tarda 10 (diez) minutos en cruzar

Por ejemplo, si las mujeres 1 y 3 cruzaran de un lado al otro, tardarían 5 minutos en hacer el recorrido. Luego, si la mujer 3 retorna con la linterna, en total habrán usado 10 minutos en cubrir el trayecto.

Con estos elementos, ¿qué estrategia tienen que usar las mujeres para poder pasar todas –en 17 minutos– de un lado del río al otro?

Problema de las 10 monedas

Se tienen 10 monedas arriba de una mesa.

¿Es posible distribuirlas en cinco segmentos, de manera tal que queden *exactamente cuatro* en cada uno de ellos?

Si se puede, exhiba una forma de hacerlo. Si no se puede, explique por qué.

Cuatro interruptores

Hace un tiempo presenté un problema que involucra lo que se llama el "pensamiento lateral". Por las características que tenía, lo llamé "Problema de los tres interruptores". Obviamente no es algo que inventé (ni mucho menos), pero me pareció que, de todos los que conocía al respecto, *ése* era el más atractivo. De hecho, en varias charlas que tuve con grupos de jóvenes de distintas edades y también con gente dedicada a la docencia y divulgación de la matemática, recibí de parte de todos muy buenos comentarios.

Ahora quiero contar una anécdota e incorporar un grado de "dificultad" más al problema de los interruptores. El día que apareció en la contratapa del diario *Página/12* el problema de los tres interruptores, se me acercó Fernando Kornblit, un matemático argentino que trabaja en el INTI, y me dijo: "Adrián, muy interesante el problema de los interruptores, pero estuve pensando que *también tiene solución si en lugar de tres interruptores hubiera cuatro"*.

Le pedí que nos dejara pensar un rato, y eso es lo que le estoy proponiendo acá: que lo piense también. Sólo para refrescar las ideas, recuerdo el problema original que apareció publicado en *Matemática... ¿Estás ahí?* (Episodio 1):

> Se tiene una habitación vacía, salvo porque hay colgada desde el techo una bombita de luz. El interruptor que activa la luz se encuentra en la parte exterior de la pieza. Es más: no sólo hay un interruptor, sino que hay tres iguales, indistinguibles. Uno sabe que sólo una de las "llaves" activa la luz (y que la luz funciona, naturalmente).
> El problema consiste en lo siguiente: la puerta de la habitación está cerrada. Uno tiene el tiempo que quiera para "jugar" con los interruptores. Puede hacer cualquier combinación que quiera con ellos, pero puede entrar en la pieza sólo una vez. En el momento de salir, uno debe estar en condiciones de poder decir: "Ésta es la llave que

activa la luz". Los tres interruptores son iguales y están los tres en la misma posición: la de "apagado".
A los efectos de aclarar aún más: mientras la puerta está cerrada y uno está afuera, puede entretenerse con los interruptores tanto como quiera. Pero habrá un momento en que decidirá entrar en la pieza. No hay problema. Uno lo hace. Pero cuando sale, tiene que poder contestar la pregunta de cuál de los tres interruptores es el que activa la lamparita. Una vez más, el problema no esconde trampas. No es que se vea por debajo de la puerta, ni que haya una ventana que da al exterior y que le permita ver qué es lo que pasa adentro, nada de eso. El problema se puede resolver sin golpes bajos.

Hasta acá, el problema conocido. El agregado entonces es: si en lugar de haber *tres* interruptores, hay *cuatro,* ¿se puede encontrar la solución también entrando en la pieza una sola vez?

Ahora, otra vez (afortunadamente) le toca a usted.

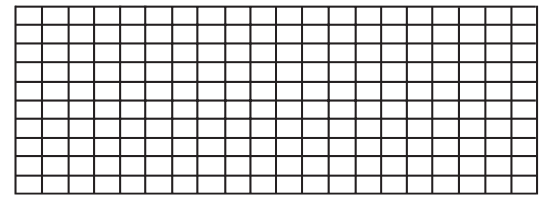
Problema de las ocho monedas

El siguiente problema invita, *una vez más,* a pensar un rato. Lo que puedo decir es que *hay una solución,* que *no es muy complicada,* pero que requiere analizar y evaluar las distintas posibilidades. Y para eso hace falta un poco de concentración. Nada más. Nada menos. Acá va.

Se tienen ocho monedas en apariencia iguales, aunque se sabe que una de ellas es más liviana que las otras siete. Además, hay una balanza con dos platillos y lo único que se puede hacer con ellos es poner monedas a uno y otro lado, y pesar solamente *dos* veces. Luego de esas dos pesadas, se supone que uno tiene que estar en condiciones de poder decir cuál es la moneda diferente (más liviana).

Problema de la barra de chocolate

Supongamos que le doy una barra de chocolate que tiene forma de rectángulo. Esta barra tiene divisiones: 10 a lo largo y 20 a lo ancho



(como muestra la figura). Es decir, en total, si uno partiera la barra, tendría 200 (doscientos) trozos de chocolate iguales.

La pregunta es: ¿cuál es el número *mínimo* de divisiones que hay que hacer para obtener los 200 bloquecitos?

Detalle: no importa el orden, ni el tamaño. Sólo se pregunta cuál es la forma más eficiente de cortar el chocolate (se supone que uno corta por el lugar donde figuran las divisiones).

El problema en sí mismo parece irrelevante. De hecho, lo parece *porque lo es*. Pero lo que no resulta irrelevante es advertir que, en la búsqueda de la solución, uno tuvo que imaginar diferentes situaciones. Quizá no le sirvieron para este ejemplo en particular, pero son caminos por los que uno, o bien ya anduvo, o bien los acaba de generar en su cerebro. ¿Cómo sabemos, o mejor dicho, cómo sabe usted que no va a utilizar en algún momento algo de lo que acaba de pensar? Más aún: ¿cómo sabe que algo que *hoy* tuvo que descartar no le va a servir mañana para algo que *hoy* no puede imaginar? Tener este tipo de problemas permite entrenar el cerebro y estimular la imaginación. Nada más. Nada menos.

Un cambio en la rutina

El siguiente problema fue seleccionado por Martin Gardner[4] como uno de los que más le gustaron por su sencillez y profundidad.

[4] Vale la pena recordar que Martin Gardner nació en 1914 en Tulsa, Oklahoma, Estados Unidos, y es uno de los más prolíficos y brillantes escritores y difusores de la matemática creativa que conoció el siglo XX.Su actividad se prolonga aún

Después de leerlo, y eventualmente resolverlo, quedarán algunas reflexiones, pero la más importante tendría que ser: ¿cuántas veces en la vida cotidiana creemos estar ante un problema que, o bien no tiene solución, o bien creemos que nos faltan datos para resolverlo?

Éste es un magnífico ejemplo para poner a prueba, *no* el ingenio (cuya definición me resulta muy resbaladiza), sino la capacidad para pensar *desde otro lugar*. Ahora, basta de generalidades. Acá va el planteo.

Un comerciante viaja a su trabajo todos los días usando el mismo tren, que sale de la misma estación y que tiene los mismos horarios, tanto de ida como de vuelta. Para colaborar con él, su mujer lo lleva a la mañana hasta la estación y luego lo pasa a buscar a las 5 de la tarde con su coche, de manera tal de ahorrarle un viaje en colectivo.

Para el problema, lo importante es que la mujer lo encuentra todos los días a la misma hora, a las 5 de la tarde, y juntos viajan a su casa.

Un día, el marido termina su trabajo más temprano y toma un viaje previo que lo deposita en la estación a las 4 de la tarde (en lugar de las 5, como es habitual). Como el día está muy lindo, en vez de llamar a la mujer para contarle lo que hizo, decide empezar a caminar por la calle que usa ella para ir a buscarlo. Se encuentran en el trayecto, como él había previsto. El marido se sube al auto y juntos vuelven a su domicilio, al que llegan 10 minutos antes que lo habitual.

Si uno supone la situación ideal (e irreal también) de que:

a) la mujer viaja siempre a la misma velocidad;
b) sale siempre a la misma hora de la casa para ir a buscar a su compañero;
c) el hombre se sube al auto en forma instantánea y sin perder tiempo;

---

hoy, a punto de cumplir los noventa y tres años. Las columnas que escribió durante veinticinco años en la revista *Scientific American* se transformaron en un clásico de la literatura dedicada a este campo. Es considerado por una abrumadora mayoría, el verdadero "gurú" de la especialidad.

d) nunca aparece nada extraño en el camino, ni semáforos que dilaten o aceleren el tránsito, etcétera.

¿Puede usted determinar cuánto tiempo caminó el marido cuando ella lo encontró?

Hasta aquí el planteo. Un par de reflexiones antes de pasar a la solución.

Como se da cuenta, el problema en sí mismo es una verdadera pavada. La belleza consiste en que no hay que utilizar ninguna herramienta sofisticada, ni ningún recurso extraordinario. Sólo hay que pensar, y para eso, usted decide cuándo y cómo lo hace. Lo único que le pido es que me crea que vale la pena.

Dicho esto, me queda un par de observaciones más. Luego de pensarlo un rato, uno empieza a sospechar que al problema le faltan datos. Por ejemplo, que falta saber:

a) la velocidad a la que caminaba el marido;
b) la velocidad a la que manejaba la mujer;
c) la distancia entre el domicilio y la estación.

Y seguramente habrá más cosas que usted pensó que me olvidé de poner aquí. No. No se necesita más nada. O sea, siga sola/o con lo que tiene, que es suficiente. La única concesión que me tiene que hacer es aceptar que las condiciones son ideales, en el sentido de que el hombre no pierde tiempo cuando sube al auto, que el auto gira en forma instantánea para ir de una dirección a la otra, que la mujer sale siempre a la misma hora para buscar al marido, etcétera.

Dos tías y dos colectivos

El ejercicio que sigue casi genera un problema familiar. De hecho, es antiintuitivo y, si uno no lo piensa bien, supone que hay algo que funciona muy mal o que hay trampa. Sin embargo, es una cuestión de lógica.

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Un muchacho, llamémoslo Juan, vive sobre una avenida de doble mano. Juan tiene *dos* tías. Saliendo de su casa, una tía vive a la izquierda y la otra, hacia la derecha. Ambas viven bastante lejos: para ir a la casa de cualquiera de ellas Juan tiene que tomar un colectivo.

Juan quiere mucho a ambas tías, y las quiere por igual, y ellas a su vez quieren que él las vaya a visitar seguido. Por suerte (para Juan) hay dos líneas de colectivos que pasan justo por la casa de él y tienen paradas exactamente frente a su puerta. Sin embargo, las líneas van en direcciones contrarias. La línea *roja* va hacia la derecha, mientras que la *azul*, hacia la izquierda.

Las dos líneas pasan por la casa de Juan *exactamente* cada 10 minutos. Nunca se atrasan. Siempre, cada 10 minutos un colectivo rojo y otro azul. Claro, los colectivos no tienen por qué pasar a la misma hora. Puede ser el caso de que el azul pase a la "hora en punto", a las "y 10", "y 20", "y 30", "y 40" e "y 50", mientras que el rojo pasa "a las y 5", "y 15", "y 25", "y 35", "y 45" e "y 55". Pero el hecho es que los colectivos *nunca* llegan fuera de hora.

Con esta distribución de los colectivos Juan quiere ser equitativo con sus tías y les propone lo siguiente:

–Hagamos una cosa –les dice–. Cuando yo vaya a visitar a alguna de ustedes, voy a salir a la calle y esperar el primer colectivo que venga. Si es rojo, lo tomo y visito a la que vive a la derecha, y si es azul, visito a la otra tía.

Las tías escuchan atentas, y hasta aquí no ven nada raro ni les parece mal la propuesta. Juan agrega:

–Eso sí. No voy a salir a esperar el colectivo siempre a la misma hora. Voy a salir a una hora aleatoria (o sea, a cualquier hora que me venga bien) y tomo el primer colectivo que pase.

Las tías asintieron, demostrando su conformidad con el acuerdo.

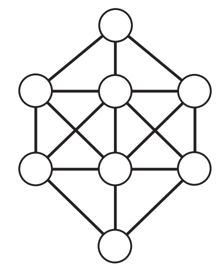
Sin embargo, con el paso del tiempo, Juan visitaba mucho más a una tía que a la otra. Ante el reclamo de la tía menos visitada, Juan aseguró enfáticamente que él cumplía con lo pactado.

El problema consiste en explicar por qué sucede esto, sin suponer que hay alguna trampa, del estilo "Juan no podía cruzar la calle cuando venía el colectivo que iba para…", o "Juan mintió y cuando viene

el colectivo azul lo deja pasar y espera el rojo", o "Juan no cumple con su palabra y sale siempre a la misma hora". No. No hay trampas, no hay trucos. Es sencillamente un problema que se resuelve usando un poco de lógica. Y un papel, lapicera en mano y tiempo.[5]

Ocho números conectados

Se tiene el siguiente dibujo:



El objetivo del problema es distribuir los primeros ocho números (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8) en los círculos indicados en el dibujo, de manera tal de que no haya ningún par de números *consecutivos* unidos por un segmento. ¿Se podrá? ¿O no?

Muchas veces en la vida cotidiana uno tiene un problema pero *no sabe* si tiene solución. Lo que tiene, entonces, es *un* problema para resolver, pero además, y mucho más importante, uno no sabe si el problema tiene solución. Lo cual representa otro problema.

Es muy común en los colegios que a uno le planteen un problema, pero *le advierten* que *tiene solución, o se infiere del contexto.* Ningún profesor o maestro pone en una prueba ejercicios para resolver

[5] Este problema me lo envió Maxi Combina, estudiante de Ciencias de la Computación en la Universidad Nacional de Córdoba. Luego de acordar con él, me tomé la libertad de hacerle algunas modificaciones (pequeñas, por cierto) y agregarle la solución.

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

cuya solución no conozca. Muy diferente… *muy diferente*… es no saber si cuando uno busca y no encuentra es porque no existe o porque intentó mal, o no tuvo suerte, o eligió el camino equivocado.

La tentación que tengo es, entonces, plantear el problema de arriba y preguntar si tiene solución o no. Claro, en caso de que alguien diga que no tiene solución, tendrá que *demostrarlo*. Es decir, no alcanzará con que diga que intentó mucho tiempo y no la encontró. Eso no prueba nada. O en todo caso, sí. Prueba que usted intentó mucho. Pero nada más. Podría venir otra persona y resolverlo. En cambio, si usted pudiera *probar* que el problema no tiene solución, entonces será indistinto el tiempo que uno le dedique, o la persona de que se trate. No existiría solución y, por lo tanto, no se la podría encontrar.

Por otro lado, si uno dice que *tiene solución,* debería poder exhibirla. O, en todo caso, *demostrar* que sabemos que tiene solución ofreciendo argumentos.

Lo dejo (por un rato) con la pregunta. Y me llevo la respuesta para el final.

Problemas de Fermi

Se llaman así los problemas que involucran alguna *estimación* para poder llegar a la respuesta. Deben su nombre a Enrico Fermi, premio Nobel de Física.[6] No se pretende que uno conteste *con exactitud,* ni con *precisión extrema.* Se trata de *estimar un número.* Hay muchos ejemplos muy conocidos y sólo elijo uno entre ellos: ¿cuántos afinadores de piano hay en la ciudad de Boston?

[6] Enrico Fermi fue un físico italiano que vivió entre 1901 y 1954. Sus contribuciones más importantes fueron en el campo de la física nuclear y la teoría cuántica: le entregaron el Premio Nobel de Física por su contribución al desarrollo de la energía nuclear. Sin embargo, no bien recibió el premio, Fermi fue forzado a dejar Italia y se convirtió en un activo investigador en la Universidad de Chicago.

Actualmente, uno de los laboratorios de física más importantes del mundo lleva el nombre de Fermi Lab (cerca de Chicago).

Fermi fue miembro del equipo que se conoció con el nombre de Proyecto Manhattan, y que desarrolló la bomba atómica en Los Álamos, Nuevo México.

Obviamente, nadie aspira a que, frente a esta pregunta, el interlocutor conteste con un número *exacto.* Sin embargo, *sí* se pretende que quien responda no diga 50 si son 10.000, pero tampoco que diga 10.000 si son 50. Se trata entonces, por un lado, de *estimar* una respuesta, pero aún más importante, *el proceso* que involucra.

El ejemplo que me ocupa acá es el siguiente. Supongamos que se va a jugar un partido de fútbol en la cancha de River (para elegir un estadio grande, en el que entran aproximadamente 70.000 personas, pero el ejemplo se puede adaptar a cualquier país o a cualquier ciudad o cualquier equipo). Supongamos además que el estadio va a estar *repleto* de gente. Si uno trajera suficientes pelotas de fútbol (infladas) y las distribuyera por el campo de juego (sin encimarlas) hasta ocuparlo por completo, ¿alcanzarán para que al finalizar el partido se le pueda entregar una pelota a cada espectador?

Una vez planteado el problema, lo dejo para que consiga los datos que le hagan falta, ya sean las *dimensiones* de una pelota así como las de una cancha de fútbol. Pero, más allá de los datos que le pudieran faltar, no se olvide de que se trata de una estimación.

Algo más antes de pensar el problema: ¿se anima a dar una respuesta *aun antes* de hacer ninguna cuenta? ¿Qué le parece que va a pasar? ¿Alcanzarán o no?

Otro problema de Fermi

Con la misma idea de las pelotas en una cancha de fútbol, supongamos ahora que ponemos cada pelota dentro de una caja cúbica (en donde entra casi exactamente una pelota), y luego ubicamos estas cajas en un camión, de manera tal que cada camión puede transportar 20 contenedores de un metro cúbico cada uno. ¿Cuántos camiones hacen falta para transportar todas las pelotas?

Como antes, se trata de una estimación. No se pretende una respuesta perfecta.

* * *

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Las preguntas que uno puede *formularse* con la idea de *entrenarse* son muchísimas y, por supuesto, dependerá de la creatividad de cada uno para cuestionar o de la habilidad para buscar en Internet o en los libros sobre el tema.[7] Propongo aquí algunas:

1) Si usted pusiera billetes de *2 pesos* en una columna, hasta que pudiera alcanzar la *deuda externa argentina,* ¿cuán alta le parece que sería esa *pila* de billetes? ¿Cuánto le parece que pesaría? ¿Cuál sería la presión sobre el piso en el que se apoya?
2) ¿Cuántos pelos tiene usted en la cabeza? ¿A qué velocidad cree que crece el cabello en un humano? ¿Cuántas células le parece que tiene nuestro organismo?
3) ¿Cuántos cuadros cree que tiene un *dibujito animado* de Walt Disney?
4) ¿Cuántos kilómetros habrá de carreteras en la Argentina? ¿Cuál será el volumen de todos los lagos?

Problema de la montaña

El siguiente problema es ciertamente fascinante. Si uno lo quiere abordar en forma directa, creo que se enfrentará con múltiples complicaciones. En cambio, si puede ingeniárselas para pensarlo desde otros ángulos, es un problema no sólo sencillo sino verdaderamente fácil.

Aquí va: una persona está al pie de una montaña. La montaña tiene un solo camino hacia la cumbre. El señor decide escalarla y sale a las cero hora del día lunes (o sea, a la medianoche del domingo). No importa la velocidad a la que asciende ni lo que hace en el trayecto (incluso puede parar o bajar, si quiere), pero lo que se sabe es

[7] Algunas fuentes consultadas son: http://www.physics.umd.edu/perg/fermi/fermi.htm#General; http://mathforum.org/workshops/sum96/interdisc/sheila3.html; http://www.soinc.org/events/fermiq/fermiguide.htm; http://www.vendian.org/envelope/dir0/fermi_questions.html; http://www.physics.odu.edu/~weinstei/wag.html

que 24 horas más tarde el señor estará en la cumbre. O sea, a la medianoche del lunes *seguro* que llegó a lo más alto.

Ahora bien: una vez arriba, se queda un tiempo allí (no importa cuánto), digamos seis días, y exactamente a la medianoche del siguiente domingo, o sea las cero hora del lunes, comienza el descenso. Igual que antes, no importa de qué forma camina hacia abajo (por la única ruta que existe) y, como la semana anterior, si para para descansar, o subir un poco… En definitiva, es libre de hacer lo que quiera. Pero, lo que sí se sabe, una vez más, es que a la medianoche del lunes, 24 horas más tarde, ya estará abajo.

El problema consiste en lo siguiente: probar que existe al menos un lugar en donde el hombre estuvo a la misma hora, tanto al subir como al bajar.

Lo planteo de otra forma. Convénzase de que no importa cómo haya hecho para subir o para bajar, tiene que haber al menos un lugar en el camino que une la base con la cima, por la que el señor pasó en el mismo horario tanto a la ida como a la vuelta.

Por ejemplo, si el señor recorriera la mitad del trayecto en 12 horas, eso significaría que a las 12 del mediodía estará en el mismo lugar al subir que al bajar. Obviamente, esto es solo un ejemplo, ya que como el hombre tiene total libertad para la ida como para la vuelta, no tiene por qué recorrer la mitad del trayecto en 12 horas.

Ocho reinas

El problema de las *ocho reinas* consiste en saber si es posible ubicar en un tablero de ajedrez ocho reinas (no importa el color, naturalmente), de manera tal que ninguna de ellas pueda atacar a las restantes.

Una reina, en el ajedrez, gobierna lo que sucede en la fila y la columna en las que está ubicada, además de las diagonales.

Algunas de las preguntas que surgen son:

a) ¿Es posible encontrar una configuración de manera tal que *ninguna pueda "atacar" a ninguna?*

b) Si existe tal configuración, ¿cuántas hay?
c) ¿Hay algún método para construir configuraciones?

Este problema fue planteado originariamente a fines del siglo XIX por Max Bezzel, un ajedrecista de la época, y fue *abordado por muchísimos matemáticos,* entre otros, por Gauss, Gunther y Glaisher. Antes de avanzar, lo invito a que piense sola/o si tiene o no solución.

Pero más aún. Supongamos por un momento que usted es capaz de encontrar alguna. ¿Qué sucedería si rota el tablero 90 grados? (Piense la respuesta.) Sigo yo: ¿no estaría encontrando una nueva solución? Ahora que le sugerí que se podía rotar 90 grados, ¿qué otros movimientos podría hacer para obtener otros resultados? Por supuesto, rotar 90 grados es uno de ellos, pero rotar 180 y 270, también. Y no termina ahí. Supongamos que usted hiciera reflejar en un espejo una solución, ¿no encontraría otra? ¿Será alguna de las anteriores? ¿Y si rota la nueva que obtiene así? ¿Cuántos resultados esencialmente distintos se encontrarán con ese mecanismo?

A todas estas operaciones (rotaciones y reflexiones), los matemáticos las llamamos operaciones de simetría. En definitiva, es razonable pensar que, si uno tiene dos soluciones pero puede llegar empezando en una y, luego de rotar y/o reflejar, llegar a la otra, entonces se trata –en esencia– de la misma solución.

Vuelvo a las preguntas iniciales: ¿cuántas soluciones posibles hay, genuinamente diferentes?[8]

El cronómetro y las infinitas monedas

La mejor manera de desafiar la intuición, provocar al cerebro, entrar en conflicto con la lógica, es plantear un problema que involucre al *infinito.* O mejor dicho, que involucre a conjuntos infinitos. Al mismo

[8] Hay numerosa literatura escrita para este problema. En Internet, hay algunos sitios atractivos:
http://en.wikipedia.org/wiki/Eight_queens_puzzle
http://bridges.canterbury.ac.nz/features/eight.html

tiempo, estos casos suelen activar una catarata de respuestas contradictorias, de debates internos que muestran, una vez más, la riqueza de nuestro intelecto, al que no siempre aprovechamos ni entrenamos.

Le propongo, entonces, pensar lo siguiente: supongamos que usted tiene *infinitas monedas.* (Sí, ya sé: infinitas monedas NO HAY, pero éste es un problema que requiere "estirar" la imaginación hasta ese lugar… ¿se anima?) Supongamos que en una habitación está usted con un amigo y que entre los dos tienen *infinitas monedas*. Como las monedas son todas iguales (digamos de 1 peso), ustedes les pusieron un "número" a cada una y las ordenaron en forma creciente (o sea, primero la número 1, luego la 2, la 3, etc.). Además, en la habitación hay:

a) una caja enorme (en donde uno de ustedes va a empezar a colocarlas), y
b) un cronómetro.

El proceso que va a empezar ahora es el siguiente: yo hago arrancar el cronómetro, que empieza en la posición 0 y dará una vuelta hasta llegar a cubrir 60 segundos (1 minuto). Usted tiene 30 segundos para colocar en la caja las monedas numeradas del 1 al 10. Una vez hecho esto, su amigo retira la moneda que lleva el número 1. Ahora, les quedan sólo 30 segundos en el reloj y nos empezamos a apurar. En la mitad del tiempo que les queda, o sea, en los siguientes 15 segundos, usted coloca en la caja las monedas del 11 al 20 y, rápidamente, su amigo retira de la caja la moneda que lleva el número 2. Ahora quedan 15 segundos antes de que se cumpla el minuto. En la mitad de ese tiempo (o sea, 7 segundos y medio), usted tiene que colocar en la caja las monedas numeradas del 21 al 30, y su amigo retirará de la caja la moneda número 3.

Y así continúa el proceso indefinidamente: usted usa la mitad del tiempo que queda hasta completar el minuto para ir colocando diez monedas por vez en la caja, y su amigo va retirando (en forma ordenada) una por vez. Por ejemplo, y para ratificar que entendimos el proceso, en el próximo paso, en la mitad del tiempo que queda

(3 segundos y tres cuarto) usted coloca en la caja las monedas numeradas del 31 al 40 y su amigo retira la moneda número 4.

Creo que se entiende el procedimiento. En cada paso, usamos la mitad del tiempo que nos queda para ir colocando, sucesivamente –y en forma *ordenada*–, 10 monedas y sacando también en forma consecutiva la moneda con el número más chico. Obviamente, a medida que va avanzando el cronómetro y se va acercando a cumplir con el minuto pautado, tenemos que apurarnos cada vez más. La idea es ir reduciendo el tiempo a la mitad para colocar 10 monedas y retirar 1.

La pregunta que tengo para hacer es la siguiente: una vez terminado el tiempo (o sea, cuando expiraron los 60 segundos), ¿cuántas monedas hay en la caja?

Las hormigas y Alicia[9]

En una barra de un metro de longitud hay 100 hormigas *anónimas* (en el sentido de que son indistinguibles unas de otras). Además, hay una hormiga diferente, que llamamos Alicia. Ella es la hormiga número 101 del problema. Para distinguirla aún más, Alicia está parada exactamente en la mitad de la barra. Todas las hormigas caminan a la misma velocidad: *un metro por minuto* (incluida Alicia). Algunas caminan para un lado y otras, para el otro. Pero la regla que siguen es la siguiente: cuando dos hormigas chocan, ambas dan la vuelta y salen caminando en el sentido contrario al que traían.

Por supuesto, antes de plantear un par de preguntas posibles, me adelanto a decir que todo es ficticio y que haremos de cuenta que las hormigas no tienen espesor y que cada una ocupa un solo punto de la barra sobre la que está caminando. Es decir, son condiciones ideales.

Inicialmente, todas las hormigas están quietas, pero van a salir caminando en *alguna* dirección, *todas* al mismo tiempo.

[9] Estos problemas me los contó Matías Graña, profesor del Departamento de Matemática de Exactas (UBA), quien es además amigo personal.

Hechas estas observaciones, paso a formular las preguntas:

a) Si en los bordes de la barra no hay nada que las detenga, es decir que cada vez que una de las hormigas llega a cualquiera de los bordes se cae, entonces: ¿cuánto tiempo tiene que transcurrir, desde el momento en que empiezan a caminar, para estar *seguros de* que se cayeron todas?
b) Si, en cambio, en cada uno de los bordes del palo hay una madera, de manera tal que, cada vez que una hormiga *choca* contra esa pared, da la vuelta y camina en la dirección contraria, ¿es posible hacer una distribución de las 100 hormigas restantes para garantizar que Alicia, que empieza en el medio de la barra, al cabo de un minuto *termina otra vez en el medio* de la barra?
c) Pregunta *extra:* ¿cuántas distribuciones posibles se pueden encontrar de las 100 hormigas para que Alicia termine, después del minuto, otra vez en el medio de la barra?

Dos preguntas (en una)

Pregunta 1

Supongamos que usted tiene un tablero de ajedrez, el clásico de 8 x 8 cuadraditos. ¿Cuántos cuadrados se pueden formar usando los lados de esos cuadrados?

Por ejemplo, un cuadrado a considerar es *todo el tablero,* que es el único que hay de 8 x 8. Pero hay otros… La pregunta es cuántos.

Pregunta 2

Ahora, enfrentemos el caso más general. Si en lugar de considerar un tablero de ajedrez de 8 x 8, tuviéramos un tablero *cuadrado* de n x n, donde n es un número natural cualquiera. En este caso: ¿cuántos cuadrados se podrían construir?

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

El acolchado cuadrado

Este problema fue propuesto por Henry Dudeney en 1917.

Vamos a suponer que usted tiene un acolchado que forma un *cuadrado* y que está compuesto por 169 cuadraditos (figura 1).

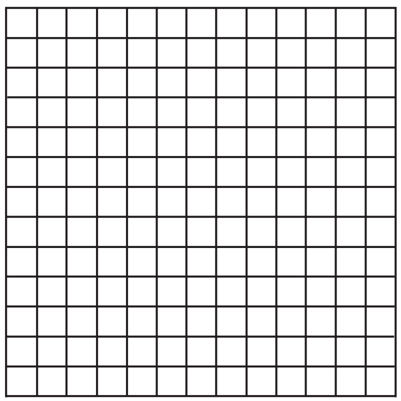


Figura 1

Uno podría pensar este acolchado como un *gran cuadrado de 13 x 13*. O también, como un acolchado compuesto por 169 "cuadraditos". Pero el objetivo es encontrar la menor cantidad de *cuadrados* posibles en los que se pueda partir el cuadrado grande (es decir, de tamaño estrictamente menor que 13 x 13), y exhibir las formas en las que se puede armar nuevamente. Por ejemplo: supongamos que uno tiene un cuadrado de 3 x 3. Por supuesto, podría *partirlo* en cuadraditos de 1 x 1 y tendría *nueve* de esos cuadrados. Pero esa partición es mala, en el sentido de que uno puede encontrar una mejor. Por ejemplo, tomar un cuadrado de 2 x 2 y luego *cinco* cuadraditos de 1 x 1 (como se ve en la figura 2). Eso da un total de *seis* cuadraditos.

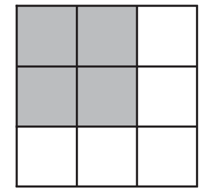


Figura 2

Vuelvo al problema original: el objetivo es encontrar el mínimo número de cuadrados en los que se pueda partir el acolchado grande de 13 x 13. Obviamente, se excluye el caso 13 x 13, ya que, si no, habría uno solo: ¡el original! Piénselo y luego, en todo caso, verifique qué solución encontró. Si me permite, le hago una sugerencia: empiece como hice yo, con acolchados de 3 x 3 (hasta que se convenza bien del ejemplo), luego siga con acolchados de 4 x 4, de 5 x 5, etc., hasta que desarrolle una intuición de qué es lo que habría que hacer. No empiece directamente con el de 13 x 13, porque es más complicado.

¿Siempre hay puntos "antipodales" en la Tierra que tienen la misma temperatura?

Desafío: yo le aseguro que siempre hay dos puntos en el planeta (Tierra) ubicados exactamente en las antípodas, en donde la temperatura *es exactamente igual*. ¿Cómo se puede demostrar esto?

Como siempre, la idea es que piense por su cuenta y trate de plantearse el problema primero; leerlo, meditar sobre él, reflexionar sobre si se entiende o no, y luego, pensar en alguna potencial solución. Ah, y no encontrarla no significa nada, como tampoco significa nada encontrarla. Eso sí: todo el recorrido sí significa… y mucho.

DEMOSTRACIÓN

Le propongo que construyamos juntos dos puntos *antipodales,* es decir, dos puntos que estén en lados opuestos de la Tierra (si bien quizás oyó que Buenos Aires y Tokio son antipodales, en realidad, si uno se fija en un mapa, se va a dar cuenta de que no es exactamente así).

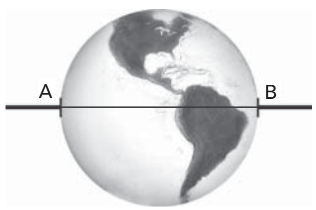
© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

No importa. Lo que quiero es que nos pongamos de acuerdo sobre cómo construir dos puntos que *sí* estén en las antípodas.

Supongamos que usted está mirando la Tierra, y "ve" los paralelos y los meridianos. Fíjese en el "ecuador" (o sea, el *más grande* de todos los paralelos).[10] Tome un punto cualquiera allí. Imagine que lo pincha con un palito que atraviesa la Tierra en forma horizontal (suponiendo que está sosteniendo la esfera con el polo norte "arriba" y el polo sur "abajo"), y lo hace aparecer del otro lado. Allí, al salir, vuelve a encontrar otro punto del ecuador. Ese otro punto, está justamente en las antípodas (también llamados puntos antipodales).

(Como se advierte hay, además, una cantidad *infinita* de pares antipodales. Es decir, para cada punto que elija sobre el ecuador, del "otro lado" existe el punto antipodal al que eligió.)

Voy a llamar a esos dos puntos A y B:



¿Qué podría pasar con respecto a las temperaturas en ambos puntos? Si en esos dos lugares la temperatura fuera igual, o sea, si

$$A = B$$

[10] En realidad, sirve cualquier *círculo máximo.* Imagine a la Tierra como si fuera una pelota de tenis. Téngala en la mano, haciéndole una marca en el "equivalente" del polo norte y otra en el que sería, imaginariamente, el polo sur. Si ahora coloca una banda elástica o un piolín que enrolle a la pelota de tenis y que pase por esas dos marcas, eso es un círculo máximo. Claro, usted puede hacer *girar* la pelotita, y tomarla de otra forma. Entonces, habrá dos *nuevos polos norte y sur.* Como se ve, habrá nuevos *círculos máximos* que son los círculos que pasan por esas dos nuevas marcas. En definitiva, lo que se observa es que hay infinitos círculos máximos, y son aquellos que sirven para *envolver* a la Tierra (o a la pelotita de tenis) pero que tienen la *mayor longitud posible.* Ésos son los círculos máximos.

Listo, se terminó el problema: hemos encontrado los puntos que buscábamos.

Ahora, supongamos que no fuera así. Es decir, la temperatura en los dos puntos no es la misma. Entonces, en uno de los dos la temperatura es mayor. Digamos que en A es mayor que en B (o sea, que en A hace más calor que en B), y lo denomino así:

$$A > B$$

Esto también puede expresarse de otra forma, diciendo que la diferencia de temperaturas entre ambos puntos es positiva. Es decir que, si uno resta la temperatura de los dos lugares, obtiene un número positivo.

$$(A - B) > 0$$

Para fijar las ideas (aunque no sea necesario), supongamos que en A hay 35 grados de temperatura y en B, 20.Entonces la diferencia de temperaturas entre ambos puntos es de 15 grados ($35 - 20 = 15$).

¿Qué estará pasando al mismo tiempo en los otros puntos antipodales que están sobre el ecuador? Quiero probar que hay al menos un par de puntos antipodales que en ese momento tienen la misma temperatura.

Imaginariamente, supongamos que uno hace girar el palito que tiene en una punta a A y en la otra a B. Le recuerdo que el palito pasa siempre por el centro de la Tierra, y tiene las dos puntas apoyadas en el ecuador. Ahora, volvamos a pensar en la diferencia de las temperaturas entre los dos puntos finales del "palito". ¿Qué puede pasar con esa diferencia de temperatura entre esos dos puntos? Sabemos que $(A - B) > 0$ (en realidad, en el ejemplo que estábamos considerando la diferencia de temperaturas era de 15 grados). Al movernos y estudiar los cambios de temperatura en los extremos del palito, la diferencia puede seguir siendo positiva, o puede pasar a ser negativa, o incluso puede valer cero.

Analicemos cada caso.

a) Si al detenernos en otro par de puntos (ambos antipodales) la diferencia es cero, entonces allí hemos encontrado lo que queríamos: las temperaturas en ambos puntos *es la misma*.
b) Ahora lo invito a pensar conmigo. Si cuando nos detenemos la diferencia entre las temperaturas de los dos puntos dejó de ser positiva y pasó a ser negativa, eso significa que en algún momento del proceso… ¡tuvo que haber pasado por cero! Y eso es lo que queremos. En ese instante hemos encontrado los dos puntos antipodales con temperaturas iguales.[11]
c) ¿Puede ser que siempre se mantenga la diferencia de temperaturas positiva? No, la respuesta es no, ya que si diéramos una vuelta de 180 grados con el palito, y llegáramos con el punto A hasta el B (y a su vez, el B llegara a ser A), esa diferencia ahora tendría que cambiar, y pasaría a ser negativa (en el ejemplo que elegí, la diferencia es de 15 grados). Luego, en algún momento, esa diferencia *tuvo que haber sido nula.* Y eso es lo que buscamos.

Eso demuestra que inexorablemente siempre hay sobre la Tierra dos puntos antipodales en donde la temperatura es la misma. Y para eso, hace falta usar matemática. De hecho, el teorema que se usa se conoce con el nombre de Teorema del valor intermedio para funciones continuas, y la temperatura *es* una función continua.

[11] Piense que la temperatura varía *continuamente al movernos.* Por ejemplo: si usted está parado en la puerta de su casa y allí la temperatura es de 20 grados, y su hermana, que vive a 10 cuadras, está también parada en la puerta de la casa de ella, pero allí la temperatura es de 18 grados, entonces, en algún lugar entre su casa y la de su hermana la temperatura tiene que ser de 19 grados, y 19 y medio también. Y 18 grados 3 décimas también. (¿Entiende por qué?) Es decir, la temperatura no puede *saltar* de un lugar a otro. Al ir caminando, la temperatura irá variando y para pasar de 20 a 18, tendrá que recorrer todas las posibles temperaturas intermedias. Esto es lo que quise decir cuando escribí que la temperatura varía continuamente, o sea, no pega saltos.

Ramo de rosas de distintos colores

Veamos ahora dos tipos diferentes de problemas con los que uno se encuentra en la matemática.

Una categoría de problemas la conforman aquellos de los cuales uno sabe (de alguna forma) que tienen solución, y el objetivo es tratar de encontrarla.

Otra categoría –muy diferente– la integran aquellos de los cuales uno *ignora* si tienen solución o no. Por supuesto, el problema se resuelve, o bien mostrando que la “supuesta” solución no puede existir, o bien demostrando que existe y, eventualmente, encontrándola. Una cosa es tropezarse con un problema *sabiendo* que *tiene* una solución (la dificultad reside en que uno sea capaz de encontrarla) y otra muy distinta tener un problema delante *y* no saber si se puede resolver siquiera. La vida cotidiana, justamente, está repleta de estas últimas situaciones. En general, las primeras aparecen en los momentos en los que uno estudia o se entrena, pero cuando aparece un problema en la vida real, por lo general no viene con un aviso de que la solución existe. De ahí que la aventura del descubrimiento sea tan apasionante.

Veamos un ejemplo:

Un florista le entregó a un señor un ramo de flores que contenía *rosas* de distintos colores: *rojas, azules y blancas.* Pasó un par de días y el señor, como no había pagado, volvió al local y preguntó cuánto debía, teniendo en cuenta que cada color de rosa tenía un precio diferente.

El florista había perdido el papel en donde había anotado todos los datos, pero recordaba algunos. En principio, sabía que había puesto al menos dos rosas de cada color. Y además, podía afirmar que:

a) Había *100 rosas* si uno sumaba las *rojas* y las *blancas;*
b) había *53 rosas* si uno sumaba las *blancas* y las *azules,* y
c) si uno sumaba las *azules* y las *rojas, había estrictamente menos que 53 flores.*

¿Es posible con estos datos decidir *cuántas flores había de cada color*?

La respuesta la va a encontrar en el apartado de las soluciones, pero quiero hacer antes una observación. Obviamente, éste no es un ejemplo de la vida cotidiana. No se me escapa que, si un florista pierde un papel en donde tenía anotado las particularidades del ramo, es muy poco probable que recuerde datos, como pasa en este caso… Pero vale la pena pensarlo porque uno, al final, se acostumbra a recorrer ciertos caminos, y cuando los necesita porque aparecen en alguna otra situación de la vida, sabe que tiene *el recurso de usar esta herramienta tan potente,* como es la de poder *pensar.* Y de eso se trata.

Números y matemática

Menos por menos *es* más... ¿Seguro?

Una de las "verdades" que nos *enseñan* en la escuela o en el colegio es que

"Menos por menos es más".

Uno anota. Piensa. No entiende. Vuelve a pensar. Sigue sin entender. Mira al compañero de al lado. Él tampoco entiende. Y de pronto se oye a la maestra o el profesor, que otra vez nos taladran con:

"Menos por menos es más".

Uno tiene varias alternativas frente a esto. La más probable es que *bloquee la mente,* deje el cuerpo en el lugar, escriba como un autómata, pero en realidad ya nada más de lo que se oiga o se lea en esa habitación va a convocar su atención, al menos por un rato.

–¿Qué dijo? –dice uno preocupado.

–Dijo algo así como que… *menos por menos, es más* –contesta el compañero del banco de al lado.

–No entiendo –contesta el primero.

–Yo tampoco –dice el otro, pero al menos éste pudo repetir lo que había oído.

Entonces uno levanta la vista y ve en el pizarrón escrito:

Ejemplos:

$$(-3) \cdot (-2) = 6$$
$$(-7) \cdot (-3) = 21$$
$$(-15) \cdot (-1) = 15$$

Y un poco más abajo, uno advierte con horror que incluso se ¡aplica a fracciones!

$$(-1/2) \cdot (-6) = 3$$
$$(-9) \cdot (-2/3) = 6$$
$$(-2/5) \cdot (-3/4) = 3/10$$

El pizarrón escupe números, símbolos, igualdades, letras que invitan a abandonar todo y escapar. ¿De qué habla esta persona? Pero uno no tiene más remedio que aceptar. En la escuela o el colegio, acepta porque en general no se enseña con espíritu crítico (con las excepciones correspondientes), sin embargo aquí cabe preguntarse inmediatamente: ¿por qué?

De todas formas, el tiempo pasa, y uno termina aceptando el axioma (o lo que *parece* como un axioma o verdad absoluta) de que menos por menos *es* más, porque:

a) no le queda más remedio,
b) no se contrapone con nada de lo que uno ya sabe,
c) uno nunca necesitó usarlo en la vida cotidiana,
d) cierto o falso, no me afecta, y, por último,
e) no me interesa

Mi idea es tratar de encontrar alguna explicación de por qué es cierto que menos por menos *tiene* que ser más.

CASO 1

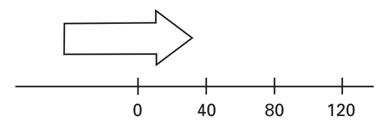
Supongamos que está manejando su auto a 40 kilómetros por hora. Si le preguntara dónde va a estar dentro de 3 horas, usted con-

testará: "Voy a estar a 120 kilómetros de acá". Éste sería un ejemplo de que "más por más, *es* más". O sea, aunque uno no escriba los símbolos (+) adelante, es como si estuviera diciendo:

$$(+40) \cdot (+3) = (+120)$$

Uno representa los 40 kilómetros por hora, con (+40) y lo que "va a pasar" dentro de 3 horas, con (+3). Multiplica y tiene (+120), o sea, uno estará 120 kilómetros más adelante de donde está ahora.

En una figura se ve así:



Si ahora, en lugar de ir a 40 kilómetros por hora hacia adelante, empezara a manejar su auto *marcha atrás* a la misma velocidad (o sea, a 40 kilómetros por hora pero hacia atrás), podría preguntarle: ¿dónde va a estar dentro de 3 horas?

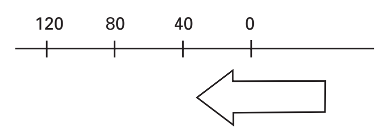
$$(-40) \cdot (+3) = (-120)$$

Otra vez, si uno quiere representar *en símbolos* que está yendo marcha atrás, lo que hace es escribir

$$(-40)$$

Por otro lado, como uno quiere saber, otra vez, "qué va a pasar dentro de 3 horas", usa el número (+3) para representarlo.

En una figura se ve así:



© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Es decir, si uno maneja el auto hacia atrás a 40 kilómetros por hora, dentro de 3 horas va a estar 120 kilómetros atrás del lugar del que partió. Esto corresponde –espero que se entienda con el ejemplo– a que menos por más *es* menos.

Ahora bien, lleguemos entonces a la última pregunta (que le pido que lea con cuidado y, sobre todo, que piense sola/o la respuesta).

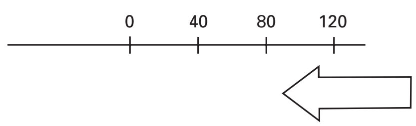
“Si usted viene como recién, manejando su auto a 40 kilómetros *marcha atrás* y yo, en lugar de preguntarle dónde va a estar *dentro de 3 horas,* le preguntara, *¿dónde estaba hace 3 horas?* Usted, ¿qué contestaría? (Por favor, más allá de responder, trate de convencerse de que me entendió la pregunta). Ahora sigo yo: la respuesta es que uno estaba ¡más adelante! Más aún: estaba 120 kilómetros *más adelante* de donde está ahora.

Si sigo usando los símbolos de más arriba, tengo que escribir:

$$(-40) \cdot (-3) = 120$$

Es decir, escribo (–40) porque estoy yendo marcha atrás, y escribo (–3) porque pregunto qué pasó hace 3 horas. Y como se advierte, uno, hace 3 horas estaba 120 kilómetros más adelante del punto donde está ahora. Y eso explica –en este caso– por qué menos por menos *es* más.

En el dibujo es:



Luego, en este caso, se ve que ¡menos por menos *es* más![12]

[12] Esta forma de representar gráficamente que *menos por menos es más* me la contó el doctor Baldomero Rubio Segovia, uno de mis grandes amigos de la vida y uno de los mejores matemáticos que dio España, ex decano de la Universidad Complutense de Madrid, y actual profesor en esa casa de estudios.

¿Es verdad que 0,99999... = 1?[13]

Está claro que

$$x = 0{,}9999\ldots \quad (*)$$

es un número real. Por otro lado, el número 1 también es un número real. ¿Qué relación hay entre ambos? Veamos.

Multiplicando (*) por 10 de ambos lados, se tiene:

$$\begin{array}{rrl} & 10x = & 9{,}99999\ldots \\ - & \underline{x} = & \underline{0{,}99999\ldots} \quad \text{y ahora, resto} \\ & 9x = & 9 \end{array}$$

Luego, dividiendo por 9 en ambos términos, se tiene:

$$x = 1 \qquad (**)$$

Comparando (*) con (**), se concluye que

$$0{,}99999\ldots = 1$$

Lo que esto sugiere es que el número 1 admite dos escrituras distintas, pero, obviamente, es un solo número.

La invitación al lector es que trate de descubrir que éste no es el único caso dentro del conjunto de números reales, sino que sucede con infinitos otros casos. ¿Puede dar algunos ejemplos?

Patrones y bellezas matemáticos

La matemática ofrece (también) muchas curiosidades, entre las que se encuentran ciertas simetrías y patrones de extraña belleza.

[13] Entendemos por 0,99999… al número racional que resulta de escribir un 0 y luego *infinitos* números 9 después de la coma.

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

¿Está todo "ordenado" y sólo lo descubrimos? ¿O lo inventamos nosotros?

Aquí van algunos ejemplos.[14]

$$1 \cdot 8 + 1 = 9$$
$$12 \cdot 8 + 2 = 98$$
$$123 \cdot 8 + 3 = 987$$
$$1.234 \cdot 8 + 4 = 9.876$$
$$12.345 \cdot 8 + 5 = 98.765$$
$$123.456 \cdot 8 + 6 = 987.654$$
$$1.234.567 \cdot 8 + 7 = 9.876.543$$
$$12.345.678 \cdot 8 + 8 = 98.765.432$$
$$123.456.789 \cdot 8 + 9 = 987.654.321$$

$$1 \cdot 9 + 2 = 11$$
$$12 \cdot 9 + 3 = 111$$
$$123 \cdot 9 + 4 = 1.111$$
$$1234 \cdot 9 + 5 = 11.111$$
$$12.345 \cdot 9 + 6 = 111.111$$
$$123.456 \cdot 9 + 7 = 1.111.111$$
$$1.234.567 \cdot 9 + 8 = 11.111.111$$
$$12.345.678 \cdot 9 + 9 = 111.111.111$$
$$123.456.789 \cdot 9 +10 = 1.111.111.111$$

$$9 \cdot 9 + 7 = 88$$
$$98 \cdot 9 + 6 = 888$$
$$987 \cdot 9 + 5 = 8.888$$
$$9.876 \cdot 9 + 4 = 88.888$$
$$98.765 \cdot 9 + 3 = 888.888$$
$$987.654 \cdot 9 + 2 = 8.888.888$$
$$9.876.543 \cdot 9 + 1 = 88.888.888$$
$$98.765.432 \cdot 9 + 0 = 888.888.888$$

[14] Todos los ejemplos fueron enviados por Cristian Czubara, en el afán que ponen todos por compartir lo que saben y les gusta.

$$1 \cdot 1 = 1$$
$$11 \cdot 11 = 121$$
$$111 \cdot 111 = 12.321$$
$$1.111 \cdot 1.111 = 1.234.321$$
$$11.111 \cdot 11.111 = 123.454.321$$
$$111.111 \cdot 111.111 = 12.345.654.321$$
$$1.111.111 \cdot 1.111.111 = 1.234.567.654.321$$
$$11.111.111 \cdot 11.111.111 = 123.456.787.654.321$$
$$111.111.111 \cdot 111.111.111 = 12.345.678.987.654.321$$

Velocidad del crecimiento del pelo

Piense en la última vez que se cortó el pelo. ¿Hace cuánto fue? ¿Cuánto más largo tiene el pelo ahora? En mi caso personal, me lo corté hace un mes y ahora (después de haberlo medido, aunque usted no lo crea) el pelo está *1,5 centímetros* más largo. Con esta información, usted puede estimar la velocidad de crecimiento diario (aproximada, claro está). ¿Quiere hacer la cuenta sola/solo?

En todo caso, acá va la solución: como en treinta días creció 1,5 centímetros, o sea 15 milímetros, cada día, en promedio, el pelo creció medio milímetro. Es decir, el pelo de una persona normal crece –en forma aproximada, claro– 1 centímetro cada tres semanas.

Combinatoria y reproductor de CD

Supongamos que tiene un reproductor de CD que viene con un botón que permite "programar" el orden en el que va a escuchar las canciones. Es decir, en lugar de reproducirlas tal como vienen grabadas, las reproduce en el orden que usted elige, hasta agotarlas todas. Por ejemplo, supongamos que inserta un CD con 10 canciones. Usted podría seleccionar:

3-7-10-1-9-5-8-6-4-2 o 10-9-8-7-6-5-4-3-2-1,

por poner sólo dos casos.

Ahora, planteo un problema: si a usted le gustara mucho su CD y decidiera programar "un ordenamiento" diferente cada día, hasta agotar todos los posibles "órdenes", ¿cuántos días tardaría en recorrerlos todos? Es decir, ¿cuántos días tendrán que pasar para que no le quede más remedio que repetir alguno anterior?

Usted puede, naturalmente, ir más abajo y leer la respuesta. Pero se privará del placer de pensar el problema (y por otro lado, ¿dónde está la gracia?). El planteo es muy sencillo, y muy "posible" como situación de la vida real. El resultado es notable y no necesariamente "esperable".

Antes de pasar a la solución, lo invito a que pensemos algo juntos. Si tuviera los números 1, 2 y 3, ¿de cuántas formas los puede ordenar? Piense una manera de "contar" sin necesidad de escribir *todas* las formas. La lista completa sería:

123, 132, 213, 231, 312, 321 (*)

O sea que uno descubre que son *seis formas*. Pero esto es muy fácil, porque son pocos números. Por ejemplo, si tuviera diez números o veinte (por poner un ejemplo) se haría mucho más tedioso escribir todos los casos y lo más probable es que uno termine equivocándose porque son muchos casos a considerar. La idea es buscar alguna forma que permita *contar* sin tener que hacer una *lista*. Por ejemplo, aprovechando los datos que acabo de escribir en (*) pensemos juntos cómo hacer si hubiera *cuatro* números en lugar de tres. Podríamos poner al número 4 delante de los seis elementos de la lista (*). Tendríamos entonces esta nueva lista:

4123, 4132, 4213, 4231, 4312 y 4321

Lo único que hice fue *agregar* el número 4 al principio de cada integrante de la lista (*). Vuelvo a tener 6 formas. Esto no agota todas las posibilidades. Lo que tenemos que hacer ahora es intercalar el número 4 en el *segundo lugar* de cada integrante de la lista (*). En ese caso, queda:

1423, 1432, 2413, 2431, 3412 y 3421

O sea, otras *seis formas.*

Ya se habrá dado cuenta de lo que hay que seguir haciendo (si no, piénselo solo/a hasta advertir cómo seguir).

Ahora, intercalemos el número 4 en la tercera posición de la lista (*). Se tiene entonces lo siguiente:

1243, 1342, 2143, 2341, 3142 y 3241

Y por último, ubicamos el número 4 *al final* de todos los miembros de la lista (*):

1234, 1324, 2134, 2314, 3124 y 3214

Y se terminó. Es decir, hemos *agotado* todas las posibilidades. Al número 4 lo hemos ubicado en todos los lugares y, como vimos, se trató de *reproducir* la lista original (*) cuatro veces. Y como había en total *seis elementos en la lista* (*), al multiplicarlo por *4,* tenemos 24 posibilidades.

4123, 4132, 4213, 4231, 4312 y 4321
1423, 1432, 2413, 2431, 3412 y 3421 (**)
1243, 1342, 2143, 2341, 3142 y 3241
1234, 1324, 2134, 2314, 3124 y 3214

Si ahora apareciera un *quinto número,* lo que habría que hacer es intercalar el número 5 en todas las posiciones de la lista (**), por lo que obtendríamos 5 veces la lista de 24 que ya teníamos. O sea, 24 x 5 = 120 maneras.

Si consideramos que

con 3 números hay $3 \cdot 2 = 6$ formas,
con 4 números, $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ formas,
con 5 números, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ formas, etc…

Uno puede inferir que con 10 números habrá:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 3.628.800 \text{ formas}$$

Visto de esta manera, ¿le ayuda a resolver el problema original? Es decir, ¿el problema del "reproductor de CD"?

Una curiosidad más sobre los infinitos (y el cuidado que hay que tener con ellos)

Supongamos que uno tiene una suma infinita de números, expresada de la siguiente forma:

$$A = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots \qquad (*)$$

Es decir: se *suma* 1, y luego se *resta* 1, sin detenerse nunca. Por supuesto, si usted se está cuestionando en este momento *qué quiere decir el número A,* créame que la/lo entiendo. Yo tampoco *sé* lo que quiere decir. Pero, en todo caso, *si existiera,* fíjese qué cosas curiosas que pasarían.

a) Agrupemos los números de la derecha en (*) de la siguiente forma:

$$A = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$$

En este caso, el *número A* debería *ser 0,* ya que todos los paréntesis *suman* 0. Luego se tendría:

$$A = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Y por lo tanto A = 0 sería la conclusión.

b) Por otro lado, agrupemos los números de la derecha en (*) de otra forma (y sígame en el razonamiento):

$$A = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots \qquad (**)$$

Lo que hice fue agrupar los términos de manera diferente y usé:

$$-1 + 1 = + (-1 + 1)$$

Ahora, cada paréntesis en (**) suma *0* otra vez, y por lo tanto, se tiene el siguiente resultado:

$$A = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \ldots = 1$$

Luego, A = 1

Por último, vuelvo a la ecuación (*) y agrupo los términos de *otra* forma.

$$A = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots) \qquad (***)$$

(Es decir, agrupo todos los términos a partir del segundo, y el signo menos que figura adelante del paréntesis garantiza que todos los términos que quedan adentro aparezcan con el mismo signo que tenían al comienzo.)

Luego, si uno mira lo que queda dentro del paréntesis en (***), advierte que queda exactamente A otra vez. Es decir, en (***) se tiene:

$$A = 1 - A$$

O sea, pasando A del segundo miembro al primero, se tiene:

$$2A = 1$$

Luego, se concluye que

$$A = (1/2)$$

¿Qué aprendemos con todo esto? La primera consecuencia es que el número A no existe o, lo que es lo mismo, la suma (*) que uno supone que da un número A, no puede existir, porque el número A tendría que ser igual a 0, 1 y/o 1/2 (un medio).

La segunda conclusión es que, al operar con sumas infinitas, se debe tener mucho cuidado porque las propiedades asociativas y conmutativas que valen para las sumas finitas, no necesariamente valen en el caso infinito.

En realidad, todo esto tiene que ver con lo que se llama estudio de la convergencia de las series numéricas y sus propiedades, para lo que sugiero consultar cualquier libro de análisis matemático.

Don Quijote de la Mancha[15]

Don Quijote de la Mancha fue escrito por Miguel de Cervantes Saavedra en 1605. Es una de las obras más espectaculares de la literatura universal. Se lo encuentra en casi todas las librerías del mundo en los idiomas más insólitos, sobre todo si uno tiene en cuenta que fue escrito en castellano hace más de cuatrocientos años. Hace muy poco, fue descubierto en un lugar inimaginable. Acompáñeme y verá que no sólo encontraron a Don Quijote, sino algunos otros libros escondidos en un sitio totalmente impredecible.

Quiero hacer una pequeña *digresión* e inmediatamente vuelvo al tema del Don Quijote. Lo único que se necesita es conseguir (imaginariamente) una vara de un metro de largo (puede ser un metro como el que usan para medir los ingenieros o carpinteros, o uno como el de las costureras). En un punto (en el extremo izquierdo) está marcado

[15] El crédito total de la idea de este artículo le corresponde al doctor Pablo Coll y a Pablo Milrud, matemáticos y amigos. Ellos fueron quienes me acercaron un texto con buena parte de lo que figura más arriba y me sugirieron el tema del Quijote como ejemplo para usar. Más aún: sin ellos, esta nota no existiría.

el número *0,* y en otro punto, en el extremo derecho, está marcado el número *1.* Está claro que el punto medio, donde figura el número 50, representa una distancia desde la punta izquierda de 50 centímetros, o lo que es lo mismo, 0,50 metro (1/2 metro). De la misma forma, si uno midiera 1/3 = 0,3333… centímetros desde la izquierda, encontraría otro punto del metro en cuestión que corresponderá a una tercera parte de la vara que estamos usando. Como se advierte, lo que estoy tratando de hacer es describir lo obvio: a cada punto del metro o varilla que hubiéramos elegido, le corresponde un número. Ese número, lo que marca, es la distancia al 0. De esta forma, estamos tranquilos en cuanto a que hemos logrado hacer una *doble asignación,* entre los números que son mayores que 0 y menores que 1, y los puntos de la vara.

Ahora es cuando se pone interesante. Vamos a ponerle un número a cada letra del alfabeto, y lo vamos a hacer en orden. Es decir:

A la letra *a* le corresponde el número 01
A la letra *b* le corresponde el número 02
A la letra *c* le corresponde el número 03 …
…A la letra *r* le corresponde el número 19
A la letra *s* le corresponde el número 20,

y para terminar, a la letra *z* le corresponde el número 27. Al final, agregamos un número para que represente un lugar en blanco, o un espacio. A éste le asignamos el número 28.

La *tablita* completa es la siguiente:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Veamos algún ejemplo: si quisiera escribir la palabra *libro,* usando las asignaciones que acabo de establecer, se tiene el siguiente número:

$$0{,}1209021916$$

Esto resulta de que

L	corresponde	12
I	corresponde	09
B	corresponde	02
R	corresponde	19
O	corresponde	16

Por eso, al poner todos los números juntos (con la precaución de ponerlos después de la coma, ya que todos los números tienen que estar entre 0 y 1) se tiene:

0,1209021916

Al revés, el número 0, 011907051421091401 corresponde a la palabra *Argentina.*

Y el número

0,10222021090309012820160309 0112

representa a las palabras "justicia social" (el número 28 que aparece en el recorrido, es el que indica el espacio entre las dos palabras).

Ahora vuelvo a Don Quijote, ya que está todo preparado para dar *el salto.* Si una persona trae un ejemplar de Don Quijote de la Mancha, uno puede entonces hacer la conversión de cada una de las palabras usando la tablita que figura más arriba. O sea, se le asigna a cada letra que aparece en el libro el número que le corresponde (lo mismo que a los espacios)… y así sigue hasta llegar al final. Obviamente, queda un número con una *enorme cantidad de dígitos.*

Como Cervantes escribió… "En un lugar de la Mancha…", el número empieza con:

0,0514282214281222070119280405281201281301140308 01…

y sigue…

Es más, sigue *todo el libro.* Sin embargo, lo importante a los efectos de lo que estoy haciendo es que este número *termina* en algún lugar. Y más aún: ese número, de acuerdo con lo que hicimos más arriba, corresponde a algún punto de la vara de un metro que teníamos. Y es un punto *único* en la vara.

¿Qué moraleja podemos sacar? *Ese* punto, y ningún otro de la vara, *es* el Quijote.

Por supuesto, no sólo Don Quijote es un punto de la varilla. En realidad, podemos usar este procedimiento con cualquier libro que se hubiera escrito hasta acá –que son muchísimos, pero no infinitos–, y lo que podemos afirmar es que cada uno de ellos tiene asociado algún punto del segmento o de la vara. Es más: allí están también ¡todos los libros que se vayan a escribir en la historia!

Todos estos *puntos o números* de la vara que corresponden a libros escritos (o por escribirse) son números *racionales,* o sea, son cocientes de dos números enteros.[16]

Si todos los libros escritos (o por escribirse) representan números racionales (y ni siquiera todos los racionales, ni mucho menos)… si los excluyéramos de la vara, si los sacáramos a todos, ¡no se notarían los huecos que generarían, ya que los otros, los irracionales, son muchísimos más!

[16] Nota 1: en realidad, como todos los libros que se escribieron y/o por escribirse "terminan" en alguna parte, significa que, a partir de un momento, el número racional que los determina tendrá período *0* en alguna parte, y por lo tanto, en el denominador sólo habrá potencias de 2 y de 5, ya que, por ejemplo, nunca podrá ser como 1/3 o 1/9, que si bien son racionales, terminan en 0,33333333… o bien 0,11111…

Nota 2: recuerdo aquí que los números racionales son aquellos cuyo desarrollo decimal o bien termina en alguna parte (o sea, tienen todos los dígitos iguales a 0 a partir de cierto lugar), o bien son periódicos. Justamente, esto último es equivalente a que sean cocientes de dos enteros.

Nota 3: esta idea sobre todos los posibles libros con todos los posibles símbolos está en la obra de Jorge Luis Borges, *La biblioteca de Babel* (http://es.wikipedia.org/wiki/La_biblioteca_de_Babel).

Más sobre el infinito. La paradoja de Tristram Shandy

John Barrow presenta una paradoja que le adjudica al escritor Tristram Shandy. La historia es interesante y plantea una nueva manera de mirar "al infinito".

Tristram Shandy decidió escribir su "diario de vida". Más aún: Shandy era tan detallista que le llevaba un año relatar cada día que había vivido. Por ejemplo, dedicó todo el año 1760 a escribir sólo lo que le había pasado el 1º de enero de ese año. Es decir, sólo el 31 de diciembre terminó la historia del 1º de enero. Contar lo que le sucedió el 2 de enero de 1760, le llevó todo el año 1761, y recién terminó de escribir lo que le pasó ese día el 31 de diciembre de 1761. A ese paso, como se advierte, Shandy estaba cada vez más lejos (en apariencia) de escribir su vida completa.

Por supuesto, si Shandy hubiera vivido como cualquiera de los mortales un número finito de años, sólo le hubiera alcanzado el tiempo para relatar un segmento muy reducido de su vida. Sin embargo (y acá lo invito a pensar), si en un salto imaginativo uno pudiera imaginar a Shandy viviendo infinitos días, ¿qué pasaría? Si así fuera, si Shandy viviera eternamente, no habría día de su vida que no hubiera quedado descripto en su diario.

En todo caso, una paradoja más sobre el infinito.

Suma de los primeros *n* números naturales

Se tienen distribuidas *cruces* en distintos renglones, con la característica de que a medida que uno va recorriendo las filas, el número de cruces aumenta en uno. Es decir, en la primera fila hay una cruz. En la segunda, hay dos. En la tercera, tres… y así sucesivamente.


```
X
X X
X X X
X X X X
X X X X X
```

Figura 1

¿Cómo hacer si uno quiere saber *el número total de cruces*? Por supuesto que la invitación está hecha para que piense solo/a, de manera tal que, si prefiere *no leer lo que sigue,* mucho mejor. De todas formas, voy a proponerle una solución de las muchísimas que es posible encontrar. Pero ésta me gusta porque incluye un argumento *gráfico.*

La figura que aparece con las cruces es un *triángulo.* Uno podría dibujar otro triángulo igual, esta vez con *circulitos,* y quedaría así:

```
O
OO
OOO
OOOO
OOOOO
```

Figura 2

Ahora, damos vuelta ese triángulo

```
OOOOO
 OOOO
  OOO
   OO
    O
```

Figura 3

Si colocamos juntos los triángulos que aparecen en las figuras 1 y 3, se tiene el siguiente dibujo:

```
X OOOOO
X X OOOO
X X X OOO
X X X X OO
X X X X X O
```

Figura 4

Como el objetivo era calcular el número de cruces que había en el primer triángulo, si uno mira el rectángulo que quedó formado en la figura 4 advierte que las *cruces* son exactamente la mitad (contando las cruces y los círculos). ¿Cómo calcular cuántas cruces y círculos hay en ese rectángulo? Multiplicando el número que hay en cada fila por el número en cada columna. Es decir, 6 (que son los que hay en la base) por 5 (los que hay en altura). Resultado: 30. Como las cruces son la mitad, entonces en total *hay 15 cruces.*

Con esta idea, si tenemos ahora un triángulo con *más cruces,* digamos el que aparece en la figura 5:

X
X X
X X X
X X X X
X X X X X
X X X X X X
X X X X X X X
X X X X X X X X
X X X X X X X X X
X X X X X X X X X X

Figura 5

Si uno quiere calcular el número de cruces, lo que hace es *dibujar un triángulo igual* pero con círculos en lugar de cruces. Luego, lo da vuelta y lo coloca junto al que aparece en la figura 5. Y se tiene el siguiente *rectángulo* (figura 6).

X O O O O O O O O O O
X X O O O O O O O O O
X X X O O O O O O O O
X X X X O O O O O O O
X X X X X O O O O O O
X X X X X X O O O O O
X X X X X X X O O O O
X X X X X X X X O O O
X X X X X X X X X O O
X X X X X X X X X X O

Figura 6

Luego, contando otra vez, en la *base* hay 11 elementos, entre cruces y círculos, y en la altura, 10. Conclusión: en total en el rectángulo hay

$$10 \times 11 = 110$$

elementos, y como las cruces son la mitad, se sigue que hay 55 cruces.

Una vez vistos estos ejemplos, queda claro lo que se puede hacer en general. Si uno tiene *n* filas con cruces y quiere saber cuántas cruces hay en total, se fabrica un triángulo igual, pero con círculos, y lo invierte. Después, lo pone al lado del otro, y queda formado un rectángulo. Todo lo que hay que hacer es contar cuántos elementos (entre cruces y círculos) hay en la *base* del rectángulo, y luego, contar cuántos elementos hay en la *altura* del rectángulo. Multiplicar esos números para saber cuál es el número total de elementos en el rectángulo y dividirlo por 2, para saber cuántas cruces hay. ¿Se entendió?

Hagamos la cuenta para verificar.

Se tiene un triángulo armado con *cruces* con *n* filas, de manera tal que en la primera fila hay 1 cruz, en la segunda hay 2, en la tercera hay 3, y así siguiendo. En la enésima fila hay *n* cruces. Lo que tratamos de hacer es la siguiente suma:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n - 2) + (n - 1) + n$$

Es decir, sumar las cruces que hay en cada fila.

Formamos un triángulo *igual* pero armado con *círculos*. Y lo ponemos al lado del otro. Ahora, los invito a contar cuántos elementos tiene el rectángulo que queda formado.

En la base hay (n + 1) elementos (los *n* que aporta el triángulo de las cruces y un círculo). En la columna hay *n* elementos, porque el número de filas que había originalmente, y que no varió, es de *n*. O sea, empezamos con *n* filas y ese número no se alteró. Luego, queda formado un rectángulo de (n + 1) elementos en la base, y *n* en la columna. El número total de elementos, entonces, es:

$$(n + 1) \cdot n$$

Como el número de cruces era exactamente la mitad de esta cantidad, el *resultado final* es:

$$[(n + 1) \cdot n] / 2$$

Este argumento muestra, entonces, que si uno quiere calcular *la suma de los primeros n números naturales,* el resultado que obtiene es:

$$[(n + 1) \cdot n] / 2$$

En el primer libro de *Matemática… ¿Estás ahí?* conté la historia de Carl Friedrick Gauss, cuando la maestra les propuso a los alumnos que sumaran los primeros cien números naturales:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

Lo que Gauss hizo fue sumar el primero y el último (1 + 100), y advirtió que le daba 101. Luego, sumó el segundo y el penúltimo (2 + 99) y descubrió que otra vez le daba 101. Después, sumó el tercero y el antepenúltimo (3 + 98) y, una vez más, le daba 101. Siguiendo de esa forma, y eligiendo números de ambas puntas, las sumas le daban siempre 101 y, por lo tanto, el cálculo era fácil: bastaba con multiplicar 50 por 101 (ya que hay 50 posibles parejas y 101 es el resultado de la suma de cada una de ellas), con lo cual el resultado era 5.050.

Luego de haber visto lo que hicimos más arriba, podemos entender de otra forma lo que hizo Gauss. Es decir, podemos tratar de darle la misma interpretación gráfica que pusimos al principio. Sería como tener un triángulo de 100 filas. La primera tiene 1 cruz, la segunda 2, la tercera 3… y así, hasta que la centésima tiene 100 cruces.

X
X X
X X X
X X X X
. . . .
X X X X X X X X X . . .   (esta última fila tiene 100 cruces)

Al hacer un triángulo *igual* pero con círculos, darlo vuelta y agregarlo al de las cruces para formar un rectángulo (como hicimos más arriba), descubrimos que el rectángulo tiene, en la base, 101 elementos (las 100 cruces y un círculo). Y como hay 100 filas, la cuenta que hay que hacer para calcular el número de elementos del rectángulo es multiplicar

$$101 \cdot 100$$

¿Pero cómo? ¿No era que Gauss hizo –y estaba bien– 101 x 50?

Claro, pero no olvidemos que lo que calcula 101 x 100 es el número de elementos del rectángulo. Para poder calcular el número de cruces, hay que dividir por 2, como hicimos más arriba. Y ahora sí, el resultado es el correcto:

$$(101 \cdot 100) / 2 = 101 \cdot 50 = 5.050$$

Suma de números impares

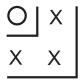
Supongamos que uno empieza a calcular la *suma* de números impares. En los primeros pasos se tropieza con estos datos.

1	=	1
1 + 3	=	4
1 + 3 + 5	=	9
1 + 3 + 5 + 7	=	16
1 + 3 + 5 + 7 + 9	=	25
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11	=	36

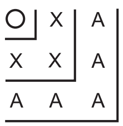
¿Alcanza a descubrir un patrón? Mire los resultados de la segunda columna y verá que se produce algo curioso: los números que aparecen son los cuadrados de los números naturales. Es decir, el patrón permite conjeturar que la suma de los primeros números impares se reduce a calcular el cuadrado de un número.

En este caso, podemos pensarlo haciendo algunos dibujos:

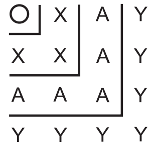
1



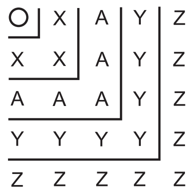
1 + 3



1 + 3 + 5



1 + 3 + 5 + 7



1 + 3 + 5 + 7 + 9

En general, entonces, la suma de los primeros *n números impares* es igual a n^2. Es decir:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

La Ley de Benford[17]

Lo que sigue es un ejercicio que sirve para poner a prueba nuestras supuestas "convicciones" y para "descalificar" nuestra intuición. Le propongo que se tome el trabajo de hacer una serie de verificaciones,

[17] La inspiración para publicar este artículo, y muchísimos de los datos que aquí figuran, están extraídos de sugerencias que me hicieron Pablo Coll y Pablo Milrud, ambos amigos y matemáticos. Además, hay un extraordinario artículo sobre la Ley de Benford que publicó Malcolm W. Browne en 1998, y que ha sido citado en forma incesante por todos aquellos que divulgan el contenido de esta ley.

algo realmente muy fácil, pero que requiere de un poco de tiempo. Por eso, le sugiero que lo tome con calma y, en todo caso, hágalo cuando tenga un rato libre. Se va a sorprender con los resultados…

Acá va.

a) Elija un libro que tenga cerca. Cualquiera. Ábralo en cualquier página, y anote el número (de la página). Ahora, tome un libro diferente y elija una página al azar también. Anote el número de la página otra vez. Repita este procedimiento con muchos libros hasta que haya anotado el número de 100 páginas o más. (Le dije que tenía que dedicarle un rato, pero no me diga que es difícil. Seguro que es tedioso, sí, pero no es complicado de hacer.)
b) Entre en un negocio cualquiera. Anote los precios de 100 productos o más. No importa qué tipo de negocio. Si lo prefiere (y tiene acceso), vaya a cualquier página de Internet y anote los precios de diferentes productos que ofrezca. Pero tienen que ser 100 o más.
c) Obtenga ahora las direcciones de las personas que trabajan con usted, o compañeros de oficina o de clase. No importa. Además, consiga que le escriban las direcciones de gente que ellos conocen hasta que complete, otra vez, 100 o más de esos números. No hace falta que pongan los nombres, sólo los números de las direcciones.
d) Busque en Internet, o en cualquier enciclopedia, la población de 100 o más ciudades y/o pueblos del país en donde vive usted. Anótelos.

Una vez que tenga esta lista de por lo menos 400 números (si es que hizo la tarea para el hogar que figura más arriba), sepárelos de la siguiente forma:

Anote en una columna todos los que empiezan con el dígito 1. Luego, en otra columna, los que empiezan con el 2. Después, otra columna más, con los que empiezan con el 3. Y así, hasta tener 9 columnas. Todas empiezan con dígitos distintos, del 1 al 9.

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Antes de seguir, tengo algunas preguntas:

¿Usted cree que las columnas tendrán todas la misma cantidad de números? Es decir, ¿tendrán todas la misma longitud? ¿O le parece que habrá alguna que será más larga?

Antes de contestar, deténgase un momento y piense lo que usted cree que debería pasar. ¿No tiene la tentación de decir que *"da lo mismo"*? Es decir, uno intuye que, como eligió todos esos números al azar, el primer dígito puede ser cualquiera, debería dar lo mismo. Las columnas deberían tener todas longitudes similares. Sin embargo, *¡no es así!*

Lo que sigue es la presentación en sociedad de una de las leyes más "antiintuitivas" que conozco. Se llama Ley de Benford. Los resultados (aproximados) que uno obtiene si hace los experimentos planteados más arriba, son los siguientes:

Dígito	% de que sea el primer dígito
1	30,1
2	17,6
3	12,5
4	9,7
5	7,9
6	6,7
7	5,8
8	5,1
9	4,6

¿No es increíble que haya más de un 30% de posibilidades de que el dígito con el que empiece sea un número 1? ¿No parece mucho más razonable que para todos los dígitos sea 11,11% (que se obtiene de hacer 1/9)? No sólo eso. Luego, en escala descendente aparece el resto de los dígitos, tanto que al número 9 le corresponde menos de un 5% en el papel de líder.

Un alerta: esta ley, sin embargo, no se aplica a fenómenos que son verdaderamente aleatorios. Es decir, no se puede usar en la Lotería, donde la probabilidad de que salga cualquier número es la misma. Por

ejemplo, si usted pone nueve bolillas en un bolillero, numeradas del *1* al *9,* saca una, anota, la pone nuevamente adentro, hace girar el bolillero, saca otra, anota otra vez, y sigue con el proceso, encontrará que los números aparecen igualmente distribuidos; la probabilidad de que aparezca cada uno es de 1/9. Lo que hace falta es que no sean números al azar. Es decir, la Ley de Benford se aplica para conjuntos grandes de números que no sean aleatorios. Es decir que se usa esta ley cuando uno trabaja con conjuntos de muchos números, que obedezcan a la recolección de datos que provengan de la naturaleza (incluidos los factores sociales). Por ejemplo, si uno hiciera la lista de los montos de todas las facturas de luz que se pagan en la Argentina, entonces sí, ahí vale la ley. Si uno hiciera un relevamiento de la cantidad de kilos de carne que entraron por día en el mercado de Liniers en los últimos diez *años,* también. Lo mismo que si uno tuviera los datos de las longitudes de todos los ríos de un determinado país.

Si bien no lo escribí antes, ignoro el *0* como dígito inicial, porque uno –en general– no escribe un 0 a la izquierda. Cualquier número significativo empieza con algún dígito que no sea 0.

El que descubrió esto fue el doctor Frank Benford,[18] un físico que trabajaba en la compañía General Electric. En 1938, cuando no había calculadoras ni computadoras, la mayoría de las personas que hacían cálculos usaba tablas de logaritmos. Benford observó que las páginas que contenían logaritmos que empezaban con "1" como dígito, ¡estaban mucho más usadas, sucias y ajadas que las otras! Así, empezó a sospechar que había algo particular detrás de esa observación, y lo fue a confrontar. De hecho, se dedicó a hacer el análisis de 20.229 conjuntos de números que involucraban categorías bien *desconectadas* entre sí:

[18] La mayoría de los investigadores sobre la Ley, que quedó reconocida como Ley de Benford, asegura que quien primero la observó fue el astrónomo y matemático Simon Newcomb. Por alguna extraña razón sus trabajos no tuvieron trascendencia y fueron desechados. Benford los retomó y les dio vida nuevamente. De todas formas, lo que es curioso es que ambos encontraron el mismo resultado haciendo observaciones sobre el uso que se les daba a *las tablas de logaritmos.*

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

a) volúmenes de agua de todos los ríos de una región;
b) estadísticas de béisbol de jugadores norteamericanos;
c) números que aparecían en todos los artículos de un ejemplar dado de la revista *Reader's Digest*;
d) distancias entre todas las ciudades de un país;
e) direcciones de las primeras 342 personas que aparecían en la guía de *American Men of Science* (Hombres de Ciencia Norteamericanos);
f) número de pobladores de cada una de las ciudades de un país;
g) dólares a pagar por electricidad de los usuarios de una ciudad en particular.

Al comprobar que se *repetía* el patrón que había descubierto con las *tablas de logaritmos,* Benford se dio cuenta de que tenía en sus manos algo muy importante y muy antiintuitivo. Y se embarcó en hacer una demostración de lo que conjeturaba.[19] Lo increíble de esta ley, más allá de lo antiintuitiva, es que se usa –por ejemplo– para detectar a los *evasores de impuestos.* Un contador y matemático, el doctor Mark J. Nigrini, quien actualmente trabaja en Dallas, hizo la primera aplicación *práctica* de la Ley de Benford. La idea que usó es que, si alguien está tratando de falsificar datos, inexorablemente tendrá que inventar algunos números. Cuando lo haga, la tendencia es –por parte de la gente– usar muchos números que empiecen con 5, 6 o 7, y no tantos que empiecen con 1. Esto será suficiente para violar lo que predice la Ley de Benford y, por lo tanto, invita a que el gobierno haga una auditoría de esos números. La ley es claramente no infalible, pero sirve para detectar sospechosos. Lo curioso es que quienes usaron los primeros experimentos de Nigrini, aprovecharon para poner a prueba la declaración de impuestos de Bill Clinton. Nigrini concluyó que, si bien había más redondeos que los esperables, no parecía esconder ningún fraude al fisco.

[19] Benford demostró que la *probabilidad* de que apareciera el *dígito n* como primer número se podía calcular con la fórmula:

$$P = (\mathrm{Log}\,(n+1) - \mathrm{Log}\,(n)) = \mathrm{Log}\,(1 + 1/n)$$

Un último dato, no menor. La ley se aplica aun modificando las unidades de medida. Es decir, no importa que uno use kilómetros o millas, litros o galones, pesos, euros, dólares o libras esterlinas: la ley vale igual.

Una manera interesante de convencerse de esto es la siguiente: supongamos que la distribución de los dígitos iniciales fuera uniforme, en el sentido de que *todos los dígitos* aparecerán en la misma cantidad.

Ahora, imaginemos que uno tiene una lista con los importes de las cuentas de luz que pagaron todos los habitantes de una ciudad durante *diez años.* Supongamos que la moneda que usaban es la libra esterlina (sólo para fijar las ideas). Para hacer fáciles las cuentas, digamos que cada *libra* se cotiza a 2 *dólares.* Entonces, para convertir a dólares la lista que teníamos recién, habría que multiplicarla por 2. ¿Qué pasaría entonces? Que todos los números que empezaban con 1, al multiplicarlos por 2, tendrán ahora como primer dígito, o bien un 2 o bien un 3. Pero para todos aquellos que empezaban con un 5, 6, 7, 8 y 9, al multiplicarlos por 2, empezarán *todos* con un 1.

¿Qué dice esto? Sugiere que, si uno no cree en la ley, y supusiera que la distribución de los dígitos iniciales es uniforme, entonces, al convertirlo a cualquier moneda, tendría que conservarse ese patrón. Sin embargo, como acabamos de ver, el patrón uniforme no se mantiene. El patrón que se mantiene es uno con mayor abundancia del dígito inicial 1, seguido en abundancia por el dígito inicial 2, etc., de acuerdo con la Ley de Benford.

Es difícil aceptar esta ley sin rebelarse. Es muy *antiintuitiva.* Sin embargo, sígame con otra explicación porque permite intuir por qué el resultado puede ser cierto. Supongamos que uno empieza analizando la Bolsa de Buenos Aires, por poner un ejemplo. No se asuste, no hay nada que saber sobre acciones ni bonos externos ni fondos de inversión. Es sólo una manera de mirar las cosas desde otro ángulo. Para fijar las ideas, supongamos que hubiera un crecimiento anual de la economía del 20%, y que el promedio de todo lo que se cotiza en la Bolsa fuera 1.000 (o sea, si promediara *las cotizaciones* de *todas* las acciones, obtendría el número 1.000).

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Como se ve, el número 1 es el primer dígito. Para cambiar este primer dígito y pasar al siguiente, al 2, y llegar a 2.000, tendrán que pasar 4 años (componiendo el interés anualmente). Luego, durante 4 años se mantiene el 1 como primer dígito. En cambio, si uno empezara con 5.000, o sea con el 5 como primer dígito, en *sólo* un año (como el incremento anual es del 20%) pasaría de 5.000 a 6.000, y con ello cambia del 5 al 6. Es decir: el *1* se mantuvo cuatro años mientras que el *5*, sólo uno.

Peor aún: si empezara con un *9* como primer dígito, o sea con un promedio de 9.000 en la misma Bolsa, en un poco más de medio año cambiará el primer dígito otra vez, porque llegaría a los 10.000.

Con esto, lo que se ve es que el *1* permanece mucho más tiempo como primer dígito que cualquier otro, y a medida que se acerca a 9, cada vez se sostiene menos tiempo. El 1 es el claro favorito.

Creíble o no, la Ley de Benford tiene múltiples aplicaciones prácticas y sirve para exhibir, también, que nuestra intuición trastabilla cuando es puesta a prueba en situaciones no convencionales. Por eso, una vez más, la mejor manera de tomar decisiones en la vida es apoyarse en la ciencia.

Tirar 200 veces una moneda

De acuerdo con lo que escribió Malcolm W. Browne en un artículo que apareció en el *New York Times*, el doctor Theodore P. Hill pidió a sus estudiantes de Matemática del Instituto de Tecnología de Georgia que hicieran el siguiente trabajo en sus casas:

"Tomen una moneda, arrójenla al aire 200 *veces* y anoten los resultados que obtuvieron. Si no tienen ganas de hacerlo, pretendan que lo hicieron, y anoten lo que les parece que podría darles".

Al día siguiente, cuando los alumnos trajeron los resultados, con asombro observaron que el profesor podía detectar, casi sin errar, quiénes habían efectivamente tirado 200 veces la moneda al aire y quiénes no.

En una entrevista, Hill dijo que lo que sucedía era que la gente no tenía idea de lo que realmente significa *el azar*. Por lo tanto,

cuando tiene que inventar datos, lo hace de acuerdo con su creencia y, como en general suele errar, es fácil descubrir quién se tomó el trabajo de hacer el experimento, y quién, en su defecto, eligió imaginarlo.

¿Usted diría que es alta o baja la probabilidad de que aparezcan seis o más caras consecutivas, o bien seis (o más) cecas consecutivas? Imagino que su respuesta será: "Bastante baja". Es posible que ni usted ni yo sepamos cómo explicar esto, pero la intuición que tenemos nos hace sospechar que es poco probable que sucedan seis o más caras o cecas consecutivas en 200 tiradas. ¿Está de acuerdo conmigo en esto? ¿O cree que la probabilidad es alta?

Lo notable es que la probabilidad de que esto suceda es *muy* alta. Eso fue lo que comprobó Hill y lo escribió en un artículo que apareció en la revista *American Scientist* hace casi diez años. En particular, eso también es consecuencia de la Ley de Benford, y es tan antiintuitiva que, como hemos dicho, permite detectar a aquellos que quieren fraguar datos impositivos, por ejemplo, u otro tipo de fraudes por el estilo.

Fórmulas para obtener números primos

A esta altura, doy por sobreentendido que usted sabe lo que es un número primo. Ya sabe además que son infinitos.

La pregunta, entonces, es: ¿cómo hacer para encontrarlos todos? Es decir, ¿habrá alguna fórmula que *provea* todos los primos? Por ejemplo, si uno quiere conseguir *todos* los números pares, sabe que la fórmula es:

$$2 \cdot n \qquad (1)$$

O sea, uno toma un número n cualquiera, lo multiplica por 2 y obtiene un número par. Y cualquier número par se obtiene de esa forma también, con lo cual *siempre* se puede escribir de la forma que aparece en (1).

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Si uno quiere encontrar una fórmula que permita calcular *todos* los números *impares,* hace lo siguiente:

$$(2 \cdot n) + 1 \qquad (2)$$

Usted elija cualquier número *n,* reemplácelo en la fórmula (2), y obtendrá un número impar. Y como antes con los pares, *todos* los números impares se obtienen de esa forma.

Por último, si uno quiere calcular todos los cuadrados, o sea, todos los números que resultan ser el producto de un número natural por sí mismo, basta con hacer:

$$n^2 \qquad (3)$$

y otra vez, *todos* los cuadrados se obtienen de esa forma.

¿Por qué me interesa decir que tanto *todos* los pares, como *todos* los impares, como *todos* los cuadrados se pueden obtener de acuerdo con las fórmulas (1), (2) y (3) respectivamente? Porque los matemáticos andan a la búsqueda de una fórmula que provea *todos* los números primos. Ya se sabe que una fórmula de ese tipo no puede tener la forma de un *polinomio*; es decir, no puede ser como las ecuaciones (1), (2) y (3). Incluso se sabe también que ni siquiera aligerando un poco las hipótesis y sin pedir que la fórmula diera primos para todos los naturales *n*, sino sólo para algunos (pero infinitos) valores de *n*, aún así se sabe que no puede existir ningún polinomio que los provea. Por otro lado, uno se contentaría, ya no con obtener *todos* los números primos, sino al menos con obtener *algunos* de ellos. En un momento determinado, apareció una *expresión* que generó alguna esperanza:

$$n^2 + n + 41$$

… pero duró poco. Es que el polinomio

$$P(n) = n^2 + n + 41$$

permite obtener primos para todos los números *n* menores que 40. Revisemos la siguiente tabla:

n	$n^2 + n + 41$
1	43
2	47
3	53
4	61
5	71
6	83
7	97
8	113
9	131
10	151
11	173
12	197
13	223
14	251
15	281
16	313
17	347
18	383
19	421
20	461
21	503
22	547
23	593
24	641
25	691
26	743
27	797
28	853
29	911
30	971
31	1033

n	$n^2 + n + 41$
32	1097
33	1163
34	1231
35	1301
36	1373
37	1447
38	1523
39	1601

En la primera columna figuran los primeros treinta y nueve números naturales.[20] En la segunda, el resultado de aplicar la fórmula:

$$P(n) = n^2 + n + 41$$

para cada número *n* que figura a la izquierda. Todos los números de la segunda columna son números primos, lo cual permitió alentar alguna esperanza de que se pudiera seguir. Sin embargo, como escribí más arriba, duró poco, porque, si uno calcula la fórmula en el caso en que

$$n = 40$$

entonces se obtiene el número 1.681, que ya no es primo. En realidad, no sólo no es primo, sino que es un cuadrado:

$$1.681 = 41 \cdot 41 = 41^2$$

Otro hecho curioso (y precioso a la vez) es que, si uno resta de a dos los términos de la segunda columna, se tiene la siguiente tabla:

[20] Si agregáramos el número 0 y le permitimos a *n* tomar este valor, entonces se obtiene *también* un número primo, ya que para *n* = 0, P(n) = 02 + 0 + 41 = 41, que es un número primo.

n	$n^2 + n + 41$	restando de a dos
1	43	47 – 43 = 14
2	47	53 – 47 = 16
3	53	61 – 53 = 18
4	61	71 – 61 = 10
5	71	83 – 71 = 12
6	83	97 – 83 = 14
7	97	113 – 97 = 16
8	113	131 – 113 = 18
9	131	151 – 131 = 20
10	151	173 – 151 = 22
11	173	197 – 173 = 24
12	197	223 – 197 = 26
13	223	251 – 223 = 28
14	251	281 – 251 = 30
15	281	313 – 281 = 32
16	313	347 – 313 = 34
17	347	383 – 347 = 36
18	383	421 – 383 = 38
19	421	461 – 421 = 40
20	461	503 – 461 = 42
21	503	547 – 503 = 44
22	547	593 – 547 = 46
23	593	641 – 593 = 48
24	641	691 – 641 = 50
25	691	743 – 691 = 52
26	743	797 – 743 = 54
27	797	853 – 797 = 56
28	853	911 – 853 = 58
29	911	971 – 911 = 60
30	971	1033 – 971 = 62
31	1033	1097 – 1033 = 64
32	1097	1163 – 1097 = 66

n	$n^2 + n + 41$	restando de a dos
33	1163	1231 – 1163 = 68
34	1231	1301 – 1231 = 70
35	1301	1373 – 1301 = 72
36	1373	1447 – 1373 = 74
37	1447	1523 – 1447 = 76
38	1523	1601 – 1523 = 78
39	1601	1681 – 1523 = 80

O sea, que si uno considera la fórmula como:

$$P(n) = n^2 + n + 41$$

las diferencias que figuran en la tercera columna resultan de hacer:

$$P(n + 1) - P(n) = 2 \cdot (n + 1)$$

para cada uno de los valores de *n* que figuran en la primera columna.

Otra fórmula interesante que involucra a los primos es:

$$1 + 1 = 2 \text{ es primo}$$
$$2 + 1 = 3 \text{ es primo}$$
$$2 \cdot 3 + 1 = 7 \text{ es primo}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31 \text{ es primo}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211 \text{ es primo}$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2.311 \text{ es primo}$$

pero:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30.031 = 59 \cdot 509$$

(y ya no es primo sino compuesto).

Sigo:

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 + 1 = 510.511 = 19 \cdot 97 \cdot 277$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 + 1 = 9.699.691 = 347 \cdot 27.953$$

Los siguientes primos de la forma

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \ldots p + 1$$

(con *p* primo), aparecen cuando *p* = 31, 379, 1.019, 2.657 y 10.211… Es decir, se obtienen números primos para *algunos* valores de *p*, pero no para todos.

Por último, un pequeño párrafo para la distribución de los primos.

Si bien se sabe que hay infinitos primos, es interesante notar que, a medida que uno va recorriendo los números, son cada vez menos *densos* o, lo que es lo mismo, aparecen cada vez más espaciados.

Fíjese en esta lista:

- Entre los primeros 100 números naturales, hay 25 primos. O sea, 1 de cada 4.
- Entre los primeros 1.000 números naturales, hay 168 primos. O sea, 1 de cada 6.
- Entre los primeros 10.000 números naturales, hay 1.229 primos, o sea 1 primo cada 8,1 números.
- Entre los primeros 100.000 números naturales, hay 9.592 primos, o sea, 1 cada 10,4 números.
- En el primer 1.000.000 de números naturales, hay 78.498 primos, o sea 1 en 12,7.
- Entre los primeros 10.000.000 de números naturales, hay 664.579 primos, o sea 1 en 15.

Y para terminar, dos datos más:

Entre los primeros 100.000.000 de números naturales hay 5.761.455 primos, o sea 1 en 17,3; y entre los primeros 1.000.000.000

de números naturales, hay 50.847.534 números primos, lo que representa una proporción de 1 cada 19,6.

Es decir:

número n	primos hasta n
10	4
100	25
1.000	168
10.000	1.229
100.000	9.592
1.000.000	78.498
10.000.000	664.579
100.000.000	5.761.455
1.000.000.000	50.847.534
10.000.000.000	455.052.511
100.000.000.000	4.118.054.813
1.000.000.000.000	37.607.912.018
10.000.000.000.000	346.065.536.839

La función P(n) o π(n) es la que cuenta el número de primos que hay entre el número 1 y el número *n*. Por ejemplo, mirando la tabla que figura acá arriba se deduce que:

$\pi(10) = 4$
$\pi(100) = 25$
$\pi(1.000) = 168$
$\pi(10.000) = 1.229$, etcétera.

Además, hay un teorema que permite estimar el número de primos que hay entre 1 y *n*, o sea, el valor aproximado de π(n).

$$\pi(n) \cong n/\log(n)$$

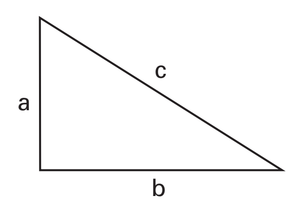
Como se ve en estos pocos ejemplos, los números primos son una usina generadora de intrigas dentro de la matemática. Se sabe que son

infinitos, pero no existe ninguna fórmula que permita generarlos a todos. Más aún: ni siquiera se conoce una fórmula que permita obtener *infinitos* números primos, aunque no sean todos. Se conocen los primos gemelos, pero no se sabe sin son infinitos. Se cree que todo número par (salvo el 2) es la suma de dos primos, conjetura que se debe a Goldbach, pero se desconoce la demostración. Son los genes o átomos que producen los números naturales. Son los que dan origen al famoso Teorema fundamental de la aritmética (véase *Matemática… ¿Estás ahí?* Episodio 1, p. 49). Son los que permiten hoy *encriptar* los mensajes de Internet, hacer transacciones bancarias garantizando la identidad, retirar dinero en los cajeros automáticos, es decir, se *saben* muchísimas cosas sobre ellos… pero, aun así, todavía resultan *resbaladizos* y *difíciles de domar.*

Ternas pitagóricas

El teorema de Pitágoras dice: “En un triángulo rectángulo, se verifica siempre que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”. Un triángulo rectángulo es un triángulo cualquiera en el que uno de los ángulos mide 90 grados. O lo que es lo mismo, uno de sus ángulos es un ángulo recto (como en una escuadra). El lado mayor, el que aparece por lo general dibujado como la diagonal, se llama hipotenusa. Los otros dos lados se llaman catetos.

En un dibujo, entonces, se tiene



Llamemos *a* y *b* a las longitudes de los catetos, y *c* a la longitud de la hipotenusa.

Lo que dice el teorema, entonces, es que

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (1)$$

En realidad, el teorema dice que, si uno tiene un triángulo rectángulo y conoce la longitud de los dos catetos, entonces, inexorablemente conoce el valor de la hipotenusa. Ésta queda determinada por la longitud de los catetos, y en este caso, se verifica la igualdad (1).

Por ejemplo, si uno dibujara un triángulo rectángulo, en el que los catetos miden $a = 3$ y $b = 4$, entonces la hipotenusa *tiene que medir 5,* porque, usando la fórmula (1), tenemos

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Y este número, 25, tiene que ser el cuadrado de algún número. Y justamente, 25 es el cuadrado de 5.

Luego, podemos decir que la terna (3, 4, 5) es una terna pitagórica. A partir de ahora, entonces, a una terna

$$(a, b, c)$$

que cumpla con la condición (1), la llamaremos *terna pitagórica.*

Pregunta: ¿cómo se hace para conseguir ternas pitagóricas en las que los tres números sean enteros? Uno se hace esta pregunta porque, si pone por ejemplo:

$$a = 2,\ b = 3,$$

Entonces, sabemos que

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

Todo esto está bien, pero si

$$c^2 = 13$$

entonces, $c = \sqrt{13}$. Y este número, no es un número entero.

Por supuesto

$$(2, 3, \sqrt{13})$$

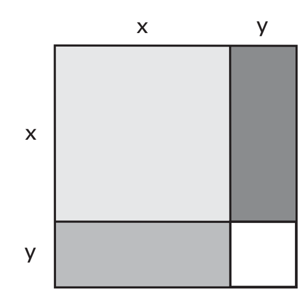
es una terna pitagórica, pero nosotros buscamos aquellas en las que los tres números sean enteros (y no nulos). Ya sabemos lo que buscamos. ¿Cómo se hace para obtener esas ternas?

Por otro lado, aparte de la que ya encontramos (3, 4, 5), ¿existen otras? Lo interesante del planteo es que usted está en condiciones de encontrar la respuesta por sus propios medios. Y vale la pena que lo intente. También puede seguir leyendo lo que sigue, pero la gracia está puesta en pensar *uno mismo.*

Quiero mostrar dos igualdades interesantes, que se conocen como "el cuadrado de una suma de números" y "el cuadrado de una diferencia de números". Puesto de otra forma, esto dice:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \qquad (1)$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \qquad (2)$$

Para convencerse de que esto es cierto, basta con hacer la cuenta. Es decir, en el caso (1), multiplicar $(x + y)$ por sí mismo, y agrupar, y en el caso (2), multiplicar $(x - y)$ por sí mismo, y luego agrupar también. Geométricamente, o gráficamente, esto puede verse así:



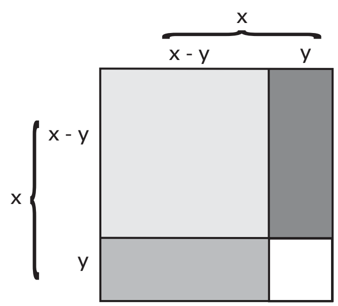
© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

En el primer caso, se tiene un cuadrado de *lado* $(x + y)$. Cuando uno quiere calcular el área de ese cuadrado –o sea, $(x + y)^2$–, mirando las distintas áreas dibujadas, queda:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

en donde el primer "sumando" x^2 resulta de calcular el área del cuadrado que tiene a x de lado; el segundo "sumando", $2\ x\ y$, resulta de la suma de las áreas de los dos rectángulos iguales, con un lado igual a x y otro igual a y, y por último, el tercer y último "sumando" es y^2, y resulta de calcular el área del cuadrado más chico, de lado igual a y.

De la misma forma, si uno quiere ahora convencerse *geométricamente* de la igualdad (2), mira (fijo, eso sí) este dibujo:



Y lo que descubre, es que

si llama $x =$ lado del cuadrado mayor,
$y =$ lado del cuadrado menor,

y quiere calcular la superficie del cuadrado de lado $(x - y)$, se tiene:

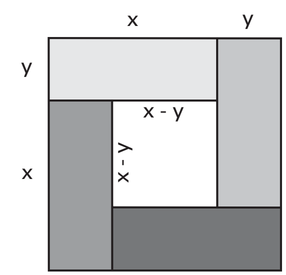
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

¿Cómo apareció esta fórmula?

Es que cuando uno quiere calcular el área del cuadrado de lado $(x - y)$, calcula el área del cuadrado mayor (medida por x^2), luego resta las superficies de los dos rectángulos iguales de lados x e y, pero tiene que notar que está quitando dos veces el cuadrado cuya superficie es y^2. Por eso, hay que agregarla una vez, y de ahí la fórmula final:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

De manera tal que ya tenemos geométricamente demostradas las dos fórmulas.



Aquí se ve que

$$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$$

Con estas dos fórmulas, ahora puede construir las ternas pitagóricas con números enteros que estábamos buscando. Elija dos números naturales (enteros positivos) cualesquiera, digamos m y n. Con ellos fabriquemos otros tres números: a, b y c. Lo hacemos así:

$$\begin{aligned} a &= m^2 - n^2 \\ b &= 2mn \\ c &= m^2 + n^2 \end{aligned} \qquad (4)$$

Por ejemplo, si tomamos m = 3 y n = 2, se obtienen:

$$a = 3^2 - 2^2 = 5$$
$$b = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$
$$c = 3^2 + 2^2 = 13$$

Observe ahora que la terna (a, b, c) = (5, 12, 13) es pitagórica. Para comprobarlo, hay que hacer:

$$a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$$

y justamente: $169 = 13^2$.

¿Por qué pasó esto? ¿Habrá sido casualidad? No, no fue casualidad. Fíjese cómo están construidos *a*, *b* y *c* (confronte las fórmulas que aparecen en 4). Con esa definición, cualquier terna (*a*, *b*, *c*) que uno obtenga, siempre *será* pitagórica. Es decir, la terna

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

es *siempre* pitagórica. Hagamos la cuenta.

Para que esto sea cierto, hay que elevar la primera coordenada al cuadrado, sumarle el cuadrado de la segunda coordenada, y fijarse que dé el cuadrado de la tercera coordenada. O sea, hay que ver que:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2 \qquad (5)$$

¿Será verdad esto?

Calculemos usando las fórmulas que dedujimos hace un rato para el cuadrado de la suma de dos números y el cuadrado de una diferencia (*) y (**). Entonces, hacemos el cálculo del primer miembro en la ecuación (5):

$$\begin{aligned}(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4\end{aligned}$$

Y justamente, este último término es igual a

$$(m^2 + n^2)^2$$

que es lo que queríamos probar en la ecuación (5). Es decir, ahora sabemos cómo construir ternas pitagóricas. Basta entonces con elegir cualquier par de números naturales *n* y *m*, y con ellos construir

$$(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$$

Incluyo aquí una tabla con *algunos pares m y n.*

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
7	2	45	28	53
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	3	16	30	34
5	4	9	40	41
5	1	24	10	26
6	5	11	60	61

Lo que hay que hacer ahora, si uno quiere tener la satisfacción de que hizo todo bien, es comprobar que los resultados sean los esperados. Es decir, verificar que si uno calcula

$$a^2 + b^2 = c^2$$

pasa lo que tenía que pasar.

Por supuesto, hay muchas maneras de construir *ternas pitagóricas.* De hecho, si uno *ya tiene una terna pitagórica (a, b, c),* puede construir *infinitas, multiplicando cada término* de la terna por cualquier número. Por ejemplo, si (*a*, *b*, *c*) es pitagórica, entonces (2*a*, 2*b*, 2*c*) es pitagórica, y (3*a*, 3*b*, 3*c*) también… y así siguiendo. De hecho, si (*a*, *b*, *c*) es pitagórica, entonces

(ka, kb, kc) es pitagórica

cualquiera que sea el número natural *k* que uno elija. Esto se demuestra muy fácilmente porque, como uno sabe que

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad (***)$$

Entonces

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2(a^2 + b^2)$$

Usando (***):

$$= k^2\, c^2$$

Luego, la terna (*ka, kb, kc*) es pitagórica también, para cualquier número natural *k*. Pero, si uno se fija en la tabla de más arriba, todas las que aparecen allí son originales, en el sentido de que ninguna se obtiene de las anteriores multiplicándolas por algún número. Otra forma de escribir esto es decir que el máximo común divisor entre los números *a* y *b*, es 1. O sea, no tienen divisores comunes y, por lo tanto, tampoco tendrán un divisor común con *c*. Así, uno puede garantizar que, o bien *a* es un número par y *b* es impar, o bien *a* es un número impar y *b* un número par. De hecho, entonces, hemos conseguido infinitas ternas pitagóricas, nuestro objetivo inicial.

Un desafío

El que sigue es un problema precioso y sirve para utilizar mucha y muy linda matemática. Supongamos que tiene en una bolsa los primeros *cien números naturales.* O si prefiere, suponga que tiene den-

tro de una bolsa 100 tarjetas numeradas del 1 al 100. Es decir, dentro de la bolsa están:

{1, 2, 3, 4, …, 27, 28, 29, …, 97, 98, 99, 100}

Hay muchas maneras de meter la mano en esa bolsa, y sacar *10* de esos números. Elija una cualquiera.

El problema consiste en demostrar que, entre ese grupo de 10 números que usted eligió, se pueden separar dos grupos que no contengan ningún número en común, pero cuya suma sea la misma. No hace falta usar los 10 números, pero lo que sí es seguro es que hay dos subgrupos disjuntos (sin números en común) que tienen la misma suma.

Es decir: uno tiene los 10 números; lo que hay que demostrar es que hay por lo menos dos formas de separar *algunos* de esos números en dos grupos disjuntos, de manera tal que *la suma de los dos subgrupos dé lo mismo.*

Por ejemplo, si al meter la mano en la bolsa sacara *justo* los *10 primeros* números

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10},

tendría que ser capaz de encontrar al menos *dos subgrupos distintos cuya suma diera igual.*

Hay muchas formas de conseguir dos subgrupos que provean una solución al problema. Veamos algunos:

a) Elijamos

{1, 2} y {3}.

Ambos conjuntos suman *3.*

b) Otros dos subgrupos son:

{1, 2, 3, 4, 5} y {7, 8}

(En este caso, ambos suman 15.)

c) Otra más:

{5, 6, 7} y {10, 8}

Me imagino lo que está pensando: es trivial encontrar los dos subgrupos una vez que uno tiene los 10 números. De acuerdo. En el ejemplo que acabo de poner fue fácil.

Lo invito ahora a hacer lo mismo en el caso que sigue:

{17, 31, 42, 43, 74, 75, 76, 87, 98, 99}

Piénselo usted solo/a. Yo no traté de hacerlo en este caso, pero usted siga adelante y entreténgase un rato. Creo que ahora, al menos, se entiende el planteo y qué queremos encontrar.

Resolver el problema supone *demostrar* que esos *dos* subgrupos *existen siempre*, independientemente del primer grupo de *10 números que sacó de la bolsa.* Pero, como sucede muchas veces en matemática, lo que vamos a poder hacer es demostrar que siempre existen, aunque no los encontraremos, efectivamente. Es decir, este problema tiene la gracia de que muestra algo que sucede muchas veces cuando uno trabaja en ciencia y, muy en particular, en matemática. Uno tiene un problema para resolver, pero *no sabe si tiene solución o no.* Por supuesto, en el escenario *ideal*, uno trata de encontrar la solución y se terminó la discusión. Pero si uno no pudo encontrarla hasta ese momento, quizás es útil saber que por lo menos existe la solución que se busca. Así, hay teoremas llamados *"de existencia"* que aseguran que ciertas situaciones o problemas *tienen solución,* pero no la encuentran. Lo que sí hacen es decir: "vea, hasta acá usted no la habrá encontrado, pero el teorema *le garantiza que existir, existe. ¡Siga buscando!*". Es más. Algunos teoremas se llaman "de existencia y unicidad", en el sentido de que *hay solución,* y no sólo eso, sino que hay una sola solución.

Y, para pensar: ¿de cuántas formas se pueden elegir subconjuntos entre 10 elementos?

Un número primo *p* y ladrillos de (*m* x *n*)

Primero, un ejemplo. Supongamos que tiene un cuadrado que mide 17 metros de lado (por ejemplo, el piso de un patio, en un colegio). Supongamos, además, que tiene azulejos de cerámica de distintos tamaños, digamos de 2 x 3, o de 3 x 3 (siempre en metros). ¿Cómo puede hacer para cubrir toda la superficie sin *partir* los azulejos?

Una vez que se *peleó* un rato con este problema, le propongo uno un poco más general: si uno tiene un cuadrado de lado p (donde p es un número primo, o sea que se tiene una superficie de p^2 *metros cuadrados*) y ladrillos de (m x n) (donde m y n son números naturales cualesquiera entre 1 y p), ¿cómo hace para cubrir toda la superficie?

Antes de escribir la respuesta, lo invito a pensar lo siguiente. Es muy importante (y determinante, como ya habrá advertido si quiso resolver el problema inicial) el hecho de que el número p sea primo. Eso significa (lo recuerdo aquí) que los únicos *divisores que tiene* son él mismo y el número *1.*

Supongamos que uno tiene ladrillos de (*m x n*), y que usa una cierta cantidad (digamos r) de ellos para cubrir la superficie del cuadrado, que sabemos que es de p^2. Eso significa que

$$r \cdot (m \cdot n) = p^2 = p \cdot p \qquad (*)$$

¿Por qué es cierta esta igualdad? Es que, si cada *ladrillo* tiene dimensiones (m x n) y usamos r de ellos para cubrir el cuadrado original, entonces la superficie que cubren esos ladrillos tiene que ser igual a la del cuadrado. Como el número p es primo, entonces, el término de la izquierda de (*) no puede contener ningún otro número que no sea "copias de *p*". Esto pasa porque la descomposición es única (véase la página 49 del Episodio 1 de *Matemática… ¿Estás ahí?* Se entiende que la descomposición es única en factores primos, como allí se indica).

Luego, para que la ecuación (*) sea válida, la única manera posible es que los tres números, *r, m* y *n*, sean iguales a *p* o a 1. Esto sucede porque el número *p* es primo, y no se puede descomponer más que como

$$p = 1 \cdot p$$

o bien

$$p = p \cdot 1$$

Por lo tanto, lo que tiene que pasar es que los ladrillos sean de las siguientes dimensiones:

a) (1 · 1) En este caso, hacen falta p^2 ladrillos.
b) (1 · p) Aquí harán falta *p* ladrillos.
c) (p · 1) Lo mismo que recién: harán falta *p ladrillos.*
d) (p · p) En este caso, hará falta *un solo* ladrillo

Todo este razonamiento lo conocen bien los azulejistas o quienes colocan baldosas en edificios.

Para terminar, otro ejemplo: supongamos que uno tiene que poner baldosas en un patio cuadrado de 11 metros de lado. Esto significa que la superficie a cubrir es de 121 metros cuadrados. Se pueden usar baldosas de cualquier tipo, pero cuyos lados midan un número entero de metros. Es decir, baldosas de *(m x n),* donde *m* y *n* son números naturales. Por lo que vimos recién, las únicas que se pueden usar son baldosas de:

a) 1 · 1
b) 1 · 11
c) 11 · 1
d) 11 · 11

Problema de Brocard (un problema *abierto*)

Quiero plantear ahora un problema abierto (sin solución) hasta hoy, fines de 2007. Necesito que nos pongamos de acuerdo con la notación, para que se entienda el enunciado. Por un lado, ya definí en otras oportunidades lo que se llama *el factorial de un número natural n,* y se escribe n!

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por ejemplo,

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$
$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$$
$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$$

O sea, el "factorial de un número *n*" consiste en multiplicar *todos* los números para atrás, hasta llegar al 1, incluyendo al mismo *n.*

Por otro lado, "elevar un *m* número al cuadrado", o sea m^2, es multiplicarlo por sí mismo. Por ejemplo,

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$
$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$
$$123^2 = 123 \cdot 123 = 15.129$$

Ahora estoy en condiciones de plantear el problema. Lea las siguientes tres igualdades:

a) $5^2 = 4! + 1$
b) $11^2 = 5! + 1$
c) $71^2 = 7! + 1$

Haga las cuentas conmigo:

a) $5^2 = 4! + 1 = 25$
b) $11^2 = 5! + 1 = 121$ (*)
c) $71^2 = 7! + 1 = 5.041$

O sea, las *tres* igualdades cumplen esta ecuación:

$$m^2 = n! + 1 \quad (**)$$

Lo interesante, entonces, es que al "mirar" las "tres" igualdades de (*), uno advierte que en cada caso, hay un *par* de números que cumplen la ecuación (**).

En el caso (a) $m = 5$ y $n = 4$
En el caso (b) $m = 11$ y $n = 5$
En el caso (c) $m = 71$ y $n = 7$

Es decir, hay tres ejemplos de pares de números, que cumplen con la ecuación (**). Lo que *no se sabe* hasta hoy es si hay *otros pares* de números que cumplan esa ecuación. Los únicos conocidos son esos tres (5, 4), (11, 5) y (71, 7). El famoso matemático húngaro Paul Erdos conjeturó que *no hay otros,* pero, hasta hoy, no se sabe. El problema se conoce con el nombre de "Problema de Brocard", y los pares de números que cumplen la ecuación (**) se llaman "Números de Brown".

En 1906 ya se sabía (lo demostró Gérardin) que, si el número $m > 71$ (mayor que 71), entonces tenía que tener por lo menos 20 dígitos. Otro que *visitó* el problema fue el famoso Ramanujan, quien lo abordó en 1913. En 1994, Guy fue otro de los que afirmó que lo más probable era que *no hubiera más soluciones*.

Todo bien, pero hasta el momento no hay *certeza al respecto*. ¿Quiere intentar?

Juegos y matemática

Teoría de juegos. Estrategia (una definición)

La matemática tiene una rama que se llama "Teoría de juegos". Sí: teoría de *juegos.* ¿No debería ser suficientemente atractiva una ciencia que ofrece *juegos* en su menú? ¿No sería interesante considerarla como alternativa para estimular a los niños/jóvenes en el colegio?

Ahora bien: ¿de qué se trata esta teoría? Se trata de aprender y diseñar *estrategias* para ganar, y que sirven en la vida para enfrentar situaciones cotidianas. Obviamente, nadie puede asegurar un triunfo (porque todos los participantes podrían haber estudiado del mismo libro), pero se trata de encontrar la mejor manera (la más "educada") de jugar a un juego, o de enfrentar un problema de la vida diaria.

Quiero empezar con lo que se llama *pensamiento estratégico.* Dos personas o grupos compiten para conseguir algo que está en juego. Puede ser una partida de ajedrez, un partido de fútbol, pero también una licitación que hace un gobierno para adjudicar cierto tipo de telecomunicaciones, o la electricidad. Incluso, individuos que quieren conseguir un trabajo.

Usted y el otro, o usted y los otros, alguien puja con usted para obtener algo. Este (esos) otro(s) *piensa(n) igual que usted, al mismo tiempo que usted, acerca de la misma situación.* En todo caso, se trata de saber quién es capaz de *maximizar el retorno* (en el sentido de "ganancia").

En esencia, se trata de diseñar una estrategia para enfrentar a sus oponentes, que deberá incluir inexorablemente cómo anticiparse a lo que ellos van a hacer, cómo contrarrestarlos, y cómo hacer para que *prevalezca su posición* o, si lo prefiere, cómo hacer para que pueda *ganar usted.* Por supuesto, así como tendrá que considerar qué es lo que el otro jugador está pensando, él, a su vez, tendrá que considerar lo que piensa usted.

Y justamente, la Teoría de juegos es el área de la matemática que se ocupa de cómo optimizar ese tipo de *toma de decisiones,* y se basa en generar y estudiar modelos que *simulan* interacciones entre dos (o más) partes, y encontrar la *estrategia* más adecuada para obtener un objetivo determinado.

Y acá entra en escena el comportamiento racional. ¿Qué quiere decir?

Uno puede decir que actúa con racionalidad cuando:

- piensa cuidadosamente antes de actuar;
- es consciente de sus objetivos y preferencias;
- conoce sus limitaciones;
- sabe cuáles son las restricciones que impone el entorno;
- estima qué va a hacer su oponente de acuerdo con lo que usted cree que son sus virtudes y flaquezas;
- puede anticipar varias jugadas;
- puede imaginar diferentes escenarios.

La Teoría de juegos agrega una nueva dimensión al comportamiento racional, esencialmente, porque enseña a pensar y a actuar en forma "educada" cuando uno tiene que enfrentarse con otras personas que usan las mismas herramientas.

Como escribí más arriba, la Teoría de juegos no se propone enseñar los secretos de cómo jugar "a la perfección", o garantizar que nunca va a perder. Eso ni siquiera tendría sentido pensarlo, ya que usted y su oponente podrían estar leyendo el mismo libro, y no podrían ganar al mismo tiempo. La mayoría de los juegos son lo suficientemente complejos y sutiles, e involucran decisiones basadas en la

idiosincrasia de las personas o en elementos azarosos, como para que ni la Teoría de juegos (ni nada) pueda ofrecer una receta que garantice el éxito. Lo que *sí provee* son algunos principios generales para aprender a interactuar con una estrategia.

Uno tiene que suplementar estas ideas y métodos de cálculo con tantos detalles como le sea posible, de manera tal de dejar librado al azar, justamente, lo menos posible, para de esa forma ser capaz de diseñar lo que se denomina "la estrategia óptima". Los mejores estrategas mezclan la ciencia que provee la Teoría de juegos con su propia *experiencia.* Pero un análisis correcto de cualquier situación involucra también aprender y describir todas las limitaciones.

Tome cualquier juego en el que haya interacción y apuestas entre los participantes. Por ejemplo, truco, tute o póquer, por sólo nombrar algunos de los más comunes. Parte de la estrategia es saber "mentir". Pero, otra vez, ¿qué quiere decir *saber* mentir en este caso? Me explico: aunque parezca loco, se trata de que quien no tiene una buena mano, o no tiene buenas cartas, alguna vez sea descubierto por sus rivales. Lea de nuevo lo que dice: uno necesita que los oponentes lo descubran (a uno) mintiendo. ¿Por qué? Sencillamente, porque no es bueno para usted que se sepa de antemano que, *siempre* que usted hace una apuesta o un desafío de cualquier tipo, lo hace porque tiene buenas cartas. Eso significaría que sus rivales tienen un dato que usted no querría que tuvieran, aunque más no fuera porque no podría sacar mayores ventajas en caso de tener una buena mano. Un buen jugador se deja sorprender. Puede que pierda esa pequeña batalla, pero eso le permitirá instalar una duda en el adversario, tornándole más difícil la decisión. Eso le permitirá, eventualmente, ganar cuando reciba buenas cartas, pero también zafar cuando no sea así. Por ejemplo, para quienes juegan al truco, tienen que ser descubiertos cantando "envido" aunque sus cartas no los autoricen a pensar que van a ganar. Puede que pierdan esa mano, pero esa inversión invitará a sus rivales a que también "acepten su envite" cuando tenga buenas cartas. Y ahí sí sacará las mayores ventajas.

La Teoría de juegos trata de establecer *estrategias,* y termina siendo una buena mezcla entre matemática y una gran dosis de psicología.

Tomemos un ejemplo muy sencillo: "Piedra, papel o tijera". Este juego consiste en poner una mano detrás de la espalda, igual que su rival. Tienen que exhibirla simultáneamente con uno de esos tres gestos: la mano abierta representa el papel; el puño es el símbolo de una piedra; por último, si uno muestra dos dedos haciendo una V "acostada" indica tijera. Como es sabido, la piedra "rompe" la tijera, el papel "envuelve" a la piedra y la tijera "corta" el papel. Éste es un ejemplo de un juego en el que no hay una manera segura de "ganar". Depende no sólo de lo que hace uno, sino de lo que haga el otro. ¿Hay acaso una estrategia? Sí, pero es sutil. Por ejemplo, si fuéramos a jugar a este juego y yo detectara que usted me muestra una piedra con una probabilidad mayor de *una vez en tres,* entonces empezaría a *"usar papel"* más frecuentemente. Si jugáramos suficiente tiempo, yo "tendría una ventaja" sobre usted, porque me estará mostrando un patrón en su forma de jugar. La estrategia *perfecta* para este juego es elegir *siempre al azar lo que va a exhibir.* Si los dos jugaran así, ninguno sacaría ventaja porque se equipararían las posibilidades. Si alguno de los jugadores empezara a usar un *"patrón",* sea cual fuere, el otro jugador podría detectarlo e inmediatamente *tendría una ventaja.*

John Nash consiguió el Premio Nobel en Economía en 1994 por sus aportes a la Teoría de juegos.[21] Por un lado, existen los juegos llamados de *suma cero.* Por ejemplo, si usted juega al póquer con otras personas, todo lo que haya ganado será el resultado de lo que los *otros*

[21] Este campo apareció en 1944 con la publicación de *Teoría de juegos y comportamiento económico*, de John von Neumann y Oskar Morgenstern, y luego ocupó el centro de la escena mundial cuando la usó la RAND Corporation para definir *estrategias nucleares.* El que se hizo famoso por sus aportes a esta teoría fue el laureado John Nash (Premio Nobel de Economía e inspirador del libro y la película *Una mente brillante*). Él fue quien introdujo un concepto organizador de la teoría, conocido ahora como el "Equilibrio de Nash".

La Teoría de juegos es usada fuertemente hoy, no sólo en economía (que es su verdadero origen), sino también en biología, psicología, sociología, filosofía, ciencias políticas, en el campo militar (casi una obviedad), en inteligencia artificial y en cibernética. Y en la vida cotidiana, ciertamente. Algunas referencias: *Game Theory: A Non-Technical Introduction to the Analysis of Strategy* (por Roger McCain); http://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_juegos; Game Theory (por Drew Fudenberg y Jean Tirole).

perdieron. La *suma* del dinero involucrado da *cero.* Dicho de otra manera, *no aparece dinero nuevo.* Nadie puede ganar un dinero que otro no perdió (y viceversa).

El aporte de Nash fue considerar lo que llamó los juegos que *"no suman cero".* Cuando aún no había cumplido treinta años, desarrolló el concepto de lo que hoy se conoce con el nombre del "Equilibrio de Nash". Ésta es una definición muy interesante sobre lo que significa alcanzar una situación en la que *todos los participantes* se van a sentir contentos. Puede que alguno hubiera podido obtener algo "mejor" si actuaba en forma individual, pero *colectivamente* es la mejor situación posible (para el grupo). Es decir, todos los participantes advierten que es mejor establecer una "estrategia para todos" que una individual. De esto se trata muchas veces en el "mundo real". En el caso de un juego de uno contra uno, el "equilibrio de Nash" se alcanza cuando nadie tiene nada para reclamar, en el sentido de que uno no variaría lo que hizo o está por hacer *aun sabiendo lo que va a hacer el otro.* En un juego de cartas sería como decidir qué carta uno va a jugar indistintamente de si pudiera ver las cartas del otro o no.

Por ejemplo: supongamos que veinte personas van a comprar durante cierto mes del año un determinado modelo de auto. Quizá, cada uno pueda negociar un precio que le convenga personalmente. Pero si se pusieran todos de acuerdo en *entrar* en la concesionaria juntos y llevaran una oferta para comprar veinte autos, parece lógico pensar que obtendrán un mejor precio.

Es casi una *"teoría del compromiso"*, algo muy sencillo, pero nadie lo había podido sistematizar hasta que lo hizo Nash. Él no estaba tan interesado en cómo alcanzar un equilibrio en el sentido de que todo el mundo estuviera contento con su posición, pero sí sobre cómo deberían ser las *propiedades* que un *equilibrio debería tener.* Una idea aproximada de lo que hizo Nash es lo siguiente: si uno preguntara a todos los integrantes de una mesa (de negociaciones, por ejemplo): "Si todos los otros jugadores se mantuvieran en la posición que están ahora, ¿usted cambiaría lo que está haciendo?". Lo que equivaldría a preguntar si cada uno mantendría su posición, *si supiera* que *todo el resto* se mantendrá quieto. Ésa es la lógica para alcanzar el "equilibrio de Nash".

Mucho tiempo después de que Nash escribiera su teoría del equilibrio en 1950, el mundo comenzó a usarla. De hecho, el mejor exponente fue cómo se empezó a tratar el tema de las "licitaciones" o "remates", y presentó un ejemplo maravilloso: las reglas que gobiernan un remate son las mismas que gobiernan un "juego". En este caso, los "apostadores" son los competidores en un juego; las estrategias son "su plan de acción", la forma en la que van a apostar, y la ganancia es quién obtiene lo que se vendía y cuánto paga por lo que está en juego.

A los que trabajan en Teoría de juegos, este tipo de "licitaciones" o "remates" les permite *predecir* lo que los jugadores van a hacer, aprovechando lo que saben del equilibrio de Nash, y transforman reglas que podrían ser muy complicadas en algo "analizable". No sólo eso: en ese tipo de operaciones, cuando hay "grandes licitaciones", cuando se habla de "miles de millones de dólares", los apostadores saben bien qué hacer. Ellos saben que hay mucho dinero en juego; se pasan mucho tiempo pensando y contratan expertos que les permitan mejorar su posición. Para fijar las ideas, uno puede pensar en "licitaciones gubernamentales", en las que aparecen –por ejemplo– empresas de telefonía, o de Internet, o de telefonía celular involucradas.

En el pasado, este tipo de licitaciones se manejaban en forma arbitraria, algo así como un concurso de belleza. Como consecuencia, el resultado era que los gobiernos no conseguían que nadie pagara el verdadero valor de lo que estaba en juego, y eso sin hablar de la corrupción endémica de quienes negocian ese tipo de contratos.

De hecho, con el aporte de Nash los gobiernos tienen ahora una herramienta muy poderosa: que los interesados "apuesten" para conseguir lo que quieren, de manera tal de obtener la mayor cantidad de dinero posible.

En el año 2002, con la participación de matemáticos expertos en Teoría de juegos, liderados por Ken Binmore, el gobierno inglés escribió sus reglas para otorgar la licencia para la *tercera generación de telefonía móvil.* Binmore y su equipo se pasaron dos años pensando en todas las posibles licitaciones (aunque esto suene exagerado). El resultado: el gobierno inglés consiguió 23.000 millones de libras esterlinas (algo así como 46.000 millones de dólares al cambio de media-

dos de 2007). Y eso, por haber usado la teoría de Nash, quien empezó hace cincuenta años analizando los juegos de ajedrez y de póquer, y ahora sus ideas impactan en la economía global y son capaces de generar miles de millones de dólares para los gobiernos (si es que se deciden a usarla).

Nash, en todo caso, hizo algo muy sencillo, que hasta parece increíble que nadie lo hubiera podido ver antes. Pero claro, los que merecen reconocimiento son aquellos que "miraron hacia donde todos apuntaban, pero *vieron* lo que nadie veía". Quizá, ver lo obvio es tener una gran idea.

La Teoría de juegos estudia *cómo la gente toma decisiones cuando estas decisiones afectan a los demás y no sólo a ellos.* Por ejemplo, si usted entra en un negocio y compra un kilo de carne, eso no cambiará el precio de la carne. En cambio, si una compañía automotriz decide modificar el precio de uno de sus autos para seducir a los consumidores, eso implicará un cambio (eventual) en el precio de todos los autos similares. De hecho, cuando se modifica el precio de la nafta, tiene un efecto dominó que afecta a diferentes sectores de la sociedad.

En algún sentido, uno puede pensar la Teoría de juegos como el lenguaje matemático que describe cómo *interactúa* la gente.

Algunas personas actúan en forma más racional (o más irracional) que otras, y la Teoría de juegos analiza también esas situaciones. Por ejemplo, en las subastas o los remates por Internet, hay gente más profesional y *amateurs* que apuestan para conseguir algo por primera vez. Los que "regulan" el remate se ocupan de que la interacción sea *normal*, de manera tal que nadie corra ningún riesgo. Por eso son tan importantes las reglas de la subasta, por cómo afectan la conducta de la gente. Más aún: pequeñas modificaciones en esas reglas generan *grandes* modificaciones en el comportamiento de los usuarios.

Por ejemplo, podemos comparar las subastas de e-bay con las de Yahoo y Amazon. La gente de e-bay tiene una "hora límite". Es decir, ellos instituyen que a "determinada hora" se termina la subasta. Amazon, en cambio, lo hace de otra forma. No es que no tenga un reloj, sino que el remate concluye *diez minutos después de que se hizo la* *última oferta*. Esto implica que se prolongue el tiempo del remate. Por ejemplo, si usted hace una oferta justo un segundo antes de que el tiempo expire, el remate se prolongará otros diez minutos, *siempre y cuando no haya ninguna oferta en ese tiempo*. Si la hubiere, eso haría correr la finalización *otros diez minutos más*.

Las diferencias que esta variación en las reglas genera en la conducta de la gente son sorprendentes. Los usuarios de e-bay *acumulan o amontonan* sus apuestas a medida que se acerca el final, casi como si fueran francotiradores. En cambio, en Amazon uno no observa nada parecido.

Quiero terminar como empecé: es raro que, de una ciencia (la matemática) que tiene una rama llamada Teoría de juegos, se pueda decir que es aburrida, árida o que "yo no nací para esto". Si es así, los comunicadores/docentes debemos estar haciendo algo mal. ¿Quién no jugó mientras fue niño? ¿Por qué no seguir haciéndolo ahora que somos adultos?

La matemática y la niña que no sabía jugar al ajedrez

Esta historia le pertenece a Maurice Kraitchik. Cuando la leí pensé –una vez más– cómo puede ser que la matemática tenga tan mala prensa. Espero que disfrute de este ejemplo, que pone en evidencia cómo un simple recurso de lógica permite obtener un resultado *práctico* inmediato. Acá va.

Violeta, una niña de doce años que virtualmente no sabe nada sobre *ajedrez*, observa que su padre pierde dos partidas seguidas con sus amigos Alberto y Marcelo. Se acerca a él y le dice: "Papá, te aseguro que yo podría hacer mejor papel que vos frente a ellos. No sé mucho de ajedrez, pero me atrevo a jugarles a los dos, incluso en forma simultánea, y estoy segura de que, al menos no voy a perder las dos partidas como vos. Es decir: no te puedo decir que voy a ganar las dos, pero te puedo garantizar que seguro voy a hacer un mejor papel que vos".

El padre la miraba sorprendido, sin poder entender lo que le decía Violeta, pero la niña pareció subir la apuesta.

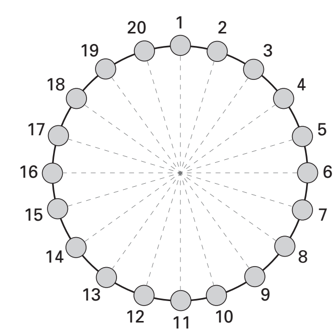
"Te propongo más, papá. Como yo sé que Alberto se considera peor jugador que Marcelo, decile que lo invito a que él juegue con piezas blancas. Eso sí, frente a Marcelo, las blancas las quiero usar yo. Y les ofrezco que juguemos ambas partidas en forma simultánea. Yo los enfrento a los dos al mismo tiempo".

Eso fue lo que pasó. La pregunta es: ¿por qué podía Violeta asegurar que tendría mejores resultados que el padre con tanta seguridad? Aquí es donde conviene que me detenga un instante. Como es esperable, voy a escribir una respuesta (en el anexo con las soluciones), pero le propongo que *piense sola/o* el planteo de la historia, y trate de imaginar qué es lo que haría usted..

Más allá del cuento, lo que importa son los datos: Violeta jugaría con Marcelo llevando las piezas blancas, y con Alberto con las piezas negras. El otro dato que se conoce es que ambas partidas se jugarán en forma simultánea.

Estrategia para ganar siempre

El que sigue es un juego que *enfrenta* a dos personas. Las reglas son muy sencillas. Se tiene un círculo formado por un número par de monedas de 1 peso. Para fijar las ideas, supongamos que hay 20 monedas numeradas (como se ve en la figura).



© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Cada jugador debe retirar o bien una o bien dos monedas cada vez que le toca jugar, pero si va a retirar dos, éstas tienen que ser consecutivas. Es decir, no se puede elegir dos que no estén contiguas en la distribución. La persona que se queda con la última moneda, *gana* el juego.

Supongamos que cada competidor juega a ganar, es decir, que elige en cada oportunidad lo que cree que es mejor para quedarse con esa última moneda. En esas condiciones, ¿hay alguna estrategia que pueda usar alguno de los jugadores de modo que garantice su triunfo?

Antes de avanzar, advierta que el párrafo anterior, aunque no parezca, contiene varias preguntas.

a) ¿Hay alguna estrategia ganadora?
b) ¿Para qué jugador? ¿El que juega *primero* o para el *segundo*?
c) Si la hay, ¿cuál es?

Miranda, Gardner y el partido de tenis[22]

Es curioso cómo un simple partido de tenis puede ayudar para razonar con lógica y proveer un resultado tan interesante.

Supongamos que Miranda y Rosemary jugaron un solo set en un partido de tenis, que terminó con el triunfo de Miranda 6-3. Se sabe además, que se quebraron el saque, en total, 5 veces.[23] La pregunta es: ¿quién sacó primero?

[22] Martin Gardner es el autor más reconocido en el mundo por sus aportes a la matemática, desde un lugar totalmente no convencional. Autor de muchísimos libros, editor de múltiples revistas de difusión, es considerado algo así como el gurú o ícono de la especialidad. Este problema está extraído de uno de sus libros (*The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*); conservé los nombres que él eligió para darles a las jugadoras una suerte de reconocimiento tácito a su contribución inigualable.

[23] Para aquellos que no saben nada de tenis –y no hay razones para suponer que uno *sí* sabe– escribo acá que se entiende que una jugadora gana un *set* cuando llega a obtener *6 puntos.* Omito, por razones de necesidad, los casos que involucran *tie-breaks*, etc. Para el problema sólo hace falta saber que quien llega primero a ganar *seis* juegos, es quien gana el *set.* Por otro lado, cada jugador es quien saca hasta que se define el punto; es decir, el saque se alterna entre ambos jugadores. Se entiende que el jugador que saca tiene una ventaja, por lo que se supone que debería ganar ese juego. Cuando esto no sucede, se dice que el rival *le quebró el saque.* De ahí la pregunta del problema.

División justa

Supongamos que usted (Alicia) y un amigo (Raúl) deciden apostar 50 pesos en un juego tan sencillo como el siguiente: se trata de tirar una moneda (o cualquier otro elemento y que la probabilidad de ganar esté dividida por mitades, o sea, 50% de posibilidades para cada uno). Cada uno pone 50 pesos en un pozo y juegan al mejor de siete tiradas. Es decir, quien logre acertar en cuatro oportunidades (de siete), se llevará el dinero (los 100 pesos). No hace falta que sean cuatro aciertos consecutivos, sino que se trata de acertar cuatro entre siete.

Ahora bien. Supongamos que en un momento determinado, cuando Alicia está ganando 3 a 2, se corta la luz, o se pierde la moneda con la que estaban jugando. Es decir, se produce algún acontecimiento que impide que siga el juego. Es importante notar que hasta ese momento todo se había desarrollado normalmente, y que la moneda fue arrojada cinco veces, de las cuales Alicia acertó en tres.

¿Qué hacer? (más allá de todas las bromas que se le ocurran y que puede usar en este punto). ¿Cómo dividir el dinero?

Antes de avanzar, quiero hacer una observación: no pretendo que usted (ni nadie) trate de encontrar una solución que sea *la correcta.* Porque no tiene siguiera sentido buscarla, ya que lo más probable es que cualquier *potencial solución* que uno crea haber encontrado se pueda rebatir. Lo que sí quiero, sin embargo, es mostrar que hay múltiples maneras de hacer algo racional.

Por supuesto, una manera posible es decir: cada uno se lleva el dinero que invirtió (los 50 pesos) y se termina la historia. Y estaría bien. Sólo que la persona que había ganado *tres* de las *cinco* tiradas (Alicia), a quien le faltaba *un acierto más* para llevarse el pozo, podría oponerse y decir: “No. No es justo que hagamos de cuenta que el juego no existió hasta acá. Yo gané *tres de cinco,* y estaba a punto de llevarme todo. ¿Por qué habríamos de dividirlo por la mitad? Esa división no es justa para mí". Y creo que convendrá conmigo en que Alicia tendría suficientes razones para no querer dividir el dinero por igual.

Y entonces, ¿qué hacer?[24]

Al margen de dividir por la mitad como si el partido no hubiera empezado, hay otra forma que surge de inmediato: si Alicia estaba ganando 3 a 2 y uno quisiera conservar esa proporción, lo que se puede hacer es dividir el dinero de esa forma: de cada cinco unidades, tres son para ella. Luego, como "tres de cinco" significa el 60%, entonces, Alicia se quedaría con 60 pesos y Raúl con 40. La manera de justificar esto es lo que habitualmente se hace en los negocios, en donde el dinero se reparte de acuerdo con el *capital invertido*: quien invirtió 60%, retira el 60% de las ganancias.

Sin embargo, esto no agota las posibilidades: si yo fuera el abogado defensor de Alicia (en un juicio imaginario), le diría al juez que a ella le faltaba sólo un acierto más para llevarse *todo* el dinero. En cambio, a Raúl le hacían falta dos aciertos para quedarse con el pozo. Si uno respetara esta nueva proporción, Alicia tendría una ventaja de 2 a 1 (ya que Raúl tendría que acertar 2 de 3 para ganar). En este caso, entonces, guardando esta nueva proporción, Alicia se debería llevar el 66,67% del dinero y Raúl el 33,33%. O sea, $ 66,67 para ella y $ 33,33 para él.

Espero que esté de acuerdo conmigo en que no hay una solución única. Ni mucho menos.

Le voy a proponer otra manera de pensar el mismo problema.

Uno podría contabilizar qué pasaría si se tirara la moneda una sola vez más. En ese caso, los dos posibles resultados son:

a) 4 a 2 para Alicia (y se lleva todo), o bien,
b) un empate, 3 a 3.

[24] Este problema fue discutido por Pascal y Fermat en un intercambio de cartas hace más de tres siglos (recuerden que no había Internet hace 350 años). Ambos fueron dos de los pioneros creadores de lo que se conoce con el nombre de Teoría de probabilidades, y la situación planteada sobre la *división justa* es uno de los *clásicos*.

En consecuencia, en este caso Alicia tendría que llevarse el 75% del pozo. ¿De dónde sale este número? Esto surge como *promedio* entre el 100% (si gana en la primera tirada) y del 50% que tendría si la pierde. De ahí el 75%.

Con este análisis, a Alicia le correspondería el 75% del pozo (50% de entrada más el otro 25%) y a Raúl, sólo el 25%. O sea, la división en este caso representa una proporción de 3 a 1.[25]

Resumiendo, frente a un resultado de 3 a 2 en favor de Alicia, hemos visto cuatro posibles instancias:

a) Repartir el dinero en partes iguales, como si el juego no hubiera existido.
b) Dividir 60% para Alicia y 40% para Raúl.
c) Darle el 66,67% a Alicia, y el 33,33% a Raúl.
d) Darle el 75% a Alicia y el 25% a Raúl.

¿Qué enseña esto? Es obvio que a uno le gustaría que las veces en las que uno tiene que optar en la vida cotidiana, las situaciones fueran siempre *binarias*. Es decir, cuando una de las opciones es la que está *"mal"* y la otra, la que está *"bien"*. "Blanco" o "negro". "Correcto" o "incorrecto". Sí, todo funcionaría bárbaro: sólo tendría que tener la suerte de elegir la opción adecuada cada vez.

Sin embargo, no es así. Las alternativas que planteé más arriba sirven para *modelizar* situaciones reales. *Lo mejor no* es hacer de cuenta que no hubo juego, porque lo hubo. Tampoco es justo dividir por la mitad, porque Alicia iba adelante y no quiere *perder* esa condición. Pero, decidir cuán adelante iba, defender sus intereses, sin afectar los de Raúl, no es tarea sencilla, y requiere de acuerdos y compromisos. En definitiva, de eso se trata la vida: de constantes elecciones que uno

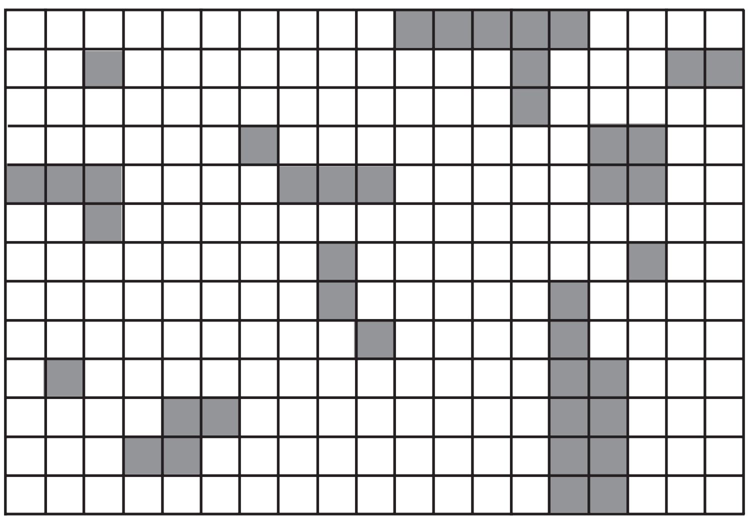
[25] Usando el análisis de qué es lo que sucedería tirando la moneda sólo una vez más, ¿qué pasaría si en lugar de ir 3 a 2, el juego estuviera 3 a 1 en favor de Alicia? ¿Qué hacer entonces? En ese caso, los resultados posibles son los siguientes: 4 a 1 si gana Alicia en la tirada de la moneda, o se vuelve a la situación 3 a 2, si la pierde. En la primera situación, es un 100% del pozo. En la segunda (de acuerdo con lo que vimos más arriba), es 75%. Si uno saca el promedio de las dos, a Alicia le corresponde el 87,5% del dinero.

quisiera tomar en la forma más *racional* y *educada* posible. La matemática suele ayudar.

Juego de la vida

Lo que sigue es un juego espectacular. Se llama Juego de la vida. En realidad, lo interesante de este juego es que uno participa *una sola vez,* y eso sucede al principio. Luego, el juego se *juega solo.* Me explico: suponga que tiene un tablero de ajedrez, pero no de 8 casillas de lado, sino tan grande como para que no se termine nunca, vaya para donde vaya.

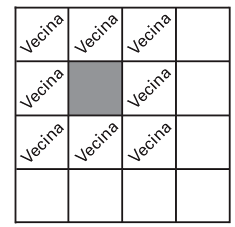
Cada casilla puede estar vacía o contener una "célula" viva o activa (el equivalente de una ficha en el juego de damas, por ejemplo).



Como se ve, los casilleros que aparecen en color *negro* son los que están ocupados por una "célula" o una ficha. Los blancos son los que

están vacíos (o también se puede interpretar como que hay una célula muerta). Usted empieza con el número de fichas que quiera. Como el tablero es tan grande, si quiere distribuirlas todas, no habrá problemas de lugar.

Una vez que las fichas están distribuidas, se pone en marcha el proceso. Como se ve, cada "casillero" tiene alrededor *ocho* vecinos (como si fuera al norte, sur, este, oeste, nordeste, noroeste, sudeste y sudoeste).



El juego continúa así:

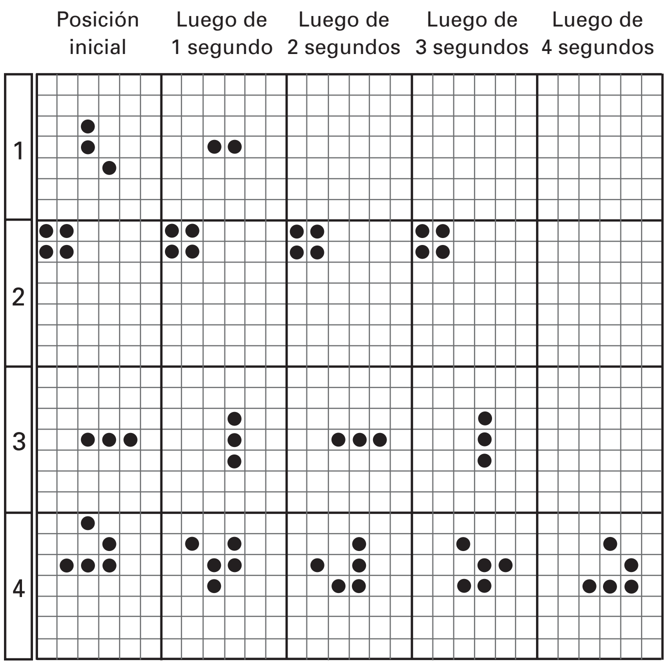
a) Si una célula tiene *exactamente dos o tres* células alrededor, sobrevive para el próximo paso.
b) Si una célula tiene *una o ninguna célula a su alrededor*, se muere (por aislamiento).
c) Si una célula tiene *cuatro o más* células alrededor, *también se muere,* pero por una *superpoblación de células: no alcanzaría la comida.*
d) Si hay una casilla *vacía,* que tiene *exactamente tres células* alrededor, entonces se produce un *nacimiento* en el próximo paso.
e) Por último, las células nacen, permanecen o desaparecen *todas al unísono* al cambiar de un estado a otro.

Como se ve, las reglas son realmente muy sencillas. Todo lo que uno tiene que hacer es establecer con cuántas fichas va a jugar y cómo las va a distribuir. Una vez hecho esto, uno ha establecido una configuración inicial. A partir de ahí, el juego *se juega solo.* Por ejem-

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

plo, supongamos que con cada segundo cambia el estado y se modifica la posición inicial.

Veamos algunos ejemplos.



1) Se mueren.

2) Se estabiliza en el cuadrado.

3) Cíclico (vuelve a la posición original cada dos segundos).

4) Esta "bajó" un escalón en cuatro segundos.

Así seguirá siempre.

Como escribí al principio, su participación en el juego *sólo* consistirá en elegir el número de fichas que va a usar y cómo las va a distribuir en el tablero. Una vez que ya eligió qué disposición va a dar

a las fichas, su participación terminó. Todo lo que resta es observar cómo *evoluciona el tablero* a medida que corre el reloj. De hecho, podríamos pensarlo como un *modelo de sociedad,* en donde uno distribuye un número de personas en una comunidad, y ve cómo evoluciona (naturalmente, con las reglas *artificiales y discrecionales* que pusimos más arriba).

Este juego fue diseñado en 1970 por un matemático inglés muy famoso, John Conway. Uno podría pensar la configuración inicial como la *primera generación* del sistema. Cada segundo (por poner un ejemplo), el sistema *evoluciona o cambia,* siguiendo las reglas establecidas más arriba, produciéndose muertes y nacimientos simultáneamente. Este juego puso a Conway en un lugar privilegiado y se difundió en el mundo gracias a las columnas de Martin Gardner, uno de los pioneros en la difusión de la ciencia.

Lo invito a pensar en los siguientes problemas:

a) ¿Puede encontrar alguna configuración inicial que *no cambie* con el paso del tiempo, que permanezca *estática*? (Claro, diferente del modelo que puse más arriba.) (Las que existen se llaman *vidas quietas.*)

b) ¿Se puede encontrar una configuración que evolucione en forma cíclica? Es decir, que empiece de una forma, vaya pasando por diferentes estados, y vuelva a la posición original. (También distinta del caso que figura más arriba.)

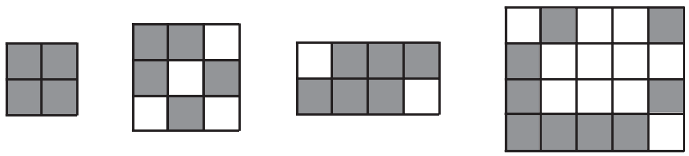
c) ¿Es posible encontrar maneras de empezar, de manera tal que *no* se vuelvan simétricas a medida que pasa el tiempo? (Simétrico, en este contexto, quiere decir que si uno *rota* el resultado, obtiene la misma configuración.)

d) ¿Es capaz de encontrar una configuración que *no tenga un padre*? Es decir, ¿puede encontrar un estado que *no* pueda provenir de ningún otro?

e) ¿Se pueden encontrar estados que se vayan *deslizando* por el tablero a medida que avanza el tiempo?

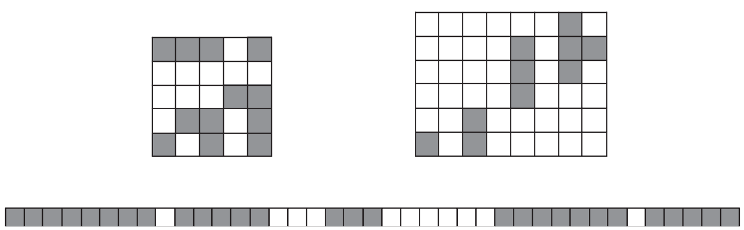
f) ¿Y configuraciones que se extingan? Es decir, cuando, en un número finito de pasos, *todas las células se mueren.* (Una vez más, diferente del ejemplo que puse más arriba.)

A continuación, le presento algunos ejemplos de configuraciones iniciales, para entretenerse siguiendo su evolución. Con todo, lo interesante es que usted empiece solo/a, con una posición inicial propia, y continúe su recorrido para ver qué destino tiene.



En el juego original, Conway ofrecía un premio de 50 dólares a quien propusiera patrones iniciales que *crecieran indefinidamente*. Él sospechaba que no existían y, como no podía demostrarlo, decidió poner a prueba su hipótesis con la gente. No tardaron mucho en contradecirlo. Un mes después, noviembre de 1970, un equipo del MIT (Instituto de Tecnología de Massachusetts), liderado por Bill Gosper, encontró no uno, sino varios ejemplos de lo que el propio Conway no había podido descubrir.

En la figura que sigue, se ven tres configuraciones que *crecen indefinidamente*, que si bien no son las que originariamente encontraron Gosper y sus discípulos, ponen en evidencia (una vez más) que lo que uno no logra quizá muchos otros sí, y eso no va en detrimento de nadie.[26]



[26] En http://www.math.com/students/wonders/life/life.html hay una manera de poder probar configuraciones en forma interactiva. A aquellos a quienes les interese, les sugiero que prueben allí. Obviamente, hay muchísimas páginas en Internet dedicadas al "juego de la vida". Yo propongo sólo una de ellas.

El Juego de la vida es sólo un ejemplo de los denominados "autómatas celulares", es decir, un sistema que sigue ciertas reglas que se especifican de antemano y que evoluciona por sí mismo.

La investigación en este campo de la matemática ha sido muy intensa en los últimos años, sobre todo porque sirven para "modelar" o "simular" sistemas de la vida real. El Juego de la vida es uno de los más sencillos.

Transitividad y los tres dados de colores

Supongamos que dos amigos suyos vienen a pasar un domingo con ganas de jugar a los dados. No bien llegan, le dicen que traen dados que son diferentes de los comunes. En principio, no son blancos, sino que tienen cada uno un color diferente: rojo, azul y verde. Además presentan otra particularidad: no tienen los números del 1 al 6 como los dados convencionales, sino que se han distribuido entre ellos los primeros 18 números... ... de una forma "no convencional".

Es decir, cada uno tiene en sus caras los siguientes números:

Dado Rojo:	5	7	8	9	10	18
Dado Azul:	2	3	4	15	16	17
Dado Verde:	1	6	11	12	13	14

¿Se entiende? Por ejemplo, si uno tiene el dado azul, y lo hace rodar, los resultados posibles son: 2, 3, 4, 15, 16 o 17.

Cada persona elige un dado, y el juego consiste en lo siguiente: cuando un competidor enfrenta a un rival, cada uno hace rodar su dado y el que saca el número más grande, gana. Si lo dejaran elegir primero, ¿qué dado eligiría?

Estudie un rato las *caras* de cada dado, y *elija* el que crea le va a dar más posibilidades de ganar.

Lo interesante de este ejemplo es que no hay un dado que garantice siempre el triunfo.

Si uno realiza una tablita con todos los resultados posibles entre todos los posibles *pares de dados,* se obtiene este resultado:

rojo	5	7	8	9	10	18
azul	2	3	4	15	16	17
verde	1	6	11	12	13	14
rojo *vs* azul	5	7	8	9	10	18
2	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo
3	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo
4	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo
15	azul	azul	azul	azul	azul	rojo
16	azul	azul	azul	azul	azul	rojo
17	azul	azul	azul	azul	azul	rojo
En este caso, el rojo gana 21 veces y el azul gana 15 Rojo > Azul						
rojo *vs* verde	5	7	8	9	10	18
1	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo
6	verde	rojo	rojo	rojo	rojo	rojo
11	verde	verde	verde	verde	verde	rojo
12	verde	verde	verde	verde	verde	rojo
13	verde	verde	verde	verde	verde	rojo
14	verde	verde	verde	verde	verde	rojo
En este caso, el verde gana 21 veces y el rojo gana 15 veces Verde > Rojo						
azul *vs* verde	2	3	4	15	16	17
1	azul	azul	azul	azul	azul	azul
6	verde	verde	verde	azul	azul	azul
11	verde	verde	verde	azul	azul	azul
12	verde	verde	verde	azul	azul	azul
13	verde	verde	verde	azul	azul	azul
14	verde	verde	verde	azul	azul	azul

En este caso, el azul gana 21 veces y el verde gana 15 veces
Azul > Verde

Resumo acá los resultados:

El rojo le gana al azul 21 veces sobre 36 posibles.

El verde le gana al rojo también 21 veces sobre 36.

Y finalmente, el azul le gana al verde también 21 sobre 36.

Si usamos de la notación > cuando un dado gana más veces que otro, se tiene esta distribución:

Rojo	>	Azul
Verde	>	Rojo
Azul	>	Verde

¿Qué es lo que llama la atención? Lo sorprendente es que, si bien el rojo le gana al azul, y el azul le gana al verde, cuando compiten el rojo y el verde, no gana el que uno intuye que debe ganar (que en este caso sería el rojo), sino que gana el verde. Esto es lo raro. Inadvertidamente, por lo general uno hace fuerza para que se cumpla una ley o propiedad que siente que se está violando en este caso: la *transitividad*.

Le propongo un par de ejemplos para pensar. Reflexionemos juntos para ver si podemos *descubrir un patrón***.** Es decir, algo que se repita o que los ejemplos tengan en común.

EJEMPLO 1

Si A es hermano de B y B es hermano de C, ¿se puede concluir que A y C son hermanos?

EJEMPLO 2

Si la calle Rivadavia es paralela a la calle Corrientes y la calle Corrientes es paralela a Córdoba, ¿se puede concluir que Rivadavia y Córdoba son paralelas?

EJEMPLO 3

Si el número *a* es *mayor* que el número *b,* y el número *b* es *mayor* que el número *c,* ¿se puede concluir que el número *a es mayor que el número c?*

Usando los símbolos que aporta la matemática, uno escribiría el Ejemplo 3, así:

$$\text{si } a > b$$

y

$$\text{si } b > c$$

¿se puede concluir que

$$a > c\ ?$$

EJEMPLO 4

Si el señor A *es el padre* del joven B, y si el joven B (no tan joven) es el *padre* del (más) joven (aún) C, ¿se puede concluir que A es el padre de C?

(Voy a escribir un par de ejemplos más, pero estoy seguro de que ya se ha dado cuenta hacia dónde voy.)

EJEMPLO 5

Si la avenida Corrientes es perpendicular a la avenida 9 de Julio y la avenida 9 de Julio es perpendicular a la avenida Santa Fe, ¿se puede concluir entonces que las avenidas Corrientes y Santa Fe son perpendiculares?

EJEMPLO 6

Si el equipo de fútbol A ganó los diez partidos que jugó en los últimos cinco años contra el equipo B, y a su vez, el equipo B ganó los diez partidos que jugó en el mismo período al equipo C, ¿se puede concluir que, en esos mismos cinco años, el equipo A le ganó los partidos al equipo C?

Bueno, aquí paro. Creo que ya advirtió que hay algunos *patrones* en todos estos ejemplos.

En cada ejemplo, hay involucrada una *relación.*

En el primero, la relación es: *"ser hermano de"* .
En el segundo, la relación es: *"ser paralela a".*
En el tercero, *"ser mayor que".*
En el cuarto, *"ser padre de".*
En el quinto, *"ser perpendicular a".*
Y en el último, *"haberle ganado durante cinco años todos los partidos a".*

En todos los ejemplos, uno *compara* y *trata de sacar conclusiones.*

Como habrá notado, las respuestas son variadas.

En los casos 1, 2 y 3, uno concluye que *sí,* que se puede afirmar lo que se pregunta al final. Es decir, los hermanos *trasladan* esa condición, las calles *paralelas* también, y lo mismo ocurre con los números que son *mayores* que otros.

En el caso 4, no. Claramente es falso que si A es padre de B, y B es padre de C, A *puede ser el padre de C.*

En el caso 5, tampoco. De hecho, la avenida Corrientes resulta *paralela* a la avenida Santa Fe y no perpendicular a ella, aunque ambas sean *perpendiculares* a la avenida 9 de Julio.

Y en el caso 6, ni hablar. Que un equipo le gane o le hubiera ganado muchos partidos a otro, y éste hubiera hecho lo mismo con un tercero, *no permite sacar ninguna conclusión entre el primero y el tercero.*

Cuando una propiedad se *traslada* de esta forma, se la llama *transitiva*. Ser "hermano de", "paralelo a" o "mayor que" son relaciones *transitivas.*

MORALEJA FINAL: el ejemplo de los dados de tres colores diferentes muestra cómo uno, en la vida cotidiana, *quiere* que las relaciones sean transitivas, pero esto, como se ve en los casos que expuse más arriba, no necesariamente es cierto, por más fuerza que uno haga.

Y si no, confronte el ejemplo 6 y dígame: ¿no querría que esa relación en particular *fuera la más transitiva de todas?*

¿Cómo adivinar un número?

¿No sería increíble que una persona pudiera *leer* el pensamiento? ¿Estaremos cerca de que eso suceda, o no pasará nunca? Supongamos que le propongo que piense un número y le digo que luego de hacerle algunas preguntas *lo voy a adivinar.* Hay muchísimos de estos "acertijos" dando vueltas. ¿En dónde radica la gracia, entonces? Me parece que el valor de este tipo de problemas reside en el desafío que nos presenta el tratar de descubrir por qué funciona.

Estoy seguro de que nadie cree que quien lo practica tenga la facultad de leer las mentes de los otros. Si así fuera, esa persona estaría haciendo otras cosas en lugar de adivinar números que piensan los amigos. Pero, como decía antes, la gracia de lo que sigue es *descubrir el porqué.*

1) Pídale a alguien que piense un número (por ejemplo, digamos que la otra persona pensó el número 11).
2) Dígale que lo multiplique por 3 y que no le diga el resultado (en este caso, la respuesta será 33).
3) Pídale que le diga si el número que obtuvo es par o impar (en el caso que nos ocupa, es impar).
4) Dígale que lo divida por 2 si es par, y si es impar que le sume 1 y que lo divida por 2. (En nuestro caso, al sumarle 1 se obtiene 34 y al dividirlo por 2, el resultado es 17.)
5) Ahora, dígale que lo multiplique por 3 (en nuestro caso, el resultado es 51).
6) Al número que obtuvo, que lo divida por 9, sin importar el resto. (En nuestro ejemplo, al dividir 51 por 9, se tiene 5, ya que 5 x 9 = 45, y sobran 6, pero no importa. Luego, la respuesta, en este caso, será 5.)
7) Una vez que le den el resultado, si en el paso 3 la respuesta fue par, entonces usted lo multiplica por 2 y el resultado es el número que la persona había pensado originalmente. Si en el paso 3 la respuesta fue impar, multiplíquelo por 2 y súmele 1. (En nuestro ejemplo, como la respuesta había sido

impar, hay que multiplicar el número 5 por 2 y luego sumarle 1. Luego, la respuesta es 11, que es el número que habíamos elegido al principio. Es decir, el sistema, al menos en este ejemplo, ¡funciona!)

Ahora bien, ¿por qué funciona?

Voy a escribir la solución más abajo, pero lo interesante de este problema es *descubrir uno mismo* la solución o, si lo prefiere, al menos intentarlo.

Elijamos juntos un número cualquiera. Aunque no esté con usted, verá cómo funcionamos en equipo. El número que elija será o bien par o bien impar. Si es *par*, se podrá escribir de la forma 2 x A. En cambio, si es *impar* se escribirá de la forma 2 x A + 1.

Por ejemplo, si el número que usted y yo elegimos fuera el 18, entonces

$18 = 2 \cdot 9$ (o sea, en este caso, el número A = 9)

En cambio, si eligiéramos el 27, entonces

$27 = 2 \cdot 13 + 1$ (y en este caso el número A = 13)

Miremos primero qué pasa si el número que elegimos es *par.* Cuando lo multiplicamos por 3, se obtiene

$$3 \cdot (2 \cdot A) = 6 \cdot A$$

Luego hay que dividirlo por 2, y se tiene

$$3 \cdot A$$

Después, hay que multiplicarlo por 3 otra vez, y se obtiene:

$$9 \cdot A$$

Cuando lo divide por 9, se tiene el número A. Por lo tanto, cuando nuestro interlocutor nos pide que le digamos el número al que llegamos, le decimos: "Llegamos al número A". Como en el paso 3 le habíamos dicho *par,* entonces él (o ella) lo multiplica por 2 y nos dice: "El número que habían elegido era 2 x A", ¡que es la respuesta correcta!

Por otro lado, si empezamos en número *impar,* tiene que ser de la forma (2 x A + 1).

Así, cuando nos piden que lo multipliquemos por 3, queda:

$$3 \cdot (2 \cdot A + 1) = 6 \cdot A + 3$$ (¿me sigue con esta cuenta?)

Y acá es cuando nos preguntan si es *par* o *impar.* Bueno, este número tiene que ser impar, porque 6 x A es par seguro (porque es múltiplo de 6), y al sumarle 3 lo transformamos en número impar. Seguimos. Nos piden ahora que le sumemos 1 y luego lo dividamos por 2. Con lo cual se tiene

$6 \cdot A + 4$, y después, lo dividimos por 2:
$3 \cdot A + 2$

A este resultado, nos piden que lo multipliquemos por 3 otra vez.

$$3 \cdot (3 \cdot A + 2) = 9 \cdot A + 6$$

Luego, cuando nos dicen que lo dividamos por 9, va a resultar el número A otra vez (porque descartamos el resto, que en este caso es 6).

Y ahora, cuando nos piden que digamos el número al que arribamos, decimos: "Llegamos al número A". Nuestro interlocutor sabe lo que tiene que hacer: lo multiplica por 2 y le suma 1. O sea, 2 x A + 1, y llega justo al número con el que habíamos empezado.

No es magia ni nadie adivina nada. Sólo un par de razonamientos encadenados que permiten llegar a la conclusión acertada.

Ternas consecutivas en una ruleta

Supongamos que va a un casino mientras está cerrado, y advierte que hay una ruleta en preparación. Están todos los elementos, pero falta distribuir los números. Para mayor comodidad, vamos a suponer que esta ruleta es especial: no tiene un lugar para ubicar al número cero.

Van a dejar que usted distribuya los números del 1 al 36, de la forma que quiera. Pero un señor le pregunta antes de que lo haga: ¿es posible hacer una distribución de manera tal que no haya tres números seguidos cuya suma sea 55 o más?

Esta pregunta lo deja perplejo, porque usted iba a distribuir los números sin ninguna restricción, dejándose llevar por su instinto y gusto, y ahora le complicaron la vida. ¿Se puede? Digo, ¿se pueden distribuir los números del 1 al 36 en una ruleta de manera tal que nunca haya tres consecutivos que sumen 55 o más?

Como siempre, lo más entretenido es pensar uno mismo. En este caso, el planteo presenta dos problemas en uno:

a) Decidir si es posible o no (distribuir los números sin que haya tres consecutivos que sumen 55 o más).
b) Si existe esa distribución, exhibirla. Pero, si cree que no es posible, tendrá que demostrarlo. No sólo que usted no pudo, sino que jamás habrá una persona que pueda hacerlo. Y habrá que dar algún argumento que convenza a cualquiera que intente hacerlo, que no vale la pena que pruebe, porque va a fallar (inexorablemente).

Ahora, lo dejo en compañía de usted mismo (lo mejor que le podría pasar).

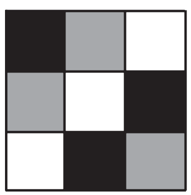
La demostración la encontrará en el anexo con las soluciones.

Tripos[27]

Éste es un juego que invita a pensar estrategias para ganar. Se aprende y se juega fácil, pero para ganar… hay que pensar. Parto de la base de que todo el mundo sabe jugar al Ta-te-ti. Tripos es una variación del Ta-te-ti, presentada por ese espectacular personaje que es Martin Gardner. ¿Cuál es el problema básico con el Ta-te-ti? Que se transforma en un juego aburrido, porque uno encuentra la estrategia ganadora muy rápidamente. Más aún: el que comienza el juego tiene tanta ventaja que arruina el deseo de jugar que podría tener el segundo competidor; nadie quiere jugar sabiendo que no puede ganar. Es decir, a lo más que puede aspirar el segundo jugador es a no perder.

De hecho, no hay una estrategia ganadora para el primer competidor, sencillamente porque si el segundo participante sabe qué hacer (aunque el primero ocupe el cuadrado del centro), el empate está garantizado.

El Tripos consiste de un dibujo de 3 x 3 (como el Ta-te-ti), con una diferencia: cada uno de los nueve cuadraditos tiene un color. En total, hay tres colores y la distribución es la siguiente (en este caso lo mostraremos con gamas de blanco, negro y gris):



Participan dos jugadores. Uno usa cruces y el otro, círculos. Se alternan los turnos para jugar. Cada uno elige un cuadradito libre para

[27] Para quienes son aficionados a este tipo de juegos, *tripos* es también conocido con el nombre de "Pappu's Mousetrap", o lo que sería su equivalente "La trampa para ratones de Pappu".

ubicar su símbolo (una cruz o un círculo). El juego termina cuando uno de los jugadores completa (como en el Ta-te-ti) una columna o una fila, pero también cuando ubica sus cruces o círculos en lo que llamo una diagonal ampliada (o sea, tres que tengan el mismo color).

Como decía más arriba, si bien Tripos es similar al Ta-te-ti, tiene algunas diferencias esenciales:

a) No hay una casilla privilegiada, como la del medio en el Ta-te-ti.
b) En Tripos cada cuadradito aparece en una sola fila, una sola columna y en una sola diagonal ampliada (o sea, en una diagonal del mismo color).

Por otro lado, uno de los detalles que el Ta-te-ti no contempla es que quien comienza tiene cinco casillas para elegir, mientras que quien juega segundo, tiene sólo cuatro. En Tripos, en cambio, es así: como regla del juego se establece que cada jugador ubica cuatro cruces o círculos, no más. Pero si el que juega primero no puede ganar en cuatro movidas, entonces gana el segundo jugador. Ésta es otra diferencia importante: en Tripos ¡no hay empate!

Estrategia ganadora para el Tripos

Antes de escribirla, una sugerencia importante: juege usted. Intente buscar cómo jugar, cómo ganar, tropiece con los problemas, gane, pierda, piense. No tiene sentido (creo) que avance en la lectura sólo para aprender que *hay una manera de ganar.* Eso se lo digo yo de antemano. El valor está en que sea usted quien pueda encontrar las dificultades y de esa forma podrá disfrutar, no sólo de encontrar la estrategia ganadora, sino que, aunque no la descubriera, va a poder valorar aún más que ésta exista.

Ahora sí, aquí hay una manera de hacerlo. Empiezo por numerar los cuadraditos. La numeración que elegí es arbitraria. Usted puede elegir la que quiera.

5	7	6
9	8	4
1	2	3

Fíjese ahora lo que sucede. Cada cuadradito está relacionado con muchos otros, aunque no con todos. Cuando digo relacionado entiendo que forma parte de una columna, o fila o diagonal ampliada.

Por ejemplo: el cuadradito con el número 1 está relacionado con el 9 y el 5 porque forman parte de la misma columna, con el 2 y el 3 porque forman parte de la misma fila, y con el 8 y el 6 porque forman parte de lo que dimos en llamar diagonal ampliada. Sin embargo, el número 1 no está relacionado ni con el 4 ni con el 7.

Lo voy a anotar así:

(1, 4, 7)

De la misma forma, lo invito a que, antes de seguir leyendo, descubra usted las otras dos ternas de números que no están conectados.

Acá van:

(2, 6, 9)
(3, 5, 8)

O sea, se tienen estas tres ternas de cuadraditos no conectados.

Ahora, quiero que me siga en el siguiente razonamiento, porque voy a describir una estrategia ganadora para el jugador que empieza primero.

Lo invito antes a que juegue al Tripos muchas veces, para poder familiarizarse con los problemas que presenta y aprender a pensar uno mismo qué hacer ante determinadas situaciones. Una vez que recorrió

ese camino, lea la estrategia que sirve para garantizar que, si la usa quien juega primero, ganará siempre.

Para fijar las ideas, supongamos que usted empieza primero y que pone una cruz en el casillero que figura con el número 1. Acá empiezan las posibles alternativas para el segundo jugador. Uno podría decir (si es que juega segundo):

a) Me conviene jugar en un cuadradito que no esté conectado con el 1.
b) Me conviene poner un círculo en un cuadradito que sí esté conectado con el 1.

Empecemos analizando la posibilidad a). ¿Por qué le convendría al segundo jugador ubicar su círculo en un cuadradito que *no* esté conectado con el 1? Porque quiere tener la libertad de elegir jugar activamente y no en forma defensiva. Es decir: ¿para qué competir en tratar de llegar a una columna, o una fila o una diagonal ampliada que ya tiene un cuadradito ocupado? Con esta idea, supongamos que el segundo jugador elige el número 4 (podría elegir el 7 y sería igual).

En este caso, el primer jugador elige el otro integrante de esa misma terna … es decir, en este caso el 7.

En el dibujo queda así:

	X	
		O
X		

Ahora, le toca el turno al segundo jugador. Pero fíjese que éste, si quiere ganar, está obligado a ocupar ciertos cuadraditos. Si juega en el cuadradito que tiene "arriba" o "abajo", perdió.

	X	O
		O
X		

Porque ahora, el primer jugador usará la cruz para ponerla en el cuadradito que falta en la tercera columna, y ya no importa lo que haga el segundo jugador, el primero ganará siempre. (Haga usted los dibujos que faltan, para convencerse.)

De la misma forma, utilice todas las alternativas que tenga el segundo jugador para seguir, y verá que, haga lo que haga, el primer jugador gana siempre.

Ahora, analicemos la posibilidad b).

Es decir, en el caso a), el segundo jugador había optado por jugar ofensivamente, utilizando su propia estrategia, y por eso eligió el cuadradito número 4. Pero no funcionó. ¿Qué pasa si ahora elige otro cuadradito que *sí* esté relacionado con el número 1? En este caso (y le sugiero que lo verifique), el primer jugador –en su segundo movimiento– siempre tiene la opción de elegir un cuadradito que obligue al segundo jugador a elegir uno que esté en la terna de los no relacionados. Por ejemplo, supongamos que el primer jugador ocupó el cuadradito 1 y que el segundo eligió el número 5. En este caso, el primer jugador buscará los números que no están relacionados con el 5, y descubre la siguiente terna:

(3, 5, 8)

O		
X		

¿Qué cuadrado le conviene elegir, de manera de forzar al segundo jugador a que tenga que ocupar o bien el 3 o bien el 8? En este caso, la situación es la siguiente:

O		
	8	
X		3

Y le toca jugar al primero. ¿Dónde poner la cruz, para obligar al segundo jugador a tener que usar el 3 o el 8?

En este caso, usa el primero de la tercera columna, o sea, el número 6, y se tiene la siguiente situación:

O		X
X		

Y a partir de aquí, el segundo jugador perdió, porque está obligado a jugar en el cuadradito del medio, pero, de esa forma, ya tiene usados dos de sus círculos en cuadrados que no están relacionados.

O		X
	O	
X		

Ahora, el primer jugador usa su cruz para ponerla en la última columna, en la tercera fila, y ésa resulta ser la jugada final, porque el segundo jugador ya no puede tapar los dos agujeros al mismo tiempo.

O		X
	O	
X		X

Todo este sistema de estrategias tiene que ver con la matemática. Con la lógica, con la capacidad de pensar un poco más en profundidad, con conjeturar posibles alternativas que use el oponente, con situaciones que eventualmente entrenan para lo que pasará en la vida real.

No puedo decir acá (y además estaría mal si lo hiciera) que este juego se utiliza en tal o cual circunstancia de la vida real. No lo sé, pero tampoco importa. Lo que sí interesa es saber que uno se prepara para pensar y, cuantos más caminos haya recorrido, mejor preparado estará.

Nim

Hace tiempo que tengo la tentación de incluir un problema con un planteo elemental pero muy difícil de resolver. Sí, difícil. No sólo que la solución no se me ocurrió a mí (lo cual no significa nada), sino que creo que es muy difícil en general. Su atractivo radica en que es muy fácil de jugar, y muy interesante para pensar. Y si bien uno podría preguntarse: "¿Cómo puede ser que a alguien se le haya ocurrido esto?", tiene la particularidad de que la estrategia ganadora se puede aprender (después de un poco de entrenamiento) y, por lo tanto, permite ganar siempre. Si usted tiene tiempo y ganas de desafiarse, ésta es una buena oportunidad. Si no, puede pasar a la historia que sigue. Acá va.

El juego del que hablaba es uno de los más antiguos, pero no por eso menos sorprendente, que ofrece la Teoría de juegos, una de las

ramas más atractivas de la matemática. Se llama Nim[28] y las reglas para jugarlo son muy sencillas. A medida que uno adquiere experiencia, comienza a planificar estrategias para ganar. Al principio, es desconcertante, pero luego resulta elegante y seductor.

Uno empieza con un cierto número de monedas (o fósforos, o palillos o porotos) que aparecen distribuidas en diferentes filas. No hay restricciones: usted dispone con cuántas filas se va a jugar, y también hay libertad para decidir con cuántas monedas por fila.

Participan del juego dos competidores. Cada uno puede "retirar" de cada fila la cantidad de monedas que elija, incluso todas de una vez. Eso sí: sólo de una sola fila. Luego, le toca al siguiente jugador, que tiene que hacer lo mismo: retirar un número cualquiera de monedas, siempre seleccionadas de una sola de las filas. Se van alternando uno y otro, hasta que no queden más monedas.

Gana el que retira la última moneda. Es decir, gana, de los dos competidores, el último que se queda con la última (o últimas) moneda(s).

Estrategia ganadora

Antes que nada, al juego *hay que jugarlo*. Es decir: juéguelo. No una vez, sino muchas. Enfréntese con diferentes situaciones. Analice qué hacer; prevea qué podría hacer su rival. Disfrute de hacerlo. Cada situación es distinta y cada movimiento del otro jugador podrá sorprenderlo con alguna variante que no consideró.

Es más: me atrevo a decir que debería parar de leer acá, y retomar sólo cuando haya jugado mucho, o al menos cuando ya le tenga tomado el pulso al Nim. ¿Qué gracia tiene, si no, leer cómo hacer para "ganar siempre"?

Una vez que practicó muchas veces (y encontró múltiples dificultades, ganó y perdió), entonces sí, cabe preguntarse si habrá alguna estrategia ganadora. Es decir, ¿será posible encontrar alguna forma

[28] El Nim aparece en la literatura como *inventado* por C. L. Bouton, de la Universidad de Harvard, alrededor de 1901. Se supone que el nombre (Nim) tuvo su origen en la palabra alemana *nehmen* ("tomar" o "retirar"), cuya forma imperativa en singular es *nim*.

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

de jugar, para alguno de los dos participantes, de manera que quien la aplique gane siempre, más allá de lo que haga el oponente?

Por último, el hecho de que haya una estrategia ganadora no significa que sea fácil descubrirla, ni mucho menos. Más aún: en este caso, sí, la hay, pero creo que *es muy difícil* de encontrar. Por eso, lo atractivo es jugar al juego y planificar qué hacer, aunque uno no sepa o no conozca la estrategia general para ganar siempre. Por eso, lo/a invito a que disfrute del trayecto.

Lo que sigue requiere del uso de la matemática en su más pura expresión. En principio, porque hay que pensar todo el tiempo. ¿Qué pasa? Dije pensar. ¿No le resulta muy atractivo que alguien le proponga pensar para resolver un problema?

¿Se acuerda de las potencias de 2? Es decir, de los números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1.024, etc. Estos números provienen de multiplicar varias veces el número 2 (con la excepción del "1", que proviene de hacer 2^0). O sea,

$$\begin{aligned}1 &= 2^0\\ 2 &= 2^1\\ 4 &= 2^2\\ 8 &= 2^3\\ 16 &= 2^4\\ 32 &= 2^5\\ 64 &= 2^6\\ 128 &= 2^7\\ 256 &= 2^8\\ 512 &= 2^9\\ 1.024 &= 2^{10}, \text{… y así siguiendo.}\end{aligned}$$

Ahora le propongo repensar algo. Tome un número cualquiera, digamos el 27 por poner un ejemplo (pero usted elija uno por su cuenta). Trate de escribir el número que eligió (yo lo voy a hacer con el 27) como suma de los números que figuran en la lista anterior.

El número 27 se escribe así:

$$27 = 16 + 8 + 2 + 1$$

Si hubiera elegido el 151, entonces sería

$$151 = 128 + 16 + 4 + 2 + 1$$

Es decir, cualquier número natural que uno elija se puede escribir de una única forma, como suma de potencias de 2. Si usted leyó el primer volumen de *Matemática… ¿Estás ahí?*, recordará que en la explicación de las *cartas binarias* se usa el mismo argumento que acá: saber que uno puede escribir cualquier número natural de *una única forma* como *suma* de potencias de 2.

Ahora, volvemos al juego. Tome la primera fila y fíjese cuántas monedas hay. Agrúpelas (sin sacarlas del lugar) en potencias de 2.[29] Y luego, repita el procedimiento con las siguientes filas. Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1

Supongamos que uno tiene esta distribución de monedas por fila:

25
15
9
7
5
3
2
1

[29] Agruparlas en potencias de 2 significa que se fije primero cuál es la *mayor* potencia de 2 que *cabe*. Es decir, si en la fila hay 25 monedas, por ejemplo, entonces la *mayor* potencia de 2 que *entra* es 16. Luego, de las monedas que quedan (en este caso 9), la *mayor potencia de 2 que entra es 8.* Y luego, como queda 1, se terminó la distribución.

Ahora "escribimos" cada uno de estos números como suma de potencias de 2, y resulta lo siguiente:

25	16	8			1
15		8	4	2	1
9		8			1
7			4	2	1
5			4		1
3				2	1
2				2	
1					1

Es decir, lo que hice fue agrupar en cada fila todas las monedas que había, pero las separé de acuerdo con las potencias de 2. Un dato complementario (pero muy importante) es que esta manera de agruparlas es única. Es decir, cada número puede escribirse de una única manera como suma de potencias de 2 (y esto da lugar a lo que se llama la escritura binaria, que es la que usan las computadoras).

EJEMPLO 2:

51	32	16			2	1
46	32		8	4	2	
25		16	8			1
19		16			2	1
15			8	4	2	1
7				4	2	1
1						1

EJEMPLO 3:

24	16	8				
16	16					
14		8	4	2		
7			4	2	1	
1						1

Creo que con estos tres ejemplos se entiende lo que uno hace con las monedas de cada fila. Ahora, voy a explorar cada uno de ellos. Voy a contar cuántos números aparecen en cada columna (una vez agrupados en potencias de 2).

En el ejemplo 1, en la primera columna hay un número 16, en la segunda columna aparecen tres números 8. En la tercera hay tres números 4. En la cuarta, cuatro números 2, y por último, en la columna final, hay siete números 1. O sea, si escribo lo que acabo de encontrar (y agrego una fila al final), se tiene:

25	16	8			1	
15		8	4	2	1	
9		8			1	
7			4	2	1	
5			4		1	
3				2	1	
2				2		
1					1	
	1	3	3	4	7	(***)

Para confirmar las ideas que expuse recién, hago lo mismo con los dos ejemplos que faltan: 2 y 3.

EJEMPLO 2:

51	32	16			2	1	
46	32		8	4	2		
25		16	8			1	
19		16			2	1	
15			8	4	2	1	
7				4	2	1	
1						1	
	2	3	3	3	5	6	(***)

EJEMPLO 3:

24	16	8				
16	16					
14		8	4	2		
7			4	2	1	
1					1	
	2	2	2	2	2	(***)

Ahora voy a usar un par de nombres. Se dice que una posición del juego cualquiera está *balanceada* si todos los números que figuran en la última fila (la que agregué en (***)) son pares. De lo contrario, se llama *desbalanceada*. Como se ve, el ejemplo 1 provee una posición desbalanceada (ya que aparecen varios números impares en la última fila).

El ejemplo 2, provee también

51	32	16			2	1	
46	32		8	4	2		
25		16	8			1	
19		16			2	1	
15			8	4	2	1	
7				4	2	1	
1						1	
	2	3	3	3	5	6	(***)

una posición desbalanceada.

En cambio, en el ejemplo 3,

24	16	8				
16	16					
14		8	4	2		
7			4	2	1	
1					1	
	2	2	2	2	2	(***)

las columnas están todas balanceadas, porque la última fila consiste de todos números pares.

Ahora viene la parte interesante (y lo invito a que reflexione sobre lo que va a leer): si una posición está desbalanceada, entonces siempre se puede *balancear* reduciendo las monedas de una sola fila. Esto es muy importante, porque dice que si cualquiera de los dos jugadores tropieza con una posición desbalanceada, la puede balancear con un movimiento lícito.

Inicialmente, lo voy a hacer con un ejemplo de manera tal de poder aclarar las ideas. Espero que esté de acuerdo conmigo.

Supongamos que uno tiene esta distribución de monedas:

121, 83, 57, 46, 29, 17, 12, 6 y 3

Las agrupo de acuerdo con las potencias de 2 y me fijo al final si está balanceada o no.

121	64	32	16	8			1	
83	64		16			2	1	
57		32	16	8			1	
46		32		8	4	2		
29			16	8	4		1	
17			16				1	
12				8	4			
6					4	2		
3						2	1	
	2	3	5	5	4	4	6	(***)

Uno descubre que está desbalanceada (¿entiende por qué?). Es que en la última fila (***) aparecen varios números impares. Para balancearla, debe fijarse en la fila (***) cuál es la potencia de 2 más grande que aparece con un número impar. O sea, qué número de la fila (***) es impar y el que está *más* a la izquierda de todo el resto. En el ejemplo, resulta ser el 32, ya que figura tres veces.

Uno elige una fila cualquiera que contenga al número 32, digamos la cuarta fila (que sirvió para desarrollar el número 46).

Ahora voy a hacer de cuenta que esa fila, la del 46, no existe: la ignoro. Es como si empezara todo de nuevo, incluso escribiendo la nueva fila (***), ignorando el número 46.

La última fila, (***), puede que cambie en la paridad de algunos números. O sea, algunos de los que estaban pares podrán pasar a ser impares, o al revés, o quedar como estaban, pero lo seguro es que todos los potenciales cambios tienen que producirse a la derecha del 32, porque las potencias de 2 que figuran a la izquierda de 32 no las toco. (Eso sucede porque elegí el 32 como la más grande de todas las que aparecían un número impar de veces.)

Por eso, al excluir la fila del 46, entonces se ve que quedan siendo impares:

- La del 16 (aparece cinco veces).
- No la del 8, porque al excluir el 46 nos "llevamos" un 8, por lo que ahora quedan sólo cuatro.
- Queda impar la del 4 (aparecen tres números 4 al obviar el 46).
- También la del 2, por la misma razón.
- Y por último, queda un número par (seis en total) en la fila del 1.

¿Cómo hacer para balancear lo que está desbalanceado? Lo que hay que hacer es sumar:

$$16 + 4 + 2$$

(porque son las tres potencias de 2 que quedaron impares). Y esta suma resulta ser

$$22$$

Entonces, reemplazamos la fila del 46, por una de 22 (o sea, si uno está jugando el juego, tiene que restar 16), y se tiene:

121	64	32	16	8			1
83	64		16			2	1
57		32	16	8			1
22			16		4	2	
29			16	8	4		1
17			16				1
12				8	4		
6					4	2	
3						2	1
	2	2	6	4	4	4	6

Habiendo hecho esto, hemos logrado balancear la posición.

En resumen, para balancear una posición desbalanceada lo que hay que hacer es lo siguiente:

a) Fíjese cuál es la mayor potencia de 2 que está desbalanceada. Elija esa fila (si hay varias, puede elegir una cualquiera).

b) Ignore esa fila (o ese número si prefiere), y fíjese cómo queda la posición ahora. Es decir, como si ese número no hubiera existido. Uno mira cuáles son las potencias de 2 que quedan desbalanceadas habiendo excluido esa fila.

c) Luego reemplace la fila que estaba ignorando por la suma de las potencias de 2 que quedaron desbalanceadas. Con eso, uno se asegura de que todas las potencias de 2 quedan balanceadas y, por lo tanto, la posición final es balanceada.

Esto acaba de demostrar que toda posición desbalanceada se puede balancear con sólo modificar una fila, lo que significa que uno lo puede lograr haciendo un movimiento lícito.

En el ejemplo 2:

51	32	16			2	1
46	32		8	4	2	
25		16	8			1
19		16			2	1
15			8	4	2	1
7				4	2	1
1						1
	2	3	3	3	5	6 (***)

Me fijo en la mayor potencia de 2 de la fila (***) que es impar. En este caso, resulta ser la columna del 16, ya que hay tres números 16. Elijo una fila cualquiera que contenga al 16. Por ejemplo, la del 19. Me fijo en lo que queda, excluyendo la fila del 19.

51	32	16			2	1
46	32		8	4	2	
27		16	8			1
~~19~~		~~16~~			~~2~~	~~1~~
15			8	4	2	1
7				4	2	1
1						1
	2	2	3	3	4	5 (***)

Ahora, las potencias de 2 que resultan impares son la del 8, la del 4 y la del 1.

Los sumo y queda:

$$8 + 4 + 1 = 13$$

Lo que tengo que hacer ahora es reemplazar la fila del 19 (que estaba ignorando hasta ahora) y poner 13. Es decir, en la práctica, si estuviera jugando al Nim con alguna otra persona, tengo que retirar cuatro monedas de la fila del 19. En ese caso, se tiene la siguiente situación:

51	32	16			2	1
46	32		8	4	2	
27		16	8			1
13			8	4		1
15			8	4	2	1
7				4	2	1
1						1
	2	2	4	4	4	6 (***)

Luego, la fila (***) quedó con todos números pares y, por lo tanto, hemos balanceado la posición. Esto significa que uno, haciendo movimientos lícitos, balancea cualquier posición desbalanceada.

Ahora, al revés. ¿Qué sucede si una posición ya está balanceada? Entonces, lo que quiero hacer es convencerla/o de que cualquier cosa que haga la va a desbalancear.

Esto hay que interpretarlo así: si la posición es balanceada, significa que todas las potencias de 2 que aparecen en todas las filas son necesarias, para que al final en la fila (***) queden todos números pares. Al quitar cualquier moneda, uno desbalancea la posición.

Justamente, si uno empieza con una fila cualquiera, al tocar cualquier moneda, hace desaparecer una (o más) potencias de 2, que eran necesarias para mantener la posición balanceada. Podrían incluso aparecer otras potencias de 2, pero también desbalancearían la posición, porque todo lo que hay en el resto no se modifica.

Es decir, al alterar cualquier fila, inexorablemente se desbalancea la posición. Antes de seguir avanzando, convénzase que entendió esta última idea. La repito: si una posición está *balanceada, cualquier moneda que uno quite de cualquier fila, la desbalancea.*

Ahora sí, la estrategia ganadora. Lo importante de lo que aprendimos recién es que, si uno encuentra una posición desbalanceada, la puede balancear con movimientos legales. A su vez, si a uno le toca jugar con una posición que ya está balanceada, no puede evitar desbalancearla.

Teniendo esto en cuenta, cuando el juego se termine, o sea, cuando uno de los competidores se quede con la última moneda (o las últimas, si es que quedaron más en una sola fila), esa posición (cuando ya no quedan monedas) estará balanceada. En consecuencia, el último jugador encontró en el último tramo una posición desbalanceada… y la balanceó (para terminar ganando).

Es decir que, jugando como expliqué más arriba, un jugador balancea y al siguiente jugador no le queda más remedio que desbalancear. Lamentablemente, el jugador que desbalancea cada vez que juega, va a perder (por supuesto, si los dos saben jugar al Nim). Por eso, si uno quiere ganar siempre, tienen que pasar las siguientes cosas:

a) Si la posición inicial está desbalanceada, el que empieza, gana.
b) Si la posición inicial está balanceada, el que empieza, pierde.

Por supuesto, todo esto requiere de que ambos jugadores sepan usar esta estrategia. Si no, si uno juega libremente, sin estar sujeto a ninguna elaboración, puede o bien ganar o bien perder independientemente de que las posiciones estén balanceadas o no.

MORALEJA: uno puede jugar al Nim, y hacerlo *muy bien* sin necesidad de saber *nada* de lo que está expuesto más arriba.

Sin embargo, la idea de cómo hacer para ganar *siempre* es algo que se conoce hace muchos años y aparece profusamente en la literatura que habla del Nim.

Como habrá detectado ya, es una estrategia *no trivial*, y es muy poco probable que a uno se le ocurra.

Por eso, lo invito a que no se desespere si al leer este segmento pensó que ni siquiera los juegos son para usted. No. Los juegos son para *todos,* para entrenar la mente y para pensar. Y quién sabe, si se dedicara muchas horas a pensar en el Nim, tal vez se le hubiera ocurrido cómo hacer para ganar.

Reflexiones y curiosidades matemáticas

Los matemáticos y las vacas

En el primer tomo de esta serie mencioné alguna manera de describir a un matemático. Aquí les propongo otra.

En un tren viajaban tres personas: un economista, un lógico y un matemático.

Recién habían cruzado la frontera que separa a, digamos, Francia y España. En ese momento, desde una de las ventanas del tren, ven una vaca marrón. La vaca está comiendo pasto en forma paralela al tren. El economista dice: “Miren… las vacas en España son marrones”. El lógico replica: “No. Las vacas en España tienen al menos un lado que es marrón”. El matemático interviene confiado y dice con autoridad: “No. Hay al menos una vaca en España, uno de cuyos lados parece ser marrón”.

Más allá de que esto parezca una broma, tiene un ángulo interesante para analizar. En rigor, en función de los datos que ellos tenían, de las tres conclusiones que sacaron, la única que se puede sostener es la del matemático. Las otras dos parecen ciertas también, claro, pero se apoyan en que nosotros sabemos algunas cosas más sobre las vacas, y esa información la querríamos usar si estuviéramos en el tren.

Por eso, la anécdota, que parece trivial y divertida, tiene un costado que invita a pensar. Espero que usted lo haya hecho conmigo.

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Niñas en la playa[30]

Aquí se trata de otra manera de ilustrar cómo funciona nuestro cerebro. La flexibilidad y plasticidad que tenemos (y que no sé si usamos apropiadamente) es en verdad asombrosa.

Lea el texto que sigue. Al principio le va a resultar incomprensible. Cuando termine de leerlo (seguro que más de una vez) casi seguro se habrá sorprendido, más que nada porque en el camino uno descubre que tiene capacidades que no conocía. Acompáñeme.

C13R70 D14 D3 V3R4N0 35748B4 3N L4 PL4Y4 0853RV4ND0 D05 CH1C45 8R1NC4ND0 3N L4 4R3N4, 357484N 7R484J4ND0 MUCH0, C0N57RUY3ND0 UN C4571LL0 D3 4R3N4 C0N 70RR35, P454D1Z05 0CUL705 Y PU3N735. CU4ND0 357484N 4C484ND0 V1N0 UN4 OL4 9U3 D357RUY0 70D0 R3DUC13ND0 3L C4571LL0 4 UN MON70N D3 4R3N4 Y 35PUM4. P3N53 9U3 D35PU35 DE 74N70 35FU3RZ0 L45 CH1C45 C0M3NZ4R14N 4 L10R4R, P3R0 3N VEZ D3 350, CORR13R0N P0R L4 P14YR R13ND0 Y JU64ND0 Y COM3NZ4R0N 4 C0N574U14 O740 C4571LL0.

C0MPR3ND1 9U3 H4814 4PR3ND1D0 UN4 6R4N L3CC10N; 64574M05 MUCH0 713MP0 D3 NU357R4 V1D4 C0N57RUY3ND0 4L6UN4 C054 P3R0 CU4ND0 M45 74RD3 UN4 0L4 LL364 4 D357RU14 70D0, S0L0 P3RM4N3C3 L4 4M1574D, 3L 4M0R Y 3L C4R1Ñ0, Y L45 M4N05 D3 49U3LL05 9U3 50N C4P4C35 D3 H4C3RN05 50NR31R.

S4LUD05 Y 83505

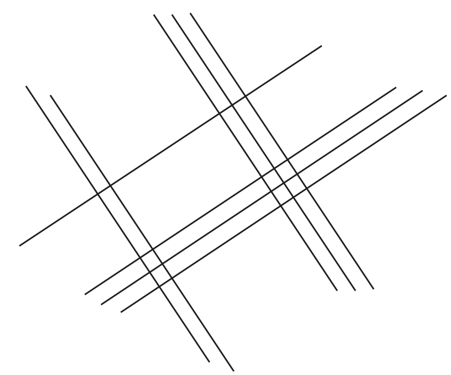
[30] Este texto me llegó por dos vías diferentes. Una, por parte de Patricia Battistoni, licenciada en Ciencias Biológicas y periodista científica, y por otro lado, me lo acercó también Alicia Dickenstein, doctora en Matemática y amiga.

Una manera *gráfica* de multiplicar

De la misma forma en que mostré cómo se podía multiplicar y dividir sin saber las tablas en el Episodio 2 de esta serie, quiero ahora proponer *otra forma,* aún más gráfica. La idea y el crédito de lo que sigue le corresponden *completamente* a Hugo Scolnik, doctor en Matemática, especialista en computación y criptografía. Acá va.

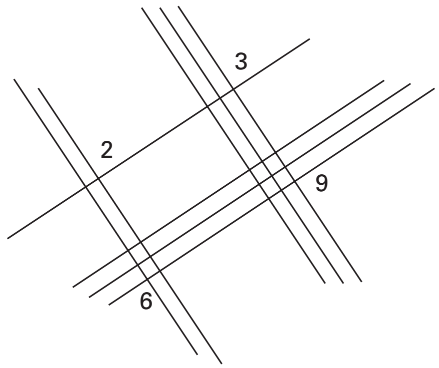
Supongamos que uno quiere multiplicar 13 x 23. Entonces, mira el primer número (o sea, el 13) y, como empieza con 1, dibuja una recta de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. Luego, como el número 13 sigue con un tres (como segundo dígito), dibuja tres líneas paralelas a la que había dibujado antes, otra vez, de izquierda a derecha, y de abajo hacia arriba. Ahora que ya terminamos con el primer factor (13), vamos al otro (23).

Tomemos el primer dígito de este número, el número 2, y tracemos dos líneas perpendiculares a las que había antes. Por último, como el segundo dígito de este número es un 3, dibujamos tres líneas separadas de las anteriores, pero también perpendiculares a las que teníamos antes. En definitiva, queda una figura así:



Ahora, contamos las intersecciones que se produjeron entre todas las rectas.

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.



Y anotamos así: a la izquierda de todo, ponemos un número 2. Luego, *sumamos* los dos números que quedan verticales, el 3 y el 6. Se tiene un número 9 (que también anotamos, y será el número del medio). Y por último, tenemos al número 9, sólo que queda sobre la derecha (y éste también lo anotamos. Será el número de la derecha).

En consecuencia, queda anotado el número 299. Haga la cuenta: multiplique 13 x 23 y verá que se obtiene 299.

Otro ejemplo. Supongamos que uno quiere multiplicar 213 x 321. Voy a hacer la misma construcción de hace un momento, pero en lugar de usar números de dos dígitos, lo voy a hacer con números de tres. El procedimiento es el mismo, sólo que ahora, como cuando uno suma normalmente y el resultado excede a diez y "me llevo 1" o "me llevo 2", o lo que sea, habrá que aplicarlo en este caso también. Como antes, como el primer número para multiplicar es el 213, hay que construir tres conjuntos de líneas paralelas: primero dos líneas (ya que el primer dígito es un 2), luego una línea separada, paralela a la anterior (ya que el segundo dígito de 213 es un 1) y luego tres líneas separadas de las anteriores, pero paralelas a ellas.

Una vez hecho esto, tomamos el otro número que aparece en el producto, el número 321, y hacemos lo mismo. Construimos líneas paralelas entre sí, de acuerdo con los dígitos, pero perpendiculares a

las que habíamos trazado antes, como se ve en la figura 1. Primero trazamos tres, luego dos, y al final una.

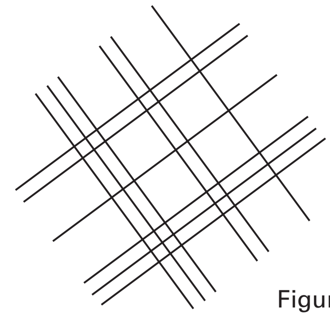


Figura 1

Ahora, contamos las intersecciones que quedan alineadas verticalmente, como se ve en la figura 2. Todo lo que resta hacer es sumar las intersecciones, y contar en forma encolumnada.

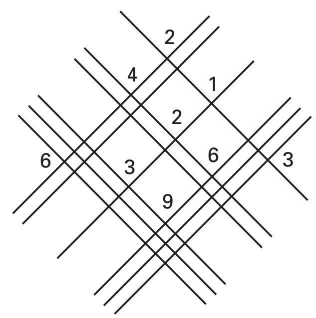


Figura 2

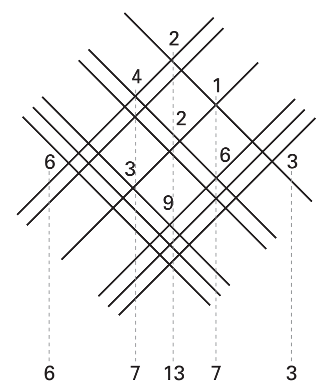


Figura 3

Y en este caso se tienen (véase la figura 3):

6, (3 + 4), (9 + 2 + 2), (6 + 1) y 3

O lo que es lo mismo:

6, 7, 13, 7 y 3

Pero el 13 le aporta una unidad más al número que está a la izquierda y, por lo tanto, se obtiene:

6, 8, 3, 7, 3

Lo invito a que haga la multiplicación correspondiente (213 x 321) = 68.373, como queríamos verificar.

Una vez visto el método, la pregunta que hay que contestar es: *¿por qué* funciona? En realidad, este sistema (que usted puede aplicar a cualquier multiplicación) funciona porque uno usa sutilmente la propiedad *distributiva* de la multiplicación con respecto a la suma.

La propiedad *distributiva* dice que, si uno tiene –por ejemplo– cuatro números *a*, *b*, *c* y *d*, entonces:

$$(a + b) \cdot (c + d) = (a \cdot c) + (a \cdot d) + (b \cdot c) + (b \cdot d)$$

Rápido, un ejemplo:

Supongamos que uno quiere multiplicar

$(7 + 8) \cdot (11 + 5)$, o sea, $15 \cdot 16$

El resultado de hacer esto es: 240.

Ahora bien: en lugar de proceder así, uno puede *distribuir* los factores y, por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}(7 + 8) \cdot (11 + 5) &= (7 \cdot 11) + (7 \cdot 5) + (8 \cdot 11) + (8 \cdot 5)\\ &= 77 + 35 + 88 + 40\\ &= 240\end{aligned}$$

Esta propiedad vale para cualquiera de ellos, ya sean *a, b, c* y *d* reales o no.

Con todo, quiero mostrar cómo se usa la propiedad distributiva para explicar por qué funciona el método para multiplicar en los dos ejemplos que figuran más arriba.

PRIMER CASO: 13 · 23

Escribimos *el desarrollo decimal* de ambos números.

O sea:

$$\begin{aligned}13 &= (1 \cdot 10) + 3\\ 23 &= (2 \cdot 10) + 3\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}(13 \cdot 23) &= (10 + 3) \cdot (20 + 3)\\ &= (200 + [(3 \cdot 20) + (10 \cdot 3)] + (3 \cdot 3)\\ &= 200 + (60 + 30) + 9\\ &= 200 + 90 + 9\\ &= 299\end{aligned}$$

y eso es lo que queríamos comprobar.

SEGUNDO CASO: 213 · 321

Si uno hace la multiplicación *convencional*, obtiene:

$$\begin{array}{r} 213\\ \underline{\times\ 321}\\ 213\\ 426\\ \underline{639} \end{array}$$

Luego, uno suma columna por columna y tiene los siguientes resultados:

6, (4 + 3), (2 + 2 + 9), (1 + 6), 3

O sea,

6, 7, (13), 7, 3

Pero, como no se puede poner el número *13,* uno "se lleva uno" prestado para el valor de la izquierda y, por lo tanto, termina la cuenta escribiendo:

6, (7 + 1), 3, 7, 3

O lo que es lo mismo:

6, 8, 3, 7 y 3

Si pongo todo junto se tiene: 68.373.

Y ése es el resultado que buscaba. Es decir que, revisando la forma en que uno multiplica habitualmente, se encuentra con los *mismos números* que tiene más arriba.

MORALEJA: el método que se plantea no aporta nada nuevo, sino que es una manera gráfica de entender qué es lo que uno está haciendo cuando multiplica en la vida cotidiana. Obviamente, no propongo que nadie multiplique de esta forma, pero sí sirve para comprender cuál es el uso que se le da a la propiedad distributiva en el momento en que hacemos una multiplicación cualquiera.

Sophie Germain

La historia que sigue es real. Una adolescente quería leer algo que sus padres consideraban inconveniente. La chica insistía. Los padres,

también. Como no tenían luz eléctrica, le escondían las velas para que no pudiera leer mientras ellos dormían. Pero no podían (ni querían) sacar tantos libros de la biblioteca. Y como además hacía mucho frío… *mucho mucho frío,* no encendían el hogar precario que tenían para que a la niña se le hiciera imposible tolerarlo. Más aún: a propósito, dejaban una ventana abierta. Pensaban que sería suficiente para espantarla. Sin embargo, Sophie (el nombre de la joven) tenía otras ideas, y se las arreglaba a su manera: se envolvía en cortinas y frazadas para protegerse de las temperaturas gélidas, y además, como iba robando y conservando trocitos de vela, los encendía y lograba iluminar, aunque fuera tenuemente, los textos que quería leer.

Lo convencional sería pensar que Sophie quería leer algo de pornografía. Pero claro, en ese caso, ¿qué hacían tantos libros *pornográficos* en una biblioteca con padres que decidían exhibirlos en lugar de esconderlos o tirarlos? No. Era otra cosa. Sophie quería estudiar matemática, y sus padres se oponían: "Eso no es para mujeres".

Sophie Germain era la segunda de tres hijas de una familia de clase media establecida en París. Nacida en abril de 1776, su padre era un comerciante dedicado a la seda, que luego se convirtió en el director del Banco de Francia. Sin embargo, sus padres no querían que Sophie leyera esos libros ni estudiara esos textos. Lo curioso era que el padre los tuviera en su propia biblioteca (por lo que intuyo que los debería valorar), pero no quería que *contaminaran* a su propia hija. Los biógrafos de Sophie aseguran que la niña había quedado impactada al leer la historia de Arquímedes cuando, al producirse la invasión romana a Siracusa, fue interrogado por un soldado. Supuestamente, Arquímedes estaba tan ensimismado y concentrado en la geometría que tenía delante que ignoró a su interlocutor. Resultado: el soldado le clavó su lanza y lo mató.

Sophie decidió que debía valer la pena averiguar qué tenía la matemática si había sido capaz de poder atrapar de tal forma a una persona, al punto de hacerla ignorar una amenaza de ese calibre. Y ahí empezó una parte de su calvario. Sophie leía a escondidas hasta que al final, viéndola enferma y cansada durante el día, sus padres decidieron contemporizar. En ese momento, tenía catorce años.

Igual, no sería fácil. En 1794, ya con dieciocho años, se produjo en París la fundación de la École Polytechnique (Escuela Politécnica), una de las instituciones más famosas del mundo. Se creó con la intención de "entrenar a los matemáticos e investigadores para que no se fueran del país" (igual que en la Argentina…). Pero *las mujeres no estaban autorizadas a ingresar: era un lugar sólo para hombres.*

Sophie ya había dado muestras de no saber aceptar un "no" muy fácilmente. Siguió estudiando en forma individual, pero necesitaba someter sus investigaciones ante matemáticos que entendieran lo que hacía. ¿Cómo hacer? Sophie encontró una manera. Comenzó a usar un seudónimo: monsieur Antoine-August LeBlanc, quien había sido ex alumno de Lagrange. ¡Sophie Germain necesitó hacerse pasar por *hombre* para lograr la aceptación de sus investigaciones! El verdadero Le Blanc había abandonado París y Sophie aprovechó para robarle la identidad y esconder su género. Así, le enviaba por correo sus escritos a Lagrange, quien, luego de varios años, decidió entrevistarse con el joven que daba respuestas tan brillantes. Para su estupor, LeBlanc *¡era una mujer!* y nada tenía que ver con su ex alumno.

Superado el impacto inicial, el matemático francés "la adoptó" y su apoyo le permitió a Sophie entrar en un círculo un poco más privilegiado de matemáticos y científicos. Su área de investigación es lo que se conoce con el nombre de Teoría de números. El más destacado de todos era uno de los mejores matemáticos de la historia, el alemán Carl Friedrich Gauss. Sophie volvió a usar el seudónimo con él, por temor a que Gauss no quisiera leer sus trabajos. Eso fue en 1804. En 1807, Gauss conoció la verdad y no sólo no se enojó, sino que hasta le pareció simpático lo que había ideado Sophie.

Sin embargo, no la adoptó como alumna, ya que por esa época decidió abandonar la Teoría de números y se dedicó a la astronomía en la Universidad de Gottingen. Sophie siguió avanzando como pudo y logró trascender más allá de París, en especial en el círculo privilegiado de los matemáticos (todos hombres) de Europa. Produjo un trabajo que sería reconocido como una gran contribución para la época, tratando de resolver un problema que tendría ocupados a los matemáticos durante casi cuatrocientos años: el último teorema de Fermat.

Igualmente, Sophie también abandonó la Teoría de números y se dedicó a la física, muy en particular a estudiar la vibración de superficies elásticas. Sus trabajos, algunos considerados geniales, sufrían sistemáticamente los reproches del *stablishment* porque no tenían el pulido de aquel que había recorrido los claustros en forma sistemática. *Sin embargo, sus ideas podían más.* Sophie Germain terminó publicando su famoso *paper Memoir on the Vibrations of Elastic Plates* (Memoria sobre la vibración de láminas elásticas), considerado aún hoy un paso esencial en ese campo.

Era tal la discriminación con las mujeres que se querían dedicar a la ciencia que un italiano, Francesco Algarotti, escribió un texto especial que tituló: *La filosofía de sir Isaac Newton explicada para el uso de la mujer*. Es difícil imaginar un agravio mayor. Sus trabajos terminaron catapultando a Germain, y le permitieron entrar en lugares sólo reservados a los hombres. De hecho, se convirtió en la primera mujer que, no siendo la esposa de un miembro, fue invitada a participar en las sesiones de la Academia de Ciencias. El Instituto de Francia también la "galardonó" en el mismo sentido cuando, superando su condición de mujer, la distinguió con un lugar en la mesa de debates, algo que no había hecho nunca antes.

Sophie murió prematuramente, a los cincuenta y cinco años, el 27 de junio de 1831. Falleció de un cáncer de pecho que virtualmente la confinó a una pieza durante la última parte de su tortuosa vida. Luchó contra todos los prejuicios sociales imaginables y aun contra los prejuicios que le impedían acceder al conocimiento, nada menos, por el simple hecho de ser mujer.

Ahora se sostiene que Sophie Germain fue, posiblemente, la mujer más profundamente intelectual que Francia haya producido. Sin embargo, como apunta Simon Singh en su libro sobre la historia del último teorema de Fermat, cuando Sophie falleció, el funcionario estatal que fue a hacer el certificado de defunción la clasificó como una *rentière-annuitant* (mujer soltera sin profesión) y no como matemática… Todo un símbolo de la época.

Su memoria fue honrada de diferentes maneras, claro que mucho después de fallecida. Gauss había logrado convencer a la Universidad de Gottengen para que le dieran un título honorario. Cuando la junta de gobierno decidió aceptar la propuesta, fue demasiado tarde. Sophie no vivía ya para ir a retirarlo.

La calle Sophie Germain en París es otro ejemplo, y una estatua se erigió en la entrada de la École Sophie Germain, también en París. La casa en la que murió, ubicada en el 13 rue de Savoir, fue designada por el gobierno francés como monumento histórico.

Afortunadamente, hoy la historia es distinta. No *muy distinta,* pero distinta. No es fácil ser mujer en el mundo de la ciencia. De ello pueden dar prueba varias generaciones de mujeres en el mundo, y muy en particular en la Argentina. La mujer siempre tuvo una tarea doble: investigar (que de por sí ya conlleva una vida sacrificada y plena de frustraciones) y, también, atender a todo lo que a su alrededor sirve para despreciar su capacidad intelectual, sea hecho en forma consciente o inconscientemente. Además, la mujer pelea contra un sistema y una sociedad que, lo reconozcan o no, son machistas por excelencia.

Estimar y errar

Si a usted lo/la paran por la calle y le preguntan la hora,¿cómo responde? ¿Dice "las 3 y 37" o "las 8 y 14"? En principio, no. Uno está acostumbrado a "redondear", y le presenta a la persona que le preguntó una respuesta aproximada. Es posible que responda las "4 menos 20" (o las 3 y 40) o "las 8 y cuarto" o "las 8 y 15". Es decir, uno ofrece aproximaciones que, en definitiva, son las que nos sirven para la vida cotidiana.

Si uno tiene que multiplicar 180 por 320, puede (por supuesto) hacer la cuenta. Pero también puede (y debe, en la mayoría de las ocasiones) calcular 200 por 300 (o sea, 60.000) porque eso da una idea aproximada de lo que se busca (en definitiva, 180 x 320 = 57.600, por lo que uno erra en menos de un 5%). Creo que en la mayoría de las aplicaciones diarias podemos convivir con un error de ese tipo.

Salvo en circunstancias muy particulares, en las que el grado de precisión importa significativamente (por ejemplo, en una operación de un tumor cerebral, uno no querría que el cirujano le errara en

nada), decía, salvo en esas ocasiones, sustituir la respuesta exacta por una aproximación es más que suficiente. Se trata entonces de aprender a aproximar, aprender a estimar.

Un último detalle: en general, cuando uno realiza una estimación de cualquier tipo, es obvio que lo más probable es que le erre al resultado *exacto*. Justamente, uno habla de error. Sin embargo, la palabra *error* lleva a sospechar que uno ha cometido una equivocación, cuando en realidad *no es así*. Intentar *disminuir* ese potencial error más allá de las necesidades del momento *es* una equivocación que solemos cometer. ¿Cuándo necesita uno decir "son las 4 y 13 con 23 segundos"? Tener un reloj, por ejemplo, con ese grado de precisión involucra un costo en dinero y en tiempo que –en general– no se justifica.

En todo caso, de lo que deberíamos hablar es de *incerteza* en la respuesta, o *imprecisión,* pero no de error. Y si alguien quiere ser muy preciso, lo que puede hacer es *señalar* el margen de error con el que entrega la respuesta que se le pide, o sea, en cuánto le erra. Ese dato, en general, es mucho más que suficiente.

Como dice Mitchell N. Charity, profesor en el MIT, cuando a uno le preguntan cuál es el volumen de una pelota o una esfera, uno contesta que es "(4 / 3) x (π) x (radio)^3", cuando, en realidad, bastaría con decir que es la mitad del volumen de la caja en la que venía metida (si la pelota entra *justo en la caja*), o sea "(1/2) (diámetro)^3" (el "diámetro elevado al cubo"), lo cual erra el resultado final en menos de un 5%. ¿No valdrá la pena dedicarle un rato más a estimar que a calcular con precisión?

Y aunque no lo parezca en la superficie, esto es hacer matemática también.

El perro llamado Fido y la paradoja de Bertrand Russell

Lo que sigue es un extraordinario ejercicio de lógica. Créame que vale la pena sentarse un rato y pensar la situación que voy a plantear. La idea es muy conocida para cualquiera que trabaja en *lógica*

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

matemática, pero de todas las variantes que conozco, la que sigue es una de las que más me gustó y le pertenece a Donald Benson.

Supongamos que en algún planeta –digamos Plutón, por ponerle un nombre (aunque desde 2006 ya no es más un planeta)– hay *infinitos* perros. Sí, ya sé. De entrada hay un problema, porque no es posible que haya *infinitos perros,* pero se trata de estirar un poco la imaginación y avanzar. Concédame ese beneficio.

Sigo. Los infinitos perros tienen uno de estos dos colores: algunos son *blancos* y otros son *negros*. Eso sí: en este planeta las *leyes son muy rígidas,* especialmente cuando se trata de que un perro pueda *olfatear* a otro. Más aún: cada perro tiene una *lista de perros a los que puede olfatear.* Sólo les está permitido, entonces, olfatear a cualquier perro que figure en su lista. La pena para los que no cumplen es la muerte instantánea.

Sigo con más datos. Otra cosa que también se sabe es que *no hay dos listas iguales.* Es decir, no hay ningún perro que tenga una lista igual a la de otro.

Pero, increíblemente, si usted seleccionara *cualquier conjunto de perros de Plutón,* ese grupo corresponderá exactamente a la lista de algún perro. Lo invito a pensar en este último punto. Es más: le pido que no avance si no se siente seguro de haber entendido lo que dice esta ley. Por ejemplo, si usted elige tres perros cualesquiera en Plutón, esos tres tienen que corresponder a la lista de un *único* perro. Y lo mismo, si elige otros *seis perros:* esos seis tienen que ser exactamente los seis que figuran en la lista de un *único perro.* Eso sucederá con *cualquier subconjunto de perros* de Plutón que usted elija: ellos tendrán que ser los integrantes de la lista de un *único* perro.

Además, lo curioso es que se permite que algunos perros figuren en sus propias listas. Es decir que sólo a esos perros se les permite olfatearse a sí mismos. Justamente, ésos son los perros de color negro. El resto de los perros *no figura* en su propia lista. No se les permite que se olfateen a sí mismos y, por supuesto, ésos son los perros blancos.

Ahora bien, la pregunta es la siguiente: ¿es posible que estas reglas se cumplan? Es decir, ¿es posible que esa situación sea posible? ¿O hay alguna contradicción en alguna parte?

A esta altura, lo que yo haría es detenerme a pensar tranquilo, sin apurones. El problema no tiene trampa, no tiene ningún misterio. Es cuestión de que usted recorra la lista de leyes que están escritas más arriba y se fije si hay alguna contradicción. Y por supuesto, si la hay, ser capaz de explicar cuál es. A manera de resumen, escribo todas las reglas:

1) Hay infinitos perros en Plutón. Algunos son blancos, otros son negros.
2) Todo perro tiene una lista de perros a los que puede olfatear.
3) Todas las listas son diferentes.
4) Dado cualquier conjunto de perros de Plutón, ellos tienen que ser los integrantes de la lista de un único perro, y por lo tanto, serán los únicos que ese perro pueda olfatear.
5) Algunos perros pueden figurar en su propia lista y se les permite olfatearse a sí mismos. Éstos son los perros negros.
6) Los perros restantes, o sea aquellos que no figuran en sus propias listas, son los perros blancos.

Ahora le toca a usted. Si no, lea la página de las soluciones (pero, como siempre, ¿qué gracia tendría sin haberlo pensado? ¿No era ésa la idea acaso?)

Paradoja de Allais

El comportamiento humano (afortunadamente) es impredecible. Puestos frente a situaciones muy similares, nuestras decisiones (la suya, la mía) pueden ser totalmente diferentes de lo que uno esperaría. Más aún: creo que si se nos preguntara el porqué de tales variaciones, tendríamos muchas dificultades para explicar nuestra conducta.

El próximo ejemplo (de acuerdo con la presentación que hicieron Kahneman y Tversky en 1979) es conocido con el nombre de *La paradoja de Allais.*[31] La paradoja exhibe *modelos de conducta* de las per-

[31] Maurice Allais (1911) es economista y doctor en Ingeniería, especializado en Física. Nació en París y, hasta hoy, es el único Premio Nobel en Economía (1988)

sonas. Por supuesto, se trató de encuestas reiteradas que exhibieron la voluntad de distintos grupos, pero al ser repetidas en otros ámbitos y confirmar esas preferencias, créame que sorprende lo que elegimos. Claro, con tanto prolegómeno y anticipación que estoy generando, seguro que cuando usted tenga que optar, ya va a estar *influido* por mi opinión o por lo que escribí hasta aquí.

Supongamos que usted está a punto de jugar a la ruleta, pero en lugar de haber 37 números (estoy incluyendo el cero), hay *100 números,* del *1 al 100.* Los premios que puede ganar están indicados en las siguientes dos opciones:

OPCIÓN A

Si sale cualquier número entre el 1 y el 33, cobrará 2.500 pesos.
Si sale el número 34, no cobra nada.
Si sale cualquier número del 35 hasta el 100, cobra 2.400 pesos.

OPCIÓN B

Si sale cualquier número entre el 1 y el 33, cobra 2.400 pesos.
Si sale el número 34, cobra 2.400 pesos.
Si sale cualquier número del 35 hasta el 100, cobra 2.400 pesos.

Antes de leer lo que hacen (en porcentaje) otros semejantes, usted, ¿qué haría? ¿Optaría por A o por B? ¿Cómo cree que eligen los otros, sus pares?

Repasemos en qué se diferencia una opción de otra. Si sale un número entre el 1 y el 33, la opción A ofrece 100 pesos más que la B. Ambas son iguales del 35 en adelante. Y la diferencia esencial es que, si sale el 34, la opción A no le paga nada, mientras que la B le paga siempre 2.400 pesos.

Ahora, voy a modificar ligeramente las opciones.

---

nacido en Francia. El trabajo que se presenta aquí en forma sucinta y abreviada dio origen a lo que hoy se conoce como "La paradoja de Allais". Yo elegí una de sus múltiples variantes, que me parece que resume lo que Allais quería mostrar: cómo ligeras variaciones en la oferta generan modificaciones bruscas en las conductas de las personas.

OPCIÓN C

Si sale cualquier número entre el 1 y el 33, cobrará 2.500 pesos.
Si sale el número 34, no cobra nada.
Si sale cualquier número del 35 hasta el 100, no cobra nada.

OPCIÓN D

Si sale cualquier número entre el 1 y el 33, cobra 2.400 pesos.
Si sale el número 34, cobra 2.400 pesos.
Si sale cualquier número del 35 hasta el 100, no cobra nada.

Ahora, revise las opciones posibles (C y D) y elija con cuál se quedaría. Luego, lo invito a que confronte lo que hicieron (o harían) –en porcentaje– otras personas.

Una vez más, reflexionemos sobre las diferencias entre ambas opciones. Si sale cualquier número del 35 en adelante, son iguales, porque ninguna de las dos paga nada. La opción C paga 100 pesos más si sale entre el 1 y el 33, mientras que si sale el 34, la opción D paga 2.400 mientras que la C no paga nada.

¿Cuál elegiría usted? O, igual que antes, ¿qué eligió?

¿Qué es la inteligencia?

Desde hace muchísimos años ando a la búsqueda de una buena definición de la palabra *inteligencia.* ¿Qué es exactamente? Todo el mundo lo ha pensado, y cuando digo *todo el mundo* es porque seguramente alguna vez hemos hablado con alguien que en algún momento dijo: "Es un tipo muy inteligente" o "Una persona muy inteligente" o bien "Tiene una inteligencia descomunal". O al revés, "No tiene un gramo de inteligencia". Paro acá, porque usted ya entiende de qué hablo. Lo que me asombra es que, si uno le pide a alguien que le diga ¿qué es la inteligencia?, lo más probable es que se encuentre con respuestas muy variadas y dispares.

a) Se trata de la capacidad para resolver problemas.
b) Se trata de la capacidad para adaptarse rápido a situaciones nuevas.
c) Es la habilidad para comprender, entender y sacar provecho de la experiencia.
d) Es la capacidad de un individuo para percibir, interpretar y responder a su entorno.
e) Se trata de la habilidad *innata* para percibir relaciones e identificar *correlaciones.*
f) Es la destreza para *encontrar correctamente* similitudes y diferencias, y reconocer cosas que son idénticas.

Obviamente, la lista podría continuar. Habría bastado que le dedicara más tiempo a recorrer Internet o buscar en las enciclopedias que tengo a mano. No importa. No creo que haga falta.

El problema reside en que no hay una definición aceptada *universalmente* sobre lo que significa. Entonces, ¿de qué habla la gente cuando habla de inteligencia? Más allá de mi resistencia y de que me cueste aceptarlo, hay un hilo conductor en lo que cada uno *cree* que dice cuando habla de la inteligencia de una persona. Pero, antes de seguir, cabe preguntarse, sea lo que sea la inteligencia, si uno es *inteligente* para todo (por ejemplo, si una persona *inteligente* para los negocios también lo es para la física), o si para ser inteligente uno tiene que ser *rápido*, o si alcanza con ser profundo. ¿Ser inteligente es tener ideas nuevas? Las personas inteligentes, ¿están preparadas para contestar *todas* las preguntas? ¿Dónde está el punto o la línea en que uno pasa de no inteligente a inteligente?

Históricamente, hay ya planteado un debate sobre lo que significa la inteligencia y, por supuesto, hay varios ángulos posibles para abordar el tema.. Unos sostienen que es una cuestión genética y, por ende, hereditaria. Otros, que depende del ambiente en el que el niño se desarrolla, los estímulos que recibe. Y en el medio, todos los demás. Desde 1930 se discute si la inteligencia es sólo genética o influida directamente por las condiciones del contorno. Pero fue en las décadas del 60 y el 70 cuando se produjo el vuelco más dramático entre

el discurso público y el privado: nadie se atrevía a decir abiertamente lo que los científicos especialistas en el área comentaban en voz baja: la inteligencia –para ellos– tiene un fuerte componente genético y, por lo tanto, hereditario.

En los Estados Unidos, en 1994, se publicó la primera edición del libro *The Bell Curve. Intelligence and Class Structure in American Life* (La Curva de Bell. La inteligencia y la estructura de clases en la vida norteamericana). Se convirtió automáticamente en un best-seller y generó todas las polémicas imaginables. Sus autores, Richard J. Herrnstein y Charles Murray, presumen de haber encontrado una buena definición de inteligencia, formas de cuantificarla y, por lo tanto, de medirla. Aparecen análisis estadísticos (que ellos interpretan como irrefutables desde el punto de vista científico) y un estudio pormenorizado del IQ (*intelligence quotient*, cociente de inteligencia o coeficiente de inteligencia). El IQ se transformó en el método más general para expresar el desempeño intelectual de una persona cuando uno lo compara con el de una población dada.

El libro dividió a la sociedad norteamericana (no necesariamente en partes iguales). Quienes adhieren a las conclusiones de Herrnstein y Murray son vistos como reaccionarios de ultraderecha. Los otros quedan ubicados en el amplio espectro que queda libre.

Lo que resultaría indispensable es analizar lo que se discute desde un punto de vista más desapasionado. Es difícil debatir sobre un tema tan inasible e indefinible con certeza.

Otros científicos están fuertemente en desacuerdo con los tests de inteligencia porque –sostienen– la más importante de las cualidades humanas es demasiado diversa, demasiado compleja, demasiado cambiante y demasiado dependiente del contexto cultural y, sobre todo, demasiado subjetiva para ser medida por respuestas a una mera lista de preguntas. Esos mismos críticos afirman que la inteligencia es más equiparable a la belleza o a la justicia que a la altura o el peso. Así, antes que algo pueda ser medido, necesita ser definido.

Desde otro lugar, Howard Gardner, psicólogo de Harvard, sostiene que "no hay un solo tipo de inteligencia o una inteligencia general, sino siete caracterizaciones bien definidas: lingüística, musical, lógica-matemática, espacial, corporal y dos formas de inteligencia personal, 'intrapersonal' e 'interpersonal', basadas en la capacidad computacional única de cada persona". Y agrega: "Sé que mis críticos dicen que lo único que hice fue redefinir la palabra 'inteligencia' extendiéndola hasta lugares que para otros ocupa lo que se llama 'talento'. Pero, si algunos quieren denominar al pensamiento lógico y al lenguaje como 'talentos', y aceptan sacarlos del pedestal que ocupan actualmente, no tengo problemas en hablar sobre 'talentos múltiples' que puedan tener las personas".

¿Ambiente o herencia? Los debates ardientes continúan entre los que atribuyen la inteligencia al contexto social de educación y los del otro lado del mostrador, que la ven como genéticamente determinada desde el momento de la concepción. Así puesto, el tema hierve, porque toca las controvertidas cuestiones de educación, clases sociales y relaciones raciales.

Mi posición frente a este debate es que las condiciones del contorno son *esenciales*. Un ejemplo: si el día que yo nací hubieran equivocado al bebé que les llevaron a mis padres, estoy seguro de que el chico que hubiera crecido en mi casa habría tenido altas posibilidades de desarrollar sus habilidades libremente. Claro, no necesariamente hubiera sido matemático ni periodista. Pero lo que me queda claro es que hubiera explotado la habilidad "de fábrica" que tiene cada persona al nacer.

Mi opinión es que *todos* nacemos con alguna destreza, con el gusto por algo en particular, con algún talento o facilidad. Pero si ese niño se desarrolla en un medio ambiente sin posibilidades económicas, o sin estímulos adecuados, es muy probable que nunca llegue a descubrir qué le gusta, ni de qué disfruta. Si les diéramos a todos los niños la posibilidad de vivir en condiciones de desarrollar todo su potencial, entonces después podríamos analizar quién es inteligente y quién no. Aunque ni siquiera nos hayamos puesto de acuerdo en qué quiere decir.

Paradoja de las papas

El problema que sigue es precioso como muestra (una vez más) de que lo que uno *conjetura* no necesariamente es cierto. Fíjese qué piensa usted.

Supongamos que tiene papas dentro de una bolsa. Las saca, las pesa y anota el resultado: hay 100 kilos. Se sabe que las papas contienen muchísima agua, y en este caso, se sabe que el 99% del peso de las papas es justamente el agua que contienen.

Usted decide dejar las papas al sol, de manera tal que se deshidraten hasta llegar a que el agua que contengan sea el 98% del peso total.

La pregunta es: ¿cuántos *kilos de agua* se tienen que evaporar para que el agua que quede se corresponda con el 98% del peso? Dicho de otra forma, al pesar las papas por primera vez, el 99% de los 100 kilos es *agua*. ¿Cuánto pesan las mismas papas después de un día de deshidratación, si ahora sólo el 98% del peso es agua?

Clave pública

Secretos. Todos los tenemos. La vida de cualquier persona involucra en algún momento (me atrevería a decir *a diario*) algún secreto, algo que quiera o tenga que ocultar. Y aunque usted esté tentado a decir "no, yo no tengo nada que ocultar", sin embargo, es muy probable que utilice un *password* si tiene acceso a una computadora, o a recibir correspondencia electrónica, o tiene una tarjeta de crédito, o una máquina de la que saca dinero en efectivo, hasta la combinación de una caja de seguridad o de un candado común y corriente. Y ni qué hablar de hacer alguna transacción por Internet que involucre alguna identificación personal.

¿Cuántas veces le contaron o leyó que hay gente interesada en interceptar datos que usted envía por Internet para usarlos maliciosamente?¿Cuántas veces dudó en enviar –también por Internet– el número de su documento, o su dirección postal, o el número de su tarjeta de crédito o de su cuenta bancaria, por temor a que fueran robados? ¿Cuántas veces pensó que hay gente que puede leer el contenido de sus mensajes de correo electrónico sin que usted lo advierta?

¿Cuántas veces oyó que, para poder garantizar ciertas condiciones mínimas de seguridad, hace falta usar matemática? Ahora bien, ¿qué "matemática" hay que usar? ¿Y cómo? ¿Cuán seguro es? Con lo que sigue, pretendo contarle cómo se hace, qué se usa y cuán seguros son los métodos que se aplican. Por supuesto, sólo será una idea y sin el rigor técnico necesario, pero aspiro a que quien termine de leer el texto cuente con una información que no tenía previamente.

Elegí un camino que quiero compartir con usted, pero necesito pedirle algunas cosas antes:

a) Yo voy a hacer algunas cuentas sencillas: multiplicaciones, divisiones y restas. Verifíquelas o créalas, pero advierta que lo que uso son herramientas hipersencillas.
b) Hace falta que recuerde lo que es un número primo. Es decir, números que sólo son divisibles por ellos mismos o por el número 1. (El número 1 *no se considera primo*.) Por ejemplo, el 2, 3, 5, 7, 11, 13 son primos. En cambio, 4, 9, 15, 16 no lo son.
c) Por último, piense en un número entero positivo cualquiera antes de seguir leyendo (distinto de 0 y de 1). Ese número que está pensando, o bien es primo, o bien es el producto de números primos. Es decir, cualquier número natural es o bien un número primo, o bien se escribe como producto de primos. Por ejemplo, el 11 es primo y listo. El 19 también. Pero el 21 no es primo y se escribe como (7 x 3). El número 100 tampoco es primo, pero se escribe como (2 x 2 x 5 x 5).[32]

[32] Este resultado se conoce con el nombre de "Teorema fundamental de la aritmética" y dice que "todo número entero positivo más grande que 1 se escribe como el producto de números primos, que son únicos *salvo el orden*". Es uno de los teoremas más importantes de la matemática. Es muy sencillo de entender, no muy difícil de probar, pero esencial para sostener toda la estructura de la aritmética clásica.

La clave de por qué funciona este método consiste en un par de razones muy interesantes. En principio, si le doy dos números cualesquiera, 3 y 5 por ejemplo, y le digo que los multiplique, la respuesta es obvia: 15. Al revés: si le doy el número 15, y le pido que me diga cuáles son los factores primos que lo componen (o sea, 3 y 5), también es fácil de calcular, porque los números son pequeños.

En cambio, si le diera el número 358.566.167 y le dijera que encuentre los dos factores que lo componen… intente y verá que la dificultad es muy grande. La respuesta es que:

$$18.859 \cdot 19.013 = 358.566.167$$

Y si le dijera que encuentre los factores primos de:

8.943.587.117

Tardará un poco más, hasta descubrir que son 62.987 y 141.991.

Es decir, lo que quiero comunicar acá es que calcular el producto de dos números es algo sencillo. Tedioso, pero que no ofrece complicaciones. En cambio, encontrar los factores primos que componen un número, más allá de que también sea tedioso, es virtualmente imposible si los números son muy grandes. Y *ésta es la clave del método.*

Las computadoras más rápidas que se usan hoy tardarían más de 100.000 años en encontrar los factores que componen números de más de 400 dígitos (que son los que se utilizan). En consecuencia, no se trata de que el método que le voy a contar sea *inviolable.* De hecho, no es así. Sólo que con la metodología que se conoce hasta hoy, encontrar esos números es virtualmente imposible.

El tiempo dirá si aparece una nueva manera de factorizar números en sus componentes primos, que no sea usando las herramientas actuales. Si así fuere, habría que revisar todo, porque se transformaría en vulnerable.

Como es archiconocido, los aliados en la Segunda Guerra Mundial lograron decodificar los mensajes de los alemanes y de esa forma lograron invadir Normandía en 1944 y, a partir de ahí, elaborar el triunfo final. Es decir, tratar de encriptar mensajes es un tema de alta sensibilidad.

Sin embargo, en 1976, dos científicos norteamericanos, Whitfield Diffie y Martin Hellmand, de la Universidad de Stanford, introdujeron una idea revolucionaria: "la clave pública". ¿Qué quiere decir esto? Hasta ese momento, se operaba de la siguiente manera: tanto el emisor como el receptor tenían una llave secreta. El emisor la usaba para cerrar el mensaje (encriptarlo) y el receptor, para abrirlo (desencriptarlo). La idea de Diffie y Hellmand fue usar algunos teoremas conocidos de Teoría de números para lograr que una de las claves fuera pública. Es decir, ya no importaría que alguien interceptara el mensaje, sino que, además, cualquiera podría encriptar lo que quisiera. Usando el método de Diffie y Hellmand, la persona que quiere encriptar un mensaje puede publicar en el diario o en las páginas amarillas, o donde se le ocurra, cuál es la clave que usa. Pero lo extraordinario del descubrimiento es que, por más que uno tenga esos datos, ¡no le sirven para decodificarlo! Eso sí: el receptor del mensaje *sí* tiene una clave privada que es la que usará para recuperar el mensaje original.

En resumen: el emisor *encripta* el mensaje usando datos que todo el mundo puede conocer y luego lo envía. El receptor *lo desencripta* usando la clave privada. Lo notable es que la parte que falta, o sea, la clave privada, es inhallable para cualquier otra persona que no sea el propio receptor, quien, de paso, no es que la encuentra sino que la tiene en su poder de antemano. De todas formas, a este proceso le faltaba algo. En teoría, funcionaba todo perfecto, pero ¿cómo hacer para conseguir una clave que fuera *tan* privada que nadie pudiera *encontrarla?*

En 1977, tres investigadores del MIT (Massachusetts Institute of Technology), Rivest, Shamir y Adleman, elaboraron un algoritmo que resolvió el problema. El algoritmo se conoce con el nombre de RSA (por las iniciales de los autores). Los tres científicos fundaron la compañía RSA Data Security, con la que se transformaron casi instantáneamente en millonarios, luego de haber patentado el proceso que aún hoy es el que se usa en todas partes.

De hecho, el propio Departamento de Defensa de los Estados Unidos interviene en el control de la empresa, ya que la clave es *tan inviolable* que permite mandar mensajes que nadie puede decodificar, poniendo –supuestamente– en riesgo la seguridad de un país.

Como dije antes, la rama de la matemática que interviene en este proceso se llama Teoría de números. Lo curioso es que el inglés Godfrey H. Hardy, uno de los matemáticos más famosos del siglo XX, escribió: "Prefiero considerar a mi campo de investigación como *matemática pura,* ya que nadie ha descubierto aún ninguna utilidad para la guerra aplicando la Teoría de números o la relatividad, y me parece muy raro que esto suceda en los próximos años". Hardy fue un gran opositor (en aquellla época) de toda guerra y es reconocido como tal; de todas formas, su predicción fue claramente errónea. No hace falta comentar cuán devastador fue para la humanidad el desarrollo de armas nucleares y, por otro lado, la Teoría de números ha sido *decisiva* en los temas de criptografía. Pero lo interesante del comentario es que, lo que en ese momento era considerado un ejercicio intelectual, terminó siendo la herramienta clave para el desarrollo de la criptografía moderna.

Una breve explicación –sin entrar en los detalles técnicos– de cómo funciona el mecanismo. Le pido que por favor trate de seguirme ahora, porque es la parte más relevante de toda esta historia. Si siente que se pierde, no se preocupe. Siga leyendo hasta que se sienta cómodo con el método y verá que –en principio– es sencillo de entender cómo funciona. Y eso es lo que pretendo hacer con lo que sigue. Supongamos que yo quiero mandarle un mensaje a usted.

Lo primero que tengo que hacer es transformar el mensaje en un número. ¿Cómo hacer esto? Por ejemplo, adjudicándole a cada letra un par de dígitos. Así, si uno asigna a cada letra del alfabeto un número, tenemos:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Entonces, si el mensaje fuera

AMOR

corresponde poner el siguiente número:

01131619

De esa forma, a cada mensaje escrito en palabras le corresponde un número. Por supuesto, cuanto más largo es el mensaje más grande es el número. Pero no interesa: lo importante es que el mensaje *ahora* se transformó en un número, que llamaremos M.

Ahora empieza el proceso de encriptación y desencriptación. En realidad, salvo que uno tenga mucho tiempo y nada que hacer con él, conviene usar una calculadora o una computadora, pero de todas formas lo que me interesa con este texto es contar –sin entrar en tecnicismos– cómo se hace. Empiezo con un plan de lo que voy a hacer:

1) Busco el mensaje que quiero mandar. Digamos, para fijar las ideas, que quiero enviar el número 4.
2) Busco la clave pública que voy a usar para encriptar el mensaje. En este ejemplo, consiste de dos números: 33 y 7.
3) Usted (el receptor) conoce ya su clave privada, que también consiste en dos números: 33 y 3 (note que al 33 lo usamos los dos: usted y yo).

Con estos datos, *yo* hago lo siguiente:

PRIMER PASO:

Multiplico el mensaje, el número 4, siete veces por sí mismo (es decir, el mensaje lo elevo a uno de los números de mi clave):

$$4^7 = 16.384$$

SEGUNDO PASO:

Divido el resultado por 33 (que es el segundo número de mi clave) y me fijo cuánto *sobra* o cuál es el resto.

$$16.384 = 496 \cdot 33 + 16$$

Acá hago una pausa. Este número, 16, *es el mensaje codificado*. Esto es lo que voy a mandar y no me interesa que nadie lo intercepte. O sea, hasta acá, usé cuatro números:

a) El mensaje: 4
b) El primer número de la clave: 7
c) El segundo número de la clave: 33
d) Y con ellos fabriqué el cuarto número: 16.

Ahora, usted recibe el mensaje encriptado, que es el número 16. ¿Qué hace entonces?

Bueno, usa *su clave*, que consiste no sólo en el 33, sino también en el número 3 (¡y este número *sí* que es privado! Sólo usted lo conoce). Y hace lo siguiente:

TERCER PASO:

Multiplica el *mensaje* por sí mismo *3 veces*. Es decir, eleva el mensaje que recibió al cubo, o sea,

$$16^3 = 4.096$$

CUARTO PASO (Y FINAL):

Divide el resultado, o sea 4.096, otra vez por 33 y calcula cuánto sobra:

$$4.096 = 124 \cdot 33 + 4$$

¿Qué pasó? Lo notable es que ahora, al hacer este proceso, ¡usted *descubre el mensaje que yo le mandé y que era el número 4*!

De hecho, lo invito a que elija el número que quiera como mensaje, y repita el procedimiento hasta convencerse de que no importa cuál sea el número original, luego de los cuatro pasos que figuran más arriba, usted lo va a *redescubrir*.

Un último ejemplo con claves diferentes, de manera tal que podamos verificar que todo lo que hice hasta acá está claro:

Mensaje M = 2
Clave pública: 85 y 13
Clave privada: 85 y 5

Primer paso:

$$2^{13} = 8.192$$

Segundo paso:

$$8.192 = 85 \cdot 96 + 32$$

Luego, el mensaje encriptado es 32.

Tercer paso:

$$32^{5} = 33.554.432$$

Cuarto paso:

$$33.554.432 = 394.758 \cdot 85 + 2$$

Como se ve, entonces, uno vuelve a recuperar el número 2, el mensaje original. Una vez que entendió estos ejemplos, avanzo un poco más.

En general, el método consiste en lo siguiente (ahora voy a usar *letras* para indicar tanto los mensajes como las distintas claves):

Datos:
Mensaje = M
Clave pública = N y *e*
Clave privada = N y *d*
(se usan las letras *e* por potencia que sirva para *encriptar* y *d* para *desencriptar*).

Uno hace lo siguiente, entonces:

Primer paso: calcula M^d
Segundo paso: divide el resultado por N y calcula el *resto, que llamo R.*

$$M^d = q \cdot N + R$$

En consecuencia, el *mensaje encriptado ahora es R.* El receptor recibe el número R y comienza a desencriptarlo.

Tercer paso: calcula R^d
Cuarto paso: divide el resultado por N y calcula el resto, que tiene que ser M.

$$R^d = q'' \cdot N + M$$

El número N se elige de manera tal que sea muy grande. ¿Qué quiere decir grande? Que tenga más de 400 (cuatrocientos) dígitos. Para tener en claro cuán enorme es un número así, basta pensar que todo el universo está compuesto por 2^{300} átomos, o sea. aproximadamente un 1 seguido por 90 ceros.

Ahora bien: se elige este número N de modo que sea el producto de sólo dos números primos, cada uno de aproximadamente doscientos dígitos. Digamos que N se escribe como el producto, entonces, de dos números primos: *p* y *q*.

$$N = p \cdot q$$

Este número N es el que va a formar parte de las claves pública y privada. Ahora bien, uno se fabrica el siguiente número:

$$(p - 1) \cdot (q - 1) + 1$$

Éste también es un número muy grande, y cuando uno elige el número N tiene en cuenta que este otro número tiene que descomponerse también como producto de sólo dos primos. Y justamente, esos dos primos son los que llamé más arriba *e* y *d.* O sea,

$$(p - 1) \cdot (q - 1) + 1 = e \cdot d$$

Estos dos números, *e* y *d,* son los que completan las claves pública y privada. Como expuse más arriba, los números que son públicos son N y también *e.* Y la clave *privada* se compone del número N y del número *d.* Lo increíble (en apariencia) y *maravilloso* de este procedimiento es que el número que resulta como *resto* es justamente M, ¡el mensaje original!

En definitiva, la encriptación en la que el mundo de hoy confía depende de un par de resultados de la Teoría de números. La inviolabilidad del sistema radica en que –con los métodos actuales– es imposible factorizar un número descubriendo en un tiempo razonable (o sea, no medido en siglos) cuáles son los primos que lo componen. Hasta aquí estamos bien. El día que alguien descubra cómo hacerlo, los sistemas colapsarán y habrá que empezar de nuevo. Pero por ahora estamos bien.

La educación de los jóvenes

Los jóvenes privilegiados que tienen apoyo económico paterno pasan las mañanas o las tardes durante doce años cursando el colegio primario y el secundario. ¿Pensó usted alguna vez si el *quantum* de información que adquieren en ese lapso es proporcional al tiempo que le dedicaron? Respuesta mía: rotundamente, no.

No se me escapa que la escuela primaria tiene ganado un lugar en el Paraíso en la medida en que transforma analfabetos en alfabetos, uno de los saltos cualitativos (culturalmente hablando) más espectaculares de nuestras vidas. Pero ¿*siete* años para lograrlo? ¿No es mucho? ¿No habrá llegado el momento también de reformular la enseñanza en ese estadio?

Tengo más preguntas:

– ¿es lógico que todos los chicos empiecen el colegio a la misma edad?
– ¿Está comprobado que los desarrollos o evoluciones personales ya están nivelados a los seis años, cuando todos deben comenzar?
– ¿No sería más razonable plantear que los niños, de los cinco a los nueve años, por ejemplo, sólo dediquen su tiempo a estudiar música, arte y hacer deportes, justo en el momento de sus vidas en que se generan y explotan gustos, tendencias y habilidades? Claro que también les enseñaría a leer, escribir, sumar, restar, etcétera.

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Es más: yo propondría redefinir la palabra “alfabeto”, ya que hemos entrado en el nuevo siglo. ¿Alcanza la versión anterior? El siglo XXI exige el compromiso de tener educación gratuita, obligatoriamente bilingüe, con terminales de computadora instaladas en todas las escuelas del país, con conexiones vía Internet. Eso les permitirá a los chicos acortar distancias, “chatear” con jóvenes de otras partes, difundir sus gustos, cultura y conocer la de los otros.

También servirá para familiarizarse con los procesadores de texto, o con programas de diseño gráfico, de video, de fotografía o de música. En todo caso, la escuela primaria *es el lugar* para que enfrenten sus primeros desafíos, para estimularlos a que planifiquen estrategias, programen sus propios juegos o sus propios problemas. Ya no alcanza hoy un taller de lectura y una biblioteca o la sala de música convencionales. No alcanza con cantar el himno, izar la bandera, sentarse en el aula a escuchar pasivamente y esperar ansiosamente el recreo.

Sé que nuestros docentes no están hoy preparados para eso, ni lo estuvieron en la última parte del siglo pasado. Sé también que la escuela cumple una función social. Pero,

- ¿quién dijo que hemos preparado a ese plantel de docentes en el país para que cumplan con ese papel?
- ¿Les enseñamos acaso a ser contenedores de los chicos, moldeadores de sus futuros?
- ¿Quién les enseñó a enseñar?
- ¿Quién los adapta a las necesidades de hoy?
- ¿Quién les provee los elementos?
- ¿Quién les explica que la tarea del docente es generar preguntas, y no sólo dar respuestas a preguntas que los jóvenes no se han hecho? ¿No es acaso un abuso de autoridad el que cometemos hoy, decidiendo los futuros de nuestros hijos de esta forma tan desprotegida?

¿En dónde quedó el orgullo de otra época de mandar a los chicos a la escuela estatal? Antes, a la escuela privada no sólo iba el que

podía, sino el que “no podía”. Hoy es al revés. Los padres aspiran a que sus chicos tengan al menos una mínima educación. Y con la tendencia actual, falta poco para que también le pidamos rentabilidad a la cooperadora de la escuela.

Soluciones

Solución al problema de los dos pintores

La tentación es decir que si trabajan los dos juntos van a tardar *3 horas* en pintar la pieza. Sin embargo, uno contesta eso porque, en principio, *no está pensando*. Basta advertir que, si uno de los dos pintores *trabajando solo* tardaría 2 horas, no es posible que con ayuda de otro ¡tarden más!

Estoy seguro de que hay muchísimas maneras de llegar a la solución. Más aún: ni siquiera creo que las dos que voy a proponer sean las mejores. Es decir: lo invito a a que imagine una respuesta que sea atractiva por lo breve y contundente. Por eso es que creo que no vale la pena leer lo que figura más abajo… Pero, si aun así usted insiste, aquí va.

Le propongo pensar lo siguiente. En una hora, el pintor que pinta más rápido, B, pinta *la mitad* de la pieza. El otro, A, mientras tanto, pinta *una cuarta parte* (ya que, como tarda 4 horas en pintar *todo,* en una hora pinta justo la *cuarta parte* de la pieza).

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Ahora bien, hasta acá, entre los dos pintaron las *tres cuartas partes.* Relea lo que acabo de escribir: tres cuartas partes. O sea, tres veces una cuarta parte (eso es lo que significa tres cuartos de algo). Y tardaron una hora en hacerlo. Por lo tanto, como queda una cuarta parte por pintar, les hace falta la tercera parte de una hora. Piénselo conmigo otra vez: si en una hora pintaron tres cuartos, para pintar un cuarto (que es la tercera parte de 3/4), les hace falta usar la tercera parte de una hora, o sea, 20 minutos.

MORALEJA: los dos pintores juntos tardarán 1 hora y 20 minutos para pintar la pieza.

También podemos pensar el problema usando lo que nos enseñaron en el colegio como "regla de tres simple". Como hice en la solución 1, sabemos que en *una hora* pintan 3/4 partes de la pieza. La pregunta es, entonces, ¿cuánto tardarán en pintar *toda* la pieza? Y para eso escribimos:

3/4 pieza ———————- 60 minutos
1 pieza ———————- x minutos

Para "despejar" la *x* (o para "calcular" la *x)*, hacemos

$$x = (1 \cdot 60) / (3/4) = 60 / (3/4) = (4/3) \times 60 = 80$$

Luego, en total, entre los dos tardarán 80 minutos, o sea, 1 hora y 20 minutos.

Soluciones al problema de subir y bajar un 40%

1) Si usted hizo las cuentas, habrá advertido *que ¡no da lo mismo!* Es decir, si al número 100 uno le *descuenta un 40%,* se obtiene el número 60. Si ahora, uno incrementa un 40% al número 60, se obtiene el número 84. Es decir, *no da lo mismo deducir un 40% del número 100 y luego aumentárselo.*

2) De la misma forma, si uno empieza primero *agregando un 40%* al número 100, obtiene el número 140. Si luego a este número (140) le *descuenta un 40%* (haga la cuenta acá antes de seguir leyendo), el resultado es 84. Es decir, *tampoco se vuelve al número 100 de partida.*

Por un instante, quiero hacer una cuenta que abarque MÁS que al número 100. Si uno empieza con un número A cualquiera, si primero le aumenta un 40% y luego, al número que obtuvo, le deduce un 40%, *no vuelve al mismo número.* Y lo mismo sucede al revés, si uno empieza *deduciendo* primero y *aumentando* después.

¿Cómo se puede *demostrar* esto en general?

a) Para *descontar* el 40% de un número A lo que hay que hacer es:

$$(0,6) \cdot A \qquad (1)$$

Esto, en realidad, calcula el 60% de A, pero es exactamente lo que uno quiere, porque queremos saber a qué número se llega primero cuando uno descuenta el 40% del número A.

b) Para *incrementar* un 40% a un número B cualquiera, lo que hay que hacer es:

$$(1,4) \cdot B \qquad (2)$$

Luego, usando los resultados de (1) y (2), se tiene:

Situación inicial	A
Descuento el 40%	$(0,6) \cdot A$
Aumento el 40% a este número	$(1,4) \cdot (0,6) \cdot A$

Y este último número es

$$(1,4) \cdot (0,6) \cdot A = (0,84) \cdot A \qquad (3)$$

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Luego, no se vuelve al número A original, sino a (0,84) x A, que es 16% menor que el que había al principio.

Si uno va para el otro lado, es decir, comienza incrementando un 40%, se tiene:

Situación inicial	A
Incremento el 40%	(1,4) · A
Descuento el 40% a ese número	(0,6) · (1,4) · A

Este último número es el mismo que teníamos en (3), pero uno descubre que *no se obtiene* A sino un 84% de A. O sea,

$$(0{,}6) \cdot (1{,}4) \cdot A = (0{,}84) \cdot A \qquad (4)$$

Luego, la respuesta a las dos primeras preguntas es que no se vuelve al número original. Lo que sí sucede (interesante) es que, si uno ganara en el casino un 40% del dinero que llevó y luego pierde un 40%, si bien no llegará al mismo número con el que empezó (porque perdió un 16%), llegará al mismo número que si hubiera empezado *perdiendo un 40% y luego recuperando el 40%.*

Para contestar a la tercera pregunta, es fácil comprender que, si en lugar de haber usado el 40% hubiera tomado *cualquier otro porcentaje,* el resultado sería el mismo. El número 40 es un número cualquiera que elegí para hacer la pregunta, pero habría servido cualquier otro.

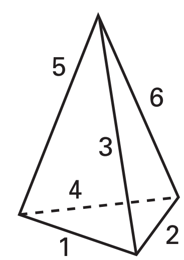
Lo invito a pensar en algo más: si al final del proceso uno termina *descontando el 100%*, el resultado final tiene que ser ¡cero! Luego, si uno empieza con cualquier número A y lo incrementa en un 100% (o sea, lo multiplica por dos), y luego, al resultado (que es 2A) le descuenta el 100%, lo que se obtiene es… ¡cero! Y lo mismo pasa para el otro lado. Incluso más rápido. Porque si uno empieza con A y le descuenta el 100%, se queda con cero. Aunque ahora uno pretenda aumentar el 100%, lo que tendrá seguirá siendo cero. Sin embargo, el número A no se recupera más. ¿No resulta interesante todo esto?

Solución al problema de los seis fósforos

No sé si a usted se le ocurrió (o no) la solución de este problema. En cualquier caso, *nos pone a prueba.*

Si contestó que *no,* que *no* se pueden construir los *cuatro triángulos,* su respuesta es incorrecta. Pero tiene una explicación, algo que nos sucede a la mayoría de los humanos. Uno busca, dibuja, hace gráficos y se desespera porque *no puede encontrar la respuesta.*

Es que el problema no tiene solución… *¡en el plano!* Es decir, si usted intentó hacer un *dibujo* en un papel, o si tomó los fósforos de verdad y quiso encontrar la manera de formar los triángulos, haciendo distintos intentos en una mesa o escritorio, no pudo. Lo que pasa es que, para dar con la solución, lo que hay que hacer es salirse del plano y pensar en tres dimensiones. En realidad, lo que hay que hacer es pensar (y construir… Hágalo usted solo/a) una pirámide con base triangular.



En este caso, si cuenta cada cara de la pirámide, resulta ser un triángulo, y como hay cuatro caras, entonces, hay cuatro triángulos equiláteros, que es exactamente lo que queríamos.

¿Qué enseña esto? Que si uno *no sale de la dimensión en la que se encuentra, es imposible que encuentre la solución.* Nos enseña a pensar distinto, a no quedar restringido o atrapado sólo en lo que uno ve. Peor aún: uno tiene la tentación de abdicar, y de decir que *el problema no tiene solución,* cuando en realidad *sí tiene… sólo que no la encontrará* donde usted la estaba buscando. Ni yo.

Solución al problema de la balanza desbalanceada

Primero, ponga las dos pesas (5 kilos + 5 kilos) sobre *uno* de los platillos. Ponga azúcar en el otro hasta que los dos platillos queden a la misma altura. Cuando lo logró, *retire las dos pesas* y reemplácelas con azúcar hasta que los platillos queden otra vez a la misma altura.

Obviamente, el azúcar que le hizo falta poner en el platillo en donde estaban las dos pesas cumple con lo que usted quería: *¡pesa 10 kilos!*

Solución al problema de los tres recipientes con monedas

Sí, se puede.

Uno retira una moneda del recipiente que dice "Mezcla". Se fija qué tipo de moneda es. Puede ser o bien de 5 centavos o de 10.

Supongamos que es una moneda de 5. Como la etiqueta de la que sacó la moneda decía "Mezcla", está claro que *ese* recipiente *no* es el de la mezcla. Entonces significa que ya encontró el recipiente al cual ponerle la etiqueta que diga "Monedas de 5 centavos".

Por otro lado, el recipiente que tiene la etiqueta que dice "Monedas de 10 centavos" tiene que ser el que contenga la "mezcla". ¿Por qué? Porque, por un lado, no puede ser el de las monedas de 10 ya que, si no, tendría la etiqueta correcta. Luego, sólo puede ser el de las monedas de *5* o el de la *mezcla*. Pero el de las monedas de *5* tampoco puede ser, porque ésa fue la primera que sacamos. Luego, allí debería decir "Mezcla".

Listo. En el primer recipiente va la etiqueta que dice "Monedas de 5 centavos", en el que dice "Monedas de 10 centavos" va la que dice "Mezcla" y en el que queda va la etiqueta que dice "Monedas de 10 centavos".

MORALEJA: uno escuchó muchas veces decir "hay que leer bien el enunciado", o lo que en la vida cotidiana significa "estar muy atento a *todos* los detalles y no pasar nada por alto".

El problema anterior es un buen ejemplo de esto ya que si uno *no* presta atención a la parte del enunciado que dice "*en recipientes que no correspondían*", no puede resolver bien el problema. Como suele decir Gerardo Garbulsky, es un aprendizaje *de vida* muy interesante.

Solución al problema de las cuatro mujeres y el puente

Primer viaje: van las mujeres 1 y 2. En total usaron 2 minutos.

Segundo viaje: vuelve la mujer 2 con la linterna. Pasaron 4 minutos.

Tercer viaje: van las mujeres 3 y 4. Ellas tardan 10 minutos, más los 4 que se habían usado antes, suman 14.

Cuarto viaje: vuelve la mujer 1 con la linterna (que había quedado en la otra orilla luego del primer viaje). Total consumido: 15 minutos.

Quinto (y último) viaje: van las mujeres 1 y 2. Tardan 2 minutos en este viaje, y en total, 17 minutos.

MORALEJA: no interesa si a usted se le ocurrió la solución o la leyó. No importa. Lo que sí interesa es que descubra por qué le costó trabajo. Piense: ¿usted no intentó todas las veces que las mujeres que tardan más (5 y 10 minutos) vayan juntas de una orilla a la otra? Casi seguro que sí. Pero, ¿dónde estuvo la diferencia? Es que en la solución se advierte que una de las dos mujeres que tardan menos (las de 1 y 2 minutos) ¡estaba ya esperando en la otra orilla para traer la linterna de vuelta! De esa forma, uno ahorra minutos y no necesita usar más ni a la de 5 ni a la de 10 minutos.

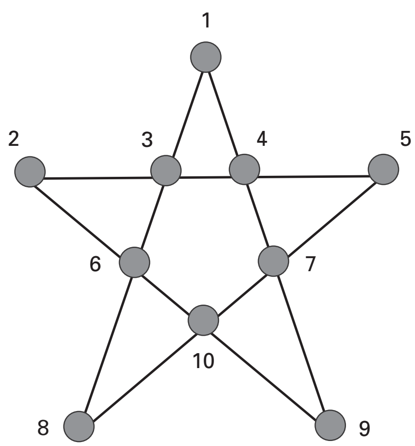
Y ésa es la clave. Haber hecho viajar a las de 1 y 2 minutos primero, para que una de las dos (no importa cuál) se quede allá para

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

traer la linterna cuando hayan llegado las de 5 y 10 minutos. La manera distinta de pensar el problema pasó por ahí.

Pero claro, como en la vida, ahora que uno sabe la solución, todo es más fácil.

Solución al problema de las 10 monedas



Solución al problema de los cuatro interruptores

La ventaja que uno tiene ahora (y no tenía en el momento de pensar el problema original) es que, quien alguna vez lo dedujo, sabe que no alcanza con mirar: ¡hay que tocar la lámpara! Hay que poder medir la temperatura, para poder usar ese dato.

Entonces, pensemos juntos la solución, sabiendo que la temperatura de la lámpara tendrá incidencia. Ahora, veamos cómo.

Si "encendemos" los interruptores 1 y 2 durante 10 minutos y entramos en el cuarto, ¿qué ganaríamos? Si está la luz encendida, no sabríamos si fue el 1 o el 2. Y si está apagada, sólo sabríamos que la lámpara se activa o bien con el 3 o bien con el 4. Y si tocamos la lámpara, no nos va a decir nada tampoco, porque la única manera de que esté caliente es si está encendida. Y si está fría, tampoco nos dice nada, porque puede ser que se active con el 3 o el 4.

Sin embargo, creo que después de haber leído estas últimas consideraciones, usted debe haber pensado algo más. Y creo que sí, que tiene razón. Si uno enciende los interruptores 1 y 2, los deja 10 minutos, antes de entrar apaga el 2 y enciende el 3, y ahora sí entra rápido en la pieza, pensemos si hemos avanzado más.

¿Qué puede pasar al entrar rápido en la pieza? La luz puede estar encendida o apagada, obviamente. Sin embargo, hay una diferencia sensible. Puede que esté encendida pero fría. En ese caso, como no hubo tiempo de que se calentara aún, tiene que ser el interruptor número 3, que fue el último que encendimos. En cambio, si está encendida pero caliente, significa que es el número 1 el que activa la luz, ya que es el que estuvo encendido los 10 minutos previos.

Tenemos el problema resuelto si la luz está encendida. ¿Y si está apagada? (Una vez más, me hago a un costado para que usted siga deduciendo solo/a.) Si está apagada, puede que la lamparita esté o bien fría o bien caliente. Si está caliente, eso significa que el interruptor que desactivé inmediatamente antes de entrar, el número 2, es el que activa la lámpara.

(¿Me sigue con este razonamiento? Si le parece que no lo entendió, retroceda y lea de nuevo. No va en demérito de nadie no entender un argumento…)

Por último, si la lámpara está apagada y además fría, entonces el interruptor que activa la luz es el número 4.

En resumen, el aporte de Fernando fue muy bueno, porque sirvió para generalizar aún más un problema que parecía cerrado con el caso de los tres interruptores.

Solución al problema de las ocho monedas

En la primera pesada, se separan *seis* de las ocho monedas y se ponen *tres en cada platillo*.

¿Qué puede pasar? Hay tres posibilidades:

a) Que los dos platillos estén nivelados.
b) Que el platillo de la izquierda pese más.
c) Que el platillo de la derecha pese más.

Veamos cómo resolver el problema en cada caso.

En el caso (a), como los dos platillos están nivelados, sabemos que entre esas seis monedas *no está la que buscamos*. Tiene que estar forzosamente entre las dos que no pesamos. Como aún nos queda una pesada, ponemos una moneda en cada platillo y, el que pesa menos va a ser el que contiene la moneda que buscamos.

En el caso (b), el platillo de la izquierda pesa más, implica que el de la derecha contiene la moneda que buscamos. Es una de las *tres* que están en ese platillo. De esas tres, ponemos una en el platillo de la izquierda, y una en el de la derecha. Si los platillos quedan nivelados, entonces la moneda que *no usamos* es la que estamos buscando.

En cambio, si los platillos no están nivelados, el que pesa menos contiene a la moneda más liviana. Y listo.

El caso (c) es el mismo que (b), sólo que las monedas que elegimos para la última pesada son las que están en el platillo de la izquierda.

Solución al problema de la barra de chocolate

Lo típico es empezar dividiendo la barra por la mitad. Luego, hacer lo mismo con ambas mitades: es decir, en cada paso, partir cada bloque por la mitad. En realidad, lo interesante es que *no importa en qué orden usted haga los cortes.* La idea es mirar el problema desde otro lugar. Después de cada corte, uno tiene dos bloques de choco-

late. Cuando corte cualquiera de esos dos bloques (independientemente de dónde o cómo lo corte), va a tener tres bloques. O sea, cada vez que corta, agrega un bloque más a los que tenía antes. Luego, después de 199 divisiones, uno tiene las 200 piezas de chocolate que buscaba. Es decir, 199 es la cantidad mínima de cortes que hay que hacer. Menos, no alcanzarían. Más, no le harían falta tampoco.

Lo que esto enseña es que cualquier camino conduce a la solución ideal. Y eso es lo que vale la pena destacar, más allá del problema en sí mismo: haga lo que haga, o haya hecho lo que haya hecho, su solución fue perfecta. Sólo que el argumento que figura en el párrafo anterior es lo que justifica que no hay ninguna otra forma más efectiva.

Solución al problema de un cambio en la rutina

Con los datos que uno tiene, se sabe que la mujer y el marido llegaron de vuelta a la casa 10 minutos antes que de costumbre. Esto significa que la mujer viajó 10 minutos menos en auto, o lo que es lo mismo, 5 minutos menos en el viaje de ida y 5 minutos menos en el viaje de vuelta.

Dicho esto, ahora podemos (juntos) concluir lo siguiente: el marido caminó 55 minutos desde la estación hasta el lugar en donde encontró a la mujer. ¿Por qué?

La mujer siempre pasa a buscar al marido a las 5 de la tarde. Como tuvo que haber manejado 5 minutos menos al ir, eso significa que lo encontró a las 4:55. De esta forma, al dar la vuelta en ese momento, como también manejará 5 minutos menos al volver, llegarán 10 minutos antes que lo habitual.

CONCLUSIÓN: el señor caminó 55 minutos.

Como se ve, una vez conocida la solución, el problema en sí mismo es muy fácil. Claro, es muy fácil una vez que uno conoce cómo se resuelve, pero la moraleja que pretendo sacar con este ejemplo es mostrar cómo muchas veces uno mira un problema desde un lugar equivocado, quiere forzar mentalmente que algo pase y cuando le parece que no le alcanza, protesta porque cree que le faltan datos. Bueno, este ejemplo muestra lo contrario, y una vez más forma parte de la belleza de la matemática, que provee una herramienta de una potencia maravillosa para aprender a pensar.

Solución al problema de las dos tías y los dos colectivos

En lugar de plantear la solución general, lo invito a que descubramos juntos con un par de ejemplos dónde está la dificultad.

Para fijar las ideas voy a suponer que Juan sale en cualquier momento de su casa, pero siempre cuando el segundero del reloj está en el doce. O sea, cuando se cumple justo algún minuto. Esto es: sale 3 minutos después de la hora, o 7 minutos después de la hora, o 18, o 23… pero siempre en un momento exacto. ¿Se entiende? No es una restricción mayor, es simplemente para poder entender mejor lo que sigue. Ahora sí, los ejemplos.

Primer caso

El colectivo rojo pasa a los 0, 10, 20, 30, 40 y 50 minutos después de la hora.

El colectivo azul pasa a los 1, 11, 21, 31, 41 y 51 minutos después de la hora.

Hagamos la cuenta ahora de las veces que Juan tomaría cada colectivo. Él puede salir de su casa a:

0 toma el rojo (que justo llega)
1 toma el azul (que llega justo también)
2 toma el rojo (que llega "y 10", antes que el azul que recién pasa a las "y 11")
3 toma el rojo (por la misma razón)
4 toma el rojo (recuerde que el azul no llega hasta "y 11")
5 toma el rojo…

Y lo mismo sucedería (subir al colectivo rojo) si Juan saliera a las "y 6", "y 7", "y 8", "y 9", "y 10". Es decir, *la única* manera que tiene Juan de tomar el colectivo azul, es si sale y "1, 11, 21, 31, 41, 51", o sea, sólo en seis momentos durante la hora. En cambio, tiene los restantes cincuenta y cuatro minutos para salir de su casa y tomar el colectivo rojo.

Segundo caso

El colectivo rojo pasa a las 0, 10, 20, 30, 40 y 50 minutos después de la hora.

El colectivo azul pasa a las 2, 12, 22, 32, 42 y 52 minutos después de la hora.

Juan puede salir de su casa a:

0 toma el rojo (que justo llega)
1 toma el azul (que llega "y 2")
2 toma el azul (que llega justo en ese momento)
3 toma el rojo (porque llega "y 10", mientras que el próximo azul llega "y 12")
4 toma el rojo (por la misma razón)
5 toma el rojo…

Y siguiendo de esta forma, Juan también tomará el colectivo rojo si sale de su casa cuando se cumplen 6, 7, 8 o 9 minutos antes de la hora. Es decir, en los primeros 10 minutos, tomará el colectivo rojo saliendo en *ocho* oportunidades, y el azul en las *dos* restantes.

Acá me quiero detener y hacer dos preguntas:

a) ¿Entendió por qué hay tanta diferencia entre las veces que Juan toma el colectivo rojo con respecto al azul? Si no, lo invito a que haga un pequeño dibujo, y lea nuevamente el texto. No tiene sentido que avance si no se convenció.
b) Y si entendió, ¿se da cuenta de *por qué* se produce la diferencia entre los dos primeros casos? Es decir, en el primer

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

caso, Juan toma el colectivo rojo nueve veces de cada diez, y el azul, la restante. En el segundo caso, toma el colectivo rojo ocho veces de cada diez, y el azul en las dos restantes. Si uno siguiera con el proceso, y el colectivo azul pasara cuando se cumplen 3, 13, 23, 33, 43 y 53 minutos pasada la hora, en ese caso Juan tomaría el colectivo rojo siete veces de cada diez, y el azul, las otras tres veces.

Es decir que lo que importa es la *diferencia relativa* entre el momento en que pasa un colectivo y cuando pasa el otro.

¿Habrá algún caso en que la cantidad de veces que tome el azul y el rojo sea la misma? (No lea la respuesta que voy a escribir inmediatamente acá abajo… Piénsela usted).

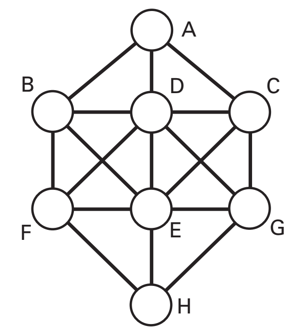
La respuesta es sí, y se produce cuando la diferencia relativa entre las llegadas de los dos colectivos es de justo cinco minutos. En ese momento, Juan toma el colectivo rojo cinco veces de cada diez, y el colectivo azul, las cinco veces restantes.

¿Qué quiero decir con *diferencia relativa*? Llamo así a la distancia de tiempo entre la llegada de los dos colectivos, o sea, cuánto tiempo tiene que transcurrir para que pase uno de cada color. De esta manera, una vez que pasa uno de los dos colectivos, el otro puede pasar al minuto, a los 2 minutos, a los 3, a los 4, etc. Si tarda *menos* de 5 minutos en llegar, ése será el que Juan tomará menos. Si tarda *más* de 5 minutos en pasar, ése será el que Juan tomará más veces. Y si *justo* pasa a los 5 minutos, en ese caso, Juan visitará a sus tías con la misma frecuencia.

Solución al problema de los ocho números conectados

Veamos. El problema tiene diferentes soluciones, pero todas bastante similares entre sí. La parte interesante es *mostrar* que uno en realidad no *encuentra* la solución sino que *la descubre,* o mejor dicho, *la construye***.**

Analicemos la situación de cada vértice, y veamos cuántos segmentos llegan o salen de él.



A los vértices A y H llegan (o salen, pero es lo mismo) *tres* segmentos.

A los vértices B, C, F y G llegan *cuatro* segmentos.

A los vértices D y E llegan *seis* segmentos.

Es decir que, si bien hay mucha *simetría* en el dibujo (cosa que vamos a enfatizar al final), podemos agrupar los vértices en tres, de acuerdo con el número de segmentos que llegan o salen a ellos:

a) A y H
b) B, C, F, y G
c) D y E

Ahora lo invito a pensar cada paso conmigo, parando en cada uno para reflexionar (eventualmente solo/a), tratando de entender, o eventualmente, de avanzar sin leer lo que sigue.

Analicemos los números que tenemos que distribuir: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. ¿Cuántos consecutivos tiene cada uno?

El número 1 tiene *un* solo consecutivo: el 2.

El número 8 tiene *un* solo vecino: el 7.

En cambio, los restantes (2, 3, 4, 5, 6 y 7) tienen *dos consecutivos* cada uno.

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Es decir, en el lugar donde ponga, digamos el 2, ¿qué números pueden estar conectados con él? Hay *cinco números:* el 4, 5, 6, 7 y 8. O sea que el número 2 sólo puede estar ubicado en un vértice que no tenga más que cinco segmentos que entran o salen. Luego, no puede ir ni en D ni en E.

Lo interesante de esto que acabo de escribir es que no sólo ocurre con el número 2, sino también con el 3, 4, 5, 6 y 7.

MORALEJA: los números 2, 3, 4, 5, 6 y 7 no pueden estar ubicados ni en el vértice D ni en E. Esto nos deja en una buena posición, porque ahora sabemos que si el problema va a tener solución, la única alternativa para D y E es que hacia allí vayan –indistintamente– los números 1 y 8.

Veamos: como del vértice D salen *seis* segmentos, si pusiéramos allí el número 1, ¿se violaría algo de lo que pide el problema? No lo creo. Veamos: el número 1 tiene sólo un número consecutivo: el 2. Luego, quedan exactamente seis números para usar: 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Es decir, podemos poner el número 1 en el vértice D.

De la misma manera –ya que son casos simétricos– podemos poner el número 8 en el vértice E (y con esto ya tenemos dos números ubicados y dos vértices ocupados).

Ahora vamos a ver cómo, habiendo ubicado el número 1 allí, *condiciona fuertemente* todo lo que sigue. Como el número 1 está ubicado en el vértice D, del que salen *seis segmentos,* eso significa que voy a tener que usar, *en los seis vértices* que están conectados con D, a los *seis números que* no son consecutivos con 1. Es decir, estamos obligados a poner el número 2 en el vértice H, ya que es el único que no está conectado con el vértice D (que es donde está el número 2).

Con el mismo argumento, como el número 8 está ubicado en el vértice E, el único número consecutivo con el 8 (el número 7) tiene que ir ubicado en el vértice A.

Y esto ya nos ha allanado el camino. Hasta acá tenemos ubicados cuatro números que ocupan cuatro vértices:

En el vértice A va el número 7.
En el vértice H va el número 2.
En el vértice D va el número 1.
En el vértice E va el número 8.

Si mira el dibujo, verá que tenemos ubicada *la columna vertebral* del problema. Sólo nos falta llenar las puntas. Pero, claro, ahora hay más libertad para moverse. Necesitamos ubicar los números (3, 4, 5 y 6).

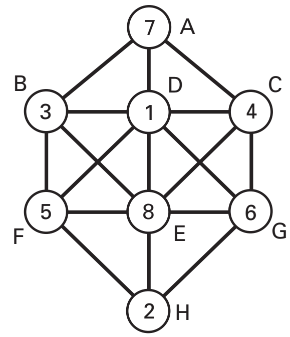
El vértice B está conectado con cuatro vértices (fíjese en el dibujo por favor), y como en el A ya está el 7, significa que en B no puede ir el 6. Podemos poner el 3 o el 4 o el 5. Elijamos el 3.

Ahora, como en B está el número 3, de los que quedan (4, 5 y 6), en F no puede ir el 4, pero parecería que cualquiera de los otros dos sí. Sin embargo, si elijo el 6, después me van a quedar para los vértices C y G dos números consecutivos: el 4 y el 5. Luego, *no queda más alternativa* que poner el número 5 en el vértice F. Ahora, ya se termina el problema, porque sólo quedan por distribuir los números 4 y 6, que ubicamos en los vértices C y G respectivamente. Pero como en el vértice A está el número 7, en C no puede ir el 6. Forzosamente, entonces, tiene que ir el 4. Y en el vértice G irá el último que nos queda: el número 6.

La distribución entonces es:

A = 7
B = 3
C = 4
D = 1
E = 8
F = 5
G = 6
H = 2

Ésta es entonces la solución del problema:



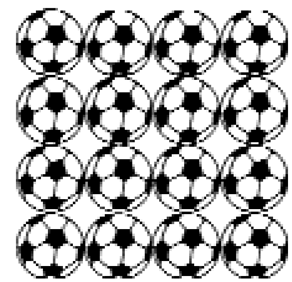
Aquí van algunas puntualizaciones.

a) El problema es simétrico, en el sentido de que se puede dar vuelta el dibujo, ponerlo “cabeza abajo”, y se obtiene lo mismo. Hay vértices que son intercambiables por esta simetría y, por lo tanto, haber usado el número 1 en el vértice D, y el número 8 en E es una de las elecciones posibles. Pero pude haber elegido al revés. Nada habría cambiado. Y ésa es una moraleja importante, porque muchas veces, cuando uno se enfrenta con un problema, hay ciertos factores de simetría que permiten “grados de libertad” en la elección.
b) El razonamiento que llevó a la solución es “casi inductivo”, en el sentido de que “fuimos construyendo” la solución. Pero no sabíamos si la había o no. Podría no haber habido solución, pero si existía, la teníamos que encontrar con el tipo de argumentos que utilizamos. Esto también es hacer matemática.
c) Más allá de que usted se enfrente o no con problemas de este tipo, las argumentaciones descriptas más arriba son características de determinado tipo de situaciones que se plantean en la matemática así como en la vida. Aprender a contar, a combinar, a estimar. En todo caso, es como aprender a pensar hacia adelante.

En definitiva, es una manera de *educar el razonamiento, y de aprender a pensar.*

Solución al problema de Fermi

Voy a tratar de estimar el número de pelotas que entran en el campo de una cancha de fútbol. Sin hacer un cálculo perfecto (ni mucho menos), creo que puedo estar tranquilo si *estimo* que una pelota apoyada no *mide* más de 25 centímetros. Es decir, uno puede afirmar que en *un metro* uno puede poner *4 pelotas,* y por lo tanto, en *un 1 metro cuadrado* entran 16 pelotas.



Ahora bien, ¿cuántos metros cuadrados tiene un campo de fútbol? Para eso, hay que tener idea de las dimensiones del lugar en donde se juega al fútbol. Otra vez, sin pretender ser *exactos,* puedo considerar que mide 100 (cien) metros de largo y 70 metros de ancho. Es decir, son unos 7.000 metros cuadrados.

Aquí podemos hacer dos cosas:

a) Si usamos el dato de que entran 16 pelotas en *un* metro cuadrado, hay que multiplicar 16 por 7.000 para saber cuántas entran en una cancha. Resultado (aproximado, por cierto):

112.000 pelotas

© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

b) Si en lugar de hacer la estimación usando los metros cuadrados (7.000) usamos el dato de que entran 4 pelotas por metro, se tienen 400 pelotas por el largo de la cancha. Por otro lado, ahora "a lo ancho" se tienen 4 x 70 = 280 pelotas. Luego, hay en total (aproximadamente, otra vez):

$$400 \times 280 = 112.000 \text{ pelotas}$$

MORALEJA: aun en un estadio como el de River (o en cualquier otro de esas dimensiones), si uno distribuyera pelotas sobre el campo de juego, alcanzaría (y sobraría) para darle una pelota de recuerdo a cada espectador.

Si a usted le interesa la precisión, agrego aquí algunos datos:

a) Hay 44 estadios en el mundo (de acuerdo con la página de la FIFA) que admiten más de 100.000 espectadores. El más grande del mundo es el Maracaná, con cerca de 200.000, por lo que allí es posible que las pelotas no alcancen, aun teniendo en cuenta que las medidas del campo son las más grandes del mundo.
b) Las medidas "oficiales" de una pelota son entre 68 y 70 centímetros de circunferencia. Si uno usa la fórmula para calcular el perímetro de una circunferencia

$$(\pi) \times (\text{diámetro de la pelota}) = 70.$$

Entonces,

$$\text{diámetro de la pelota} = 70 / \pi = (\text{aprox.})\ 22{,}29 \text{ cm}$$

Luego, hicimos bien en estimar el diámetro de la pelota como de 25 centímetros, porque, al hacer la cuenta, hubieran entrado entonces *más pelotas* en el campo. Pero igual, aun entrando *menos,* hubiéramos podido satisfacer a todos los espectadores.

Solución al segundo problema de Fermi

Si sigo con la estimación de que cada pelota tiene 25 centímetros de diámetro, entonces cada caja tiene (25 x 25 x 25) = 15.625 centímetros cúbicos.

¿Cuántas cajas entran en un metro cúbico? Como en un metro cúbico entran 1.000.000 de centímetros cúbicos, dividiendo

$$1.000.000 / 15.625 = 64 \text{ (aprox.)}$$

Luego, en un metro cúbico entran *64 cajas,* o sea, 64 pelotas. Como cada camión puede transportar 20 metros cúbicos, puede llevar entonces 1.280 pelotas (o cajas). Pero necesitamos transportar 112.000 pelotas, por lo que necesitaremos

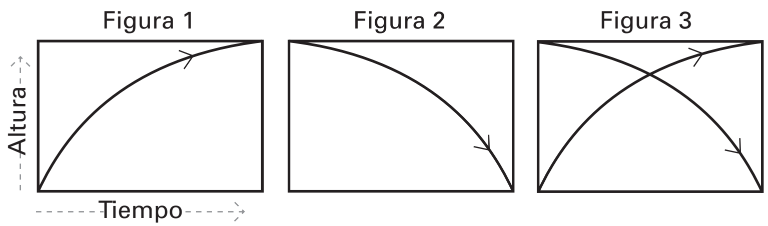
$$112.000 / 1.280 = 87{,}5 \text{ camiones}$$

En definitiva, para transportar todas las pelotas necesitamos una flota de casi 90 camiones con una capacidad de 20 metros cúbicos de mercadería, para llevar más de 112.000 pelotas hasta la cancha.

Solución al problema de la montaña

Estoy seguro de que este problema debe de tener muchas maneras de atacarlo. Yo voy a presentar una, que es la que me queda más cómoda, pero valdrá la pena que le dedique tiempo, antes de leer lo que sigue.

El problema parece muy complicado, porque, como uno *no sabe* qué hizo el hombre ni al subir ni al bajar (ya que pudo quedarse descansando horas, subir, bajar, volver a subir, volver a bajar, etc.), ¿cómo puede hacer uno para contestar el problema en *todos* los casos? Veamos los siguientes dibujos:



¿Qué tendrán que ver estos gráficos con el problema? Más aún: ¿qué tendrá que ver este problema con "la matemática"?

Hagamos de cuenta que en lugar de un solo señor, hay dos. Uno sale desde abajo hacia arriba, y el otro, al revés, de arriba hacia abajo. En la figura 1, se ve al primero, y en la figura 2, al segundo. Lo que está representado, por un lado, es el tiempo que van recorriendo (en el segmento horizontal de cada rectángulo), y la altura en la que se encuentran en cada momento está representada por el segmento vertical. Ambos salen a las cero hora del lunes, y llegan a las 24 a destino. Eso sí: como los dos *usan* el mismo camino, en algún momento del recorrido *¡se van a tener que encontrar!* (y eso es lo que muestra la figura 3). Es que más allá de lo que hagan durante el trayecto (descansar un poco, subir, bajar, quedarse en un lugar durante mucho o poco tiempo… no importa), como uno sube y el otro baja tiene que haber al menos un lugar de la montaña en el que se tropiezan uno con otro. ¡Y eso es lo que necesitábamos!

¿Por qué? Es que esta forma de pensar el problema permite resolver lo que había planteado originalmente. ¿Cómo usar este modelo, entonces, para el caso que nos ocupa? Bueno, recién suponíamos que había *dos* señores, uno que subía y otro que bajaba, pero *el mismo día.* De hecho, si ahora tomáramos el problema original, y en lugar de dos hombres hubiera uno solo, lo que acabamos de ver demuestra que tiene que haber alguna altura de la montaña (al menos una) por donde el hombre pasó al subir y al bajar ¡a la misma hora! Y justamente eso era lo que queríamos demostrar.

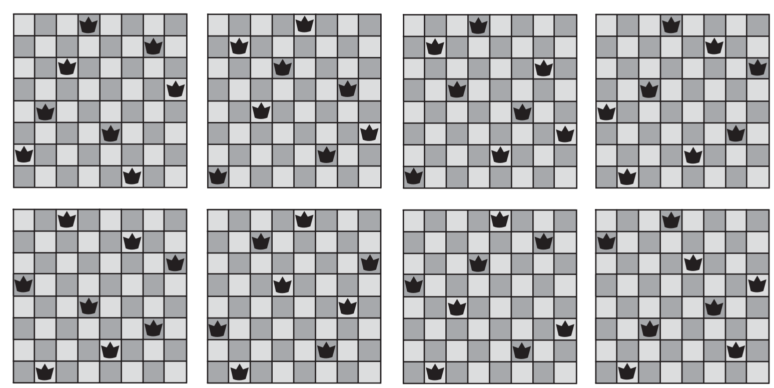
Por último, ¿qué tiene que ver con la matemática? Es que con la figura 3 uno ve que, como las dos *curvas* que representan las trayec-

torias *son continuas* y unen, una el extremo superior izquierdo con el inferior derecho, y la otra, el inferior izquierdo con el superior derecho… esas dos curvas ¡se tienen que cortar al menos una vez! Y eso es justamente lo que me hacía falta para demostrar lo que queríamos.

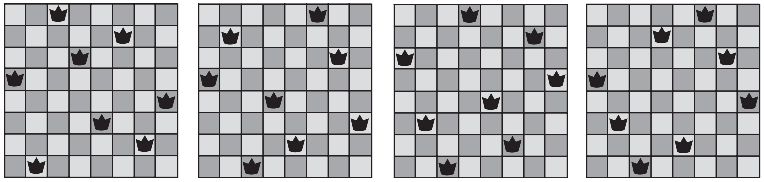
Lo que este problema enseña es que, si bien el planteo original lo exhibe como muy complicado y difícil de pensar, puesto de la otra manera, parece una tontería. El objetivo es entender que muchas veces vale la pena *pensar distinto,* desde otro ángulo, aunque –en principio– no parezca promisorio. Frente a un problema entonces, por más inaccesible que parezca, es posible que haya otra forma de mirarlo que lo haga sencillo. Es sólo cuestión de paciencia y entrenamiento.

Solución al problema de las ocho reinas

No se conoce un método que provea todas las soluciones, salvo el que consiste en ir consiguiéndolas de a una. Lo que sí se sabe es que, en el caso de las ocho reinas, hay sólo 12 soluciones primitivas, es decir, aquellas que son genuinamente diferentes, en el sentido de que no se puede empezar en una de ellas y, por reflexiones y/o rotaciones, llegar a otra. En total, aceptando rotaciones y reflexiones, hay 92. Reproduzco algunas de ellas:



© Siglo XXI Editores Argentina S.A.



Es interesante notar que uno puede *generalizar este hecho* y *ampliar y/o disminuir el número de reinas,* así como *ampliar y/o disminuir el correspondiente tablero.*

Es decir, uno puede tomar un tablero de 14 x 14 y el problema se transforma en ubicar 14 reinas que no se puedan *atacar.*

O hacer lo mismo con un tablero de 4 x 4, con *cuatro reinas.*

Para aquellos que estén interesados en algunos casos más generales, se tiene la siguiente tabla, donde se indica la distribución posible según el número variable de reinas:

Reinas	Primitivas	Distintas
1	1	1
2	0	0
3	0	0
4	1	2
5	2	10
6	1	4
7	6	40
8	12	92
9	46	352
10	92	724
11	341	2.680
12	1.787	14.200
13	9.233	73.712
14	45.752	365.596
15	285.053	2.279.184

Por otro lado, uno puede plantear *otros problemas relacionados con éste.* Por ejemplo, en un tablero de 8 x 8, ¿cuántos caballos o alfiles o reyes se pueden poner? Aquí, como siempre, le sugiero realizar una pausa y dedicarle un tiempo a pensar cada una de estas situaciones sin seguir leyendo lo que sigue.

Pero el libro continúa: se sabe que en un tablero de 8 x 8, se pueden ubicar 32 caballos, o bien 14 alfiles, o bien 16 reyes, sin que ninguno ataque a ningún par.

Solución al problema del cronómetro y las infinitas monedas

La tentación es decir, naturalmente, que en la caja hay infinitas monedas. De hecho, después de los primeros 30 segundos hay 9 monedas, después de los 45 hay 18 monedas. Pasados 52 segundos y medio, hay 27 monedas, y luego de 56 segundos y un cuarto, 36 monedas. Es decir, luego del primer tramo, quedaron 9 monedas; después del segundo, 18. Luego del tercero, 27. Luego del cuarto, 36. La idea es que, después de cada parte del proceso, aumentamos en 9 la cantidad de monedas. Más aún: si uno "detuviera" el reloj en cualquiera de los pasos, en la caja habría un número de monedas que sería un múltiplo de 9. (¿Entiende por qué? Es que en cada paso ponemos 10 y sacamos 1.)

Luego de este razonamiento que acabo de hacer, es esperable que uno tienda a suponer que hay infinitas monedas en la caja cuando termina el proceso. Sin embargo, eso es falso. En realidad, en la caja ¡no quedó ninguna moneda! Veamos por qué. ¿Qué moneda puede haber quedado en la caja? Elija usted un número de moneda cualquiera (claro… como usted no me pude *comunicar* cuál eligió, voy a elegir yo, pero lo invito a que haga el razonamiento por su cuenta): por ejemplo, la número 3.

¿Pudo haber quedado la número 3 en la caja? ¡No!, porque ésa fue la que su amigo sacó luego del tercer paso.

¿Pudo haber quedado la número 20 dentro de la caja? ¡No!, tampoco ésta, porque luego del paso número veinte sabemos que esa moneda la sacamos. ¿Podrá ser la número 100? Tampoco, porque luego del centésimo paso, la sacamos a esa también! Entonces, otra vez: ¿qué moneda quedó dentro de la caja? Como se advierte, cualquier moneda que crea que quedó adentro, tendrá que tener un número (digamos el 147.000), pero, justamente, al haber llegado al paso 147.000 seguro que su amigo sacó también esa moneda de la caja.

MORALEJA: a pesar de que atenta fuertemente contra la intuición, el hecho de ir sacando las monedas de la forma en la que describí más arriba, garantiza que, cuando pase el minuto, *¡no quedará ninguna moneda en la caja!*

Soluciones al problema de las hormigas

Piense conmigo lo siguiente. Supongamos que uno tiene *dos hormigas* nada más. Si las dos caminan en la misma dirección, al final, antes de completar un minuto, se caerán las dos. Así, si alguna de las dos (o las dos) estaba en un extremo del palo y empieza a caminar hacia adentro, tardará exactamente un minuto en caerse. En cualquier otro caso, se caerán *antes del minuto*.

En cambio, si caminan en dirección contraria, en el momento de enfrentarse, como cada una sale para el lado contrario del que venía caminando, uno podría pensar que en realidad es como si fueran transparentes: ¡se atraviesan como si no existiera la otra! Antes de avanzar con la lectura, convénzase de que entiende lo que termina de leer. De nuevo: cuando dos hormigas chocan, da lo mismo que cada una dé la vuelta y empiece a caminar para el otro lado, que pensar que en realidad se cruzaron, como si la otra no hubiera existido. Esta manera de modelar el problema, es decir, de olvidarse de que arrancan en distintos sentidos, es muy útil, no tanto para cuando uno tiene sólo dos hormigas, sino para cuando uno tiene cien, como en el problema original.

Para contestar entonces la pregunta a), ahora que tenemos la herramienta nueva de que da lo mismo pensar que se cruzan cada vez que se encuentran dos, me parece que es más fácil encontrar la respuesta. (¿No tiene ganas de pensarla solo/a?)

En todo caso, la escribo acá: alcanza con un minuto porque, como todas las hormigas caminan a un metro por minuto, arranquen desde donde arranquen, como ya nada las va a detener y uno puede hacer de cuenta que nunca cambian de dirección porque cruzan de largo, entonces, en un minuto –como máximo– ¡se caen todas!

Para la parte b) el problema ya no es tan sencillo. ¿Qué es lo que lo hace diferente? Ahora, el *modelo* que hemos inventado para que uno pueda hacer de cuenta que al chocar, en lugar de cambiar de dirección, siguen de largo, tiene dos dificultades. El primer problema son los bordes de la barra. Ahora, las hormigas no se caen. Rebotan y dan vuelta en la otra dirección. Y el segundo problema tiene nombre propio: se llama Alicia. Ahora hay que seguirle el rastro. Ya veremos cómo hacer.

Empecemos con el primer problema: los bordes. Olvidémonos por un momento de Alicia y consideremos sólo una hormiga. Pensemos juntos qué le pasa a una hormiga que empieza a 10 centímetros del extremo izquierdo de la barra horizontal donde está parada, tal como indica la figura.

Supongamos que la hormiga arranca en la dirección de la flecha. En algún momento llega al borde de la derecha. Allí, rebota y da la vuelta. ¿Dónde termina su recorrido? La hormiga termina su caminata en el lugar marcado con 90 cm, porque en el minuto que tiene para caminar avanza un metro, pero como salió en el lugar que dice

10 cm, entonces caminó 90 centímetros hasta llegar al borde, luego dio la vuelta y sólo le alcanzó para volver otros 10 cm. Si hubiera partido de los 20 cm, ¿en dónde terminaría? Bien, caminaría 80 centímetros hasta llegar al borde derecho, y luego le quedarían otros 20 centímetros para caminar en la otra dirección.

MORALEJA: quedaría detenida en el lugar marcado en los 80 cm.

Así, cualquier hormiga que parta del punto x cm recorre hasta el borde derecho un tramo, luego rebota, y finalmente se detiene al llegar a una distancia x del borde derecho. O sea, a una distancia $(1 - x)$. Por supuesto, lo mismo pasaría si, en lugar de caminar hacia la derecha, caminara hacia la izquierda. En resumen: una hormiga que empieza en la posición x, no importa si sale para la izquierda o para la derecha, siempre termina su caminata en la posición $(1 - x)$. (Haga la prueba: verifique lo que está dicho más arriba. No se someta a lo que está escrito. Pelee contra el argumento hasta entenderlo o demostrar que estoy equivocado).

Volvamos al problema original. Supongamos por un momento que Alicia no está. Cada hormiga que sale a una distancia x del borde izquierdo, terminará a una distancia x, pero del borde derecho. Y viceversa. Seguro que, con el modelo que hicimos, no va a ser la misma hormiga. Pero eso no importa. Lo que interesa es que, si había una hormiga a una distancia x del borde izquierdo, al terminar el minuto habrá una hormiga a una distancia x del borde derecho.

Ahora hablemos como si pudiéramos identificar a cada hormiga. Si hay una que empieza a la izquierda de otra, esa posición rela-

tiva se va a mantener. No hay manera de que una hormiga le pase por encima a otra. Van a cambiar las posiciones, pero no cuál está a la izquierda de cuál.

Ahora concentrémonos en Alicia. Ella empieza justo en la mitad, en el punto (1/2). Está claro que, al finalizar el minuto, habrá una hormiga en la mitad. Pero ¿qué tiene que pasar para que *sea* Alicia?

Cuando empieza el proceso, Alicia tiene, digamos, 20 hormigas a la izquierda y 80 a su derecha. Al cabo del minuto, habrá una hormiga en la mitad –no necesariamente Alicia– *que tendrá 80 hormigas a su izquierda y 20 a su derecha, guardando las posiciones relativas que tenían al principio*. En general, si Alicia empezó con n hormigas a su izquierda y $(100 - n)$ a su derecha, al finalizar el minuto habrá una hormiga en la mitad que tendrá $(100 - n)$ a su izquierda y n a su derecha.

Para finalizar, lo que tiene que pasar para que Alicia sea la que quede en el medio otra vez, es que la cantidad que tenía a la izquierda y a la derecha sean la misma. O sea que

$$n = (100 - n)$$

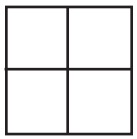
Y esto sucede, si $n = 50$.

Lo notable de este resultado es que no importa en qué lugar estaban las 50 hormigas que están a la derecha y a la izquierda de Alicia. Basta con que la cantidad sea 50 de cada lado para que Alicia termine en el lugar en el que empezó. Esto contesta las preguntas b) y c).

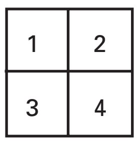
MORALEJA: aunque usted no lo crea, esto también es hacer matemática. Y hacer modelos para poder pensar problemas es no sólo hacer matemática, sino matemática fina. De eso se trata: de disfrutar de pensar.

Solución al problema de las dos preguntas (en una)

Empecemos con un tablero de 1 x 1. En este caso, hay *un solo cuadrado posible*. Si tuviéramos un tablero de 2 x 2, entonces debemos considerar dos tipos de cuadraditos posibles: los de 2 x 2 y los de 1 x 1.

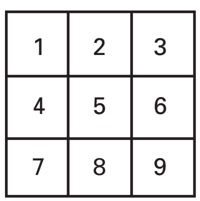


Como *todo* el tablero es de 2 x 2, hay un único cuadrado de ese tamaño. Pero de 1 x 1 hay cuatro (numerados como se ve en la figura).

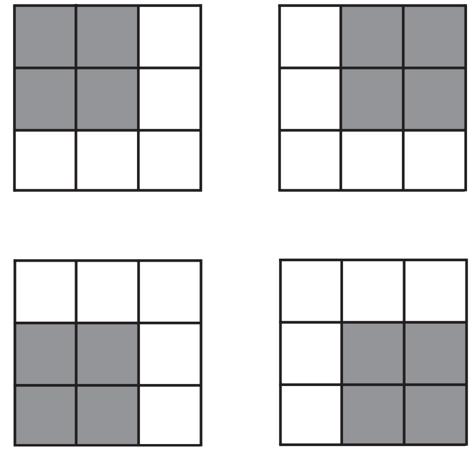


Ahora, si uno tiene un tablero de 3 x 3 hay más cuadraditos a considerar. Están los de 1 x 1, los de 2 x 2, y el de 3 x 3.

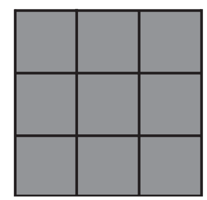
De 1 x 1 hay 9 (o sea, 3^2).



De 2 x 2 hay 4 (o sea, 2^2).



De 3 x 3 hay 1 (o sea, 1^2).



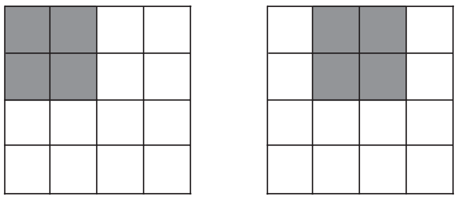
Lo invito a que siga solo, hasta poder *conjeturar* una ley un poco más general. Hago yo un par de pasos más.

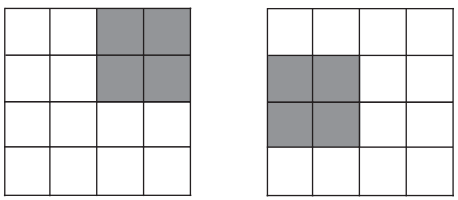
Si fuera un tablero de 4 x 4, entonces hay:

De 1 x 1 hay 16 (o sea, 4^2).

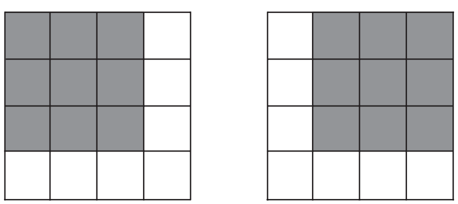
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

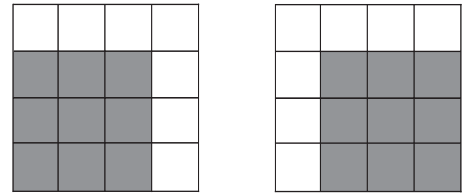
De 2 x 2 hay 9 (o sea, 3^2).





Etcétera.
De 3 x 3 hay 4 (o sea, 2^2).





De 4 x 4 hay 1 (o sea, 1^2).

El último (que sirve para contestar la primera pregunta): en un tablero de 8 x 8, hay:

De	1 x 1	hay	64 (o sea, 8^2)
De	2 x 2	hay	49 (o sea, 7^2)
De	3 x 3	hay	36 (o sea, 6^2)
De	4 x 4	hay	25 (o sea, 5^2)
De	5 x 5	hay	16 (o sea, 4^2)
De	6 x 6	hay	9 (o sea, 3^2)
De	7 x 7	hay	4 (o sea, 2^2)
De	8 x 8	hay	1 (o sea, 1^2)

En este caso, entonces, hay en total 204 cuadrados (basta con sumar 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64).

El objetivo de este problema es mostrar cómo, con casos particulares, se puede conjeturar una *ley general.* Es decir, si uno tuviera un tablero de *n x n* cuadraditos, y le preguntaran cuántos cuadrados se pueden formar, la respuesta es:

De	1 x 1	hay	(n^2)
De	2 x 2	hay	$(n - 1)^2$
De	3 x 3	hay	$(n - 2)^2$
De	4 x 4	hay	$(n - 3)^2$
......			
De	(n – 2) x (n – 2)	hay	3^2
De	(n – 1) x (n – 1)	hay	2^2, y

De $n \times n$ hay $1^2 = 1$

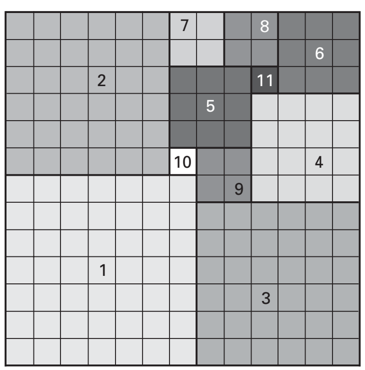
En todo caso, lo que queda pendiente es *saber* hacer la siguiente cuenta:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = \{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)\} / 6$$

No es fácil *conjeturarla* sin ayuda, por eso incluyo el resultado y sugiero que quienes lean esta fórmula me ayuden a pensar cómo se puede *deducir o inferir geométricamente.*

Solución al problema del acolchado cuadrado

En el libro *Amusements in Mathematics*, Dudeney escribió que él creía que ésta es la única solución al problema, o sea, que la menor cantidad de cuadraditos posibles es de 11. Los cuadrados más grandes tienen que tener esas medidas, y ubicados de esa forma. Por supuesto, se podrían encontrar *otras* ubicaciones, pero sólo *reflejarían* lo que se ve en esta figura. El problema de Dudeney se puede generalizar de varias maneras. Una de ellas (la más interesante, creo) es la de considerar cuadrados de distintas dimensiones (*n* x *n*, para cualquier *n*) y tratar de hacer lo mismo que en el caso anterior (13 x 13).



Los casos más conocidos son:

n	
1	1
2	4
3	6
4	7
5	8
6	9
7	9
8	10
9	10
10	11
11	11
12	11
13	11
14	12

en donde la columna de la izquierda indica el número de cuadrados por lado, y la de la derecha, el número de *cuadraditos* en los que se puede descomponer el cuadrado grande.

Solución al problema del ramo de rosas

A los efectos de facilitar la lectura, voy a abreviar los nombres de las rosas. A las rosas *rojas* las voy a llamar con la letra *R*. A las rosas *blancas*, con la letra *B*, y a las rosas *azules*, con la letra *A*.[33]

Con todo, quiero pedirle un favor al lector o lectora: ¡no abandone ahora! Acompáñeme en el razonamiento. Créame que se va a entretener pensando. No deje que lo intimide la forma como se presentan los datos más abajo. Es sólo una manera abreviada de poder

[33] En realidad, estoy usando la letra *R* para hacer referencia al *número* de rosas Rojas que hay, la letra *B* para remitir al *número* de rosas Blancas que hay y lo mismo con el *número* de rosas Azules, para el que uso la letra *A*.

escribirlos, como si usted se anotara algo en una libreta de apuntes, y pusiera sólo las iniciales porque le ahorra energía y no le hace falta escribir *todas* las veces lo mismo.

Ahora sí, podemos reescribir los datos que tenemos y que aparecen en página 49.

a) $R + B = 100$
b) $B + A = 53$
c) $A + R < 53$ (donde $<$ significa *menor que*)

Se sabe además que,

d) hay *por lo menos dos rosas de cada color*

Llamemos x a la suma de las azules más las rojas. O sea,

e) $A + R = x$

Por lo tanto, fíjese que, de lo que dicen c) y e) se deduce que

f) $x < 53$

Tome ahora los datos que aparecen en a), b) y e).

$$R + B = 100$$
$$B + A = 53$$
$$A + R = x$$

Si sumamos lo que está a la izquierda, *tiene que resultar igual* a lo que está a la derecha. O sea:

g) $2R + 2B + 2A = 153 + x$

Luego, como el término de la izquierda es múltiplo de dos (fíjese que es la suma de tres números pares), entonces el de la dere-

cha también tiene que ser un número par. Como 153 no es un número par, la única alternativa que queda es que ¡x sea impar también! Es que, como 153 es impar, la única manera de que al sumarle otro número la suma resulte par, es que ese número (en este caso x) sea impar también.

Luego, acabamos de llegar a una nueva conclusión:

h) x es *impar.*

Ahora, *sumemos* los datos que aparecen en b) y e).

Se tiene:

$$(A + B) + (A + R) = 53 + x$$
$$2A + B + R = 53 + x$$
$$2A + (B + R) = 53 + x$$

y usando el dato a), sabemos que $(B+R) = 100$.

Luego,

$$2A + 100 = 53 + x$$

Despejando (o sea, pasando el número 53 del lado izquierdo), se tiene:

$$2A + (100 - 53) = x$$

i) $2A + 47 = x$

Y este último es un dato muy interesante. Quiero recordar acá lo que decían los datos f) y h):

j) $x < 53$

k) x es *impar.*

Luego, si uno *mira* el dato i), como sabe por h) que *x tiene* que ser impar, y por f) que tiene que ser *menor* que 53… las únicas alternativas que le quedan a *x* son, o bien

$$x = 49$$

o bien

$$x = 51$$

(Esto sucede porque, por el dato que figura en i), *x* tiene que ser mayor que 47, ya que A es mayor que cero, porque sabemos que hay –al menos– dos rosas de cada color, y por lo tanto A no puede ser cero). Pero, por otro lado, como *x* tiene que ser *menor* que 53, entonces: o bien es 49 o bien es 51).

Y éste es el paso final, para que $x = 49$, el dato que figura en i) obligaría a que A = 1, pero esto es imposible, porque en el planteo el problema decía que de cada color había por lo menos *dos* rosas.

Luego, la conclusión es que x = 51, y por lo tanto,

$$A = 2$$

Y esto acaba de resolver el problema. Sabiendo que A = 2, entonces, del dato que figura en b) se deduce que B = 51, y sabiendo que B = 51, entonces, de a) uno desprende que R = 49.

Resumiendo:

$$A = 2$$
$$B = 51$$
$$R = 49$$

Solución al problema del reproductor de CD

Uno puede pensar que cada canción en el CD tiene un número (con el que fue grabada y que figura en la "solapa") y por lo tanto,

se trataba de buscar "todos los posibles órdenes" de reproducir las canciones.

Lo que acabamos de ver es que, con el mismo "modelo", las distintas "formas" de escuchar las canciones son en total: 3.628.800, lo que significa que tardará 3.628.800 días hasta volver a escucharlas de nuevo en alguno de los órdenes previos. Lo que implica (dividiendo este número por 365, para calcular cuántos años tienen que pasar) que uno tendrá que esperar más de 9.941 ¡años! para volver al orden inicial.

Más allá de las cuentas, lo interesante es el "modelo" que sirve para "contar" todos los posibles casos, sin tener que hacer una "lista" de todos los posibles resultados. Haber pensado este problema permite resolver muchísimos otros de características parecidas.

Un par de observaciones finales:

a) La rama de la matemática que se dedica a "contar" (sin tener que "listar") se llama "combinatoria". Los problemas de combinatoria son preciosos y no necesariamente muy sencillos. Hay gente que tiene mucha facilidad para "imaginar" formas de "contar" que son verdaderamente ingeniosas.

b) Tomar un número cualquiera, digamos el 4, y hacer el siguiente cálculo:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

se escribe 4!, y se lee "4 factorial" o "el factorial de 4".

Hacer $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

De hecho, el resultado del problema planteado (o sea, de las posibles formas de escuchar las 10 canciones) es 10!, o sea, el factorial de diez.

A manera de ejemplo, que sugiere cuán "grande" se hace el "factorial de un número" aun para números pequeños, fíjese en esta lista:

$2! = 2$ (factorial de 2, es igual a 2)
$4! = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2$ (factorial de 4, es igual a 24)

$5! = 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ (factorial de 5, es igual a 120)
$7! = 5040 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ (factorial de 7, es igual a 5.040)
$10! = 3.628.800 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$
$15! = 1.307.674.368.000$

Una reflexión sobre este último número 15!: fíjese que, si uno tuviera 15 libros en un estante de una biblioteca y se preguntara de cuántas formas los puede ordenar (una pregunta "inocente" si se quiere), tendrá como respuesta "más de un billón de posibilidades".

Y por último, si uno calcula:

$$20! = 2.432.902.008.176.640.000$$

descubre que ésta sería la respuesta al planteo de en cuántas maneras pueden terminar ubicados los 20 equipos de fútbol que participan en el torneo de la AFA: más de "¡2 trillones!". ¡Y aun así ganó Estudiantes, o San Lorenzo!

Lo que hemos descubierto, también, es que el "factorial" de un número es un número "grande" y además, si uno aumenta el número, crece muy rápido. Por eso, tratar de encontrar "todos los posibles órdenes" para escuchar las canciones resulta en tener que esperar que pasen 10! días, o sea, más de 9.941 años hasta tener que repetir un orden de los que aparecieron antes.

Solución al desafío

Tomemos cualquier subconjunto de 10 números entre los primeros 100, como dice el planteo.

Una observación: cualquiera que sea la forma en la que elijamos este conjunto de *10* números, ¿cuál podría ser la mayor de las posibles *sumas* que podemos obtener?

Es decir, en el peor de los casos, si hubiéramos elegido los números

$$\{91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$$

la suma de estos 10 números ¡no llega a 1.000!

Y como éstos son los números más grandes que se pueden elegir, eso significa que cualquiera sea el conjunto de 10 números que elijamos entre los primeros 100 naturales, las sumas de cualquier subconjunto de estos diez números siempre son menores que 1.000. Éste es un dato no menor, y se verá inmediatamente la importancia que adquiere.

Ya sabemos que hay 1.023 subconjuntos que podemos construir. Basta confrontar con el capítulo "Luces encendidas, luces apagadas y modelos" del episodio 2 de *Matemática... ¿Estás ahí?* (pp. 89-94). Allí está explicado cómo hacer para encontrar todos los subconjuntos de un conjunto de *n* elementos.

Y si sumamos los elementos de cada uno de estos subconjuntos, obtenemos 1.023 números. Claramente, esas *sumas* no pueden superar al número *1.000,* entonces, esos 1.023 números *no pueden ser todos distintos*: ¡tienen que repetirse! (Lo invito acá a leer el capítulo "Problema del palomar" o "Pigeon Hole", en el libro *Matemática... ¿Estás ahí?*, pp. 134-135.)

MORALEJA: hay *dos* subconjuntos (por lo menos) que uno puede construir con los números de A, de manera tal que al sumar los elementos de cada uno de ellos, dan lo mismo, a pesar de ser distintos conjuntos. Si esos dos conjuntos, que suman lo mismo, *tienen elementos en común* (o sea, números que aparecen en los dos conjuntos), los sacamos, y nos quedamos con los otros. Como la suma de ambos daba lo mismo, al sacar los repetidos, disminuimos el total de cada conjunto en la misma cantidad (por lo que las sumas siguen siendo iguales entre sí), ¡pero ahora no hay más repeticiones! Y listo: esto termina de resolver el problema. Eso sí: esta solución demuestra que estos dos subconjuntos tienen que existir, pero no los encuentra ni dice cómo hacerlo. Si a uno le interesa encontrarlos, sabe que el intento vale la pena porque existir *existen.*

Solución al problema de la niña que no sabía jugar al ajedrez

Violeta juega contra Alberto en el tablero 1 con las piezas negras. En cambio, contra Marcelo, en el tablero 2, juega con piezas blancas.

Además, se sabe que ambas partidas son simultáneas.

Violeta comienza así: espera que Alberto realice la primera movida (así tiene que ser porque Alberto juega con las blancas), y no bien lo hace, Violeta realiza *la misma movida* en el tablero 2 (donde es ella la que juega con las blancas y empieza la partida). (Intuyo que a esta altura ya descubrió cuál va a hacer la respuesta, ¿me equivoco?)

Antes de contestar en el tablero 1, Violeta espera la respuesta en el tablero 2, que está obligado a hacer Marcelo, que juega con las negras. No bien Marcelo hace su movida, Violeta la reproduce en el tablero 1, en la partida con Alberto. Y así sigue todo el tiempo. A cada movida de las piezas blancas que efectúa Alberto, ella la va reproduciendo en el tablero 2 con Marcelo, y las respuestas de éste en el tablero 2, las reproduce en el tablero 1 con Alberto.

¿Qué va a pasar? Si empata una partida, también empatará la otra, y si Alberto le gana la partida, implica que ella le ganará a Marcelo; y por supuesto, también vale la recíproca. Es decir, si es Marcelo quien gana su partida contra Violeta, entonces ella le ganará a Alberto.[34]

En cualquier caso, lo seguro es que Violeta no va a perder las dos partidas, como le sucedió a su padre. Y eso, acá, es lo que importa.

Solución al problema de la estrategia para ganar siempre

Se conoce una estrategia ganadora para el segundo jugador. Para eso, tiene que seguir el siguiente plan:

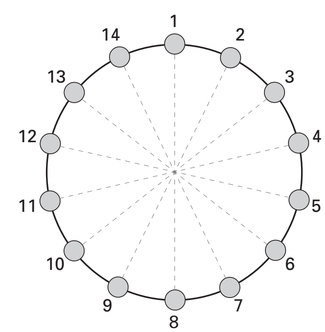
[34] A quienes juegan bien al ajedrez, les pido la generosidad de comprender que se trata de un ejemplo que invita a pensar en una solución al problema planteado, y no pretendo dar una *regla* de qué hacer en cualquier partida.

a) Una vez que el primer jugador retiró una o dos monedas, quedará formado –inexorablemente– un cierto espacio vacío en la circunferencia en donde están distribuidas las monedas. El plan consiste en que el segundo jugador elija una o dos monedas (tantas como eligió el primero) en forma diagonal a donde quedó el espacio libre. Es decir, que retire las monedas que estaban exactamente opuestas a las que retiró el primer jugador.

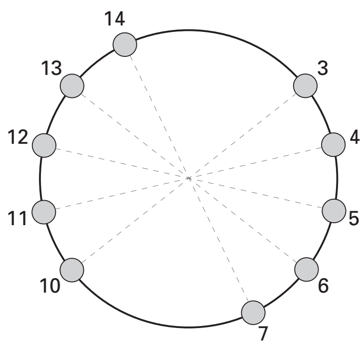
Antes de seguir con la segunda parte del plan, advierta que, al ejecutar este paso, las monedas que había inicialmente distribuidas en el círculo quedaron divididas ahora en dos grupos iguales. ¿No le dan ganas de pensar cómo hacer para completar la estrategia ganadora? Por las dudas, sigo abajo.

b) Ahora le vuelve a tocar el turno al jugador que empezó el juego. Pero claro, cualquier movimiento que él haga, al sacar o bien una o bien dos monedas, podrá ser replicado (o sea, "hacer lo mismo") por el segundo jugador. ¡Y eso le garantiza el triunfo!

Este ejemplo sencillo de estrategia frente a un problema entre dos competidores muestra cómo la matemática también interviene. De hecho, la simetría que se autogenera el segundo jugador, es lo que le permite ganar siempre. Para completar el juego, realicemos un ejemplo. Supongamos que se tienen 14 monedas, como se ve en la figura. Éstas son las jugadas de cada uno:

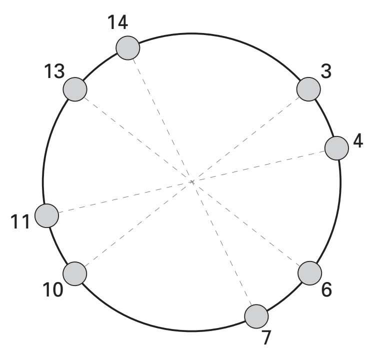


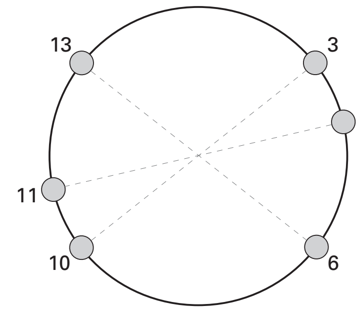
Jugador 1	Jugador 2
1,2	8,9
5	12
7	14
3,4	10,11
6	13



Luego de las dos primeras jugadas.

Después de las cuatro primeras jugadas.





Luego de seis jugadas.

¡Y gana el segundo jugador!

Éste es sólo un ejemplo. Lo invito a que se plantee los suyos y decida qué hacer en cada caso.

Solución al problema del partido de tenis

Se jugaron 9 *games*. Pueden suceder dos cosas: o bien sacó primero Miranda (a quien voy a llamar M a partir de ahora), en cuyo caso ésta sería la distribución:

M R M R M R M R M

o bien sacó primero Rosemary (a quien llamaré R), produciéndose el siguiente esquema:

R M R M R M R M R

En el primer caso, Miranda sacó 5 veces y Rosemary, 4. En el segundo, al revés: Rosemary sacó 5 y Miranda, 4.

Consideremos el primer caso (o sea, Miranda sacó primero, lo que obliga a que haya sacado 5 veces, y Rosemary sacó 4). Vamos a analizar las posibles alternativas, de acuerdo con la cantidad de veces que ganó M con su saque.

a) Supongamos que M ganó las 5 veces que sacó. ¿Es posible esto? La respuesta es… *no*. Pero ¿por qué? La respuesta es: si M ganó con su saque las 5 veces, entonces R no le pudo quebrar el saque nunca. La única alternativa, en consecuencia, es que M le haya quebrado el saque a R en 5 oportunidades, pero esto es imposible porque R sólo sacó 4 veces. Luego, descartamos esta posibilidad.

b) Supongamos ahora que M ganó 4 de las 5 veces que sacó. Esto implica que R le quebró el saque una vez. Pero entonces, para poder llegar a que se quebraran el saque 5 veces en total, esto significa que M le tuvo que haber quebrado el saque a R en 4 oportunidades. Pero si esto fuera así, M tendría 8 puntos (4 con su saque, y otros 4 con el saque de R). Imposible. Luego, descartamos esta posibilidad también.

c) Supongamos ahora que M ganó 3 de las 5 veces que sacó. Esto significa que R quebró el saque de M en 2 oportunidades. Para poder llegar a las 5 veces que se quebraron en total, M tuvo que haberle quebrado el saque a R *3 veces.* Y ahora se da la circunstancia de que M tendría 6 puntos, los *quiebres* serían 5 (2 en los que R le quebró el saque a M, y 3 en los que M le quebró el saque a R), por lo que la cuenta da perfectamente. *Esta es* una *posibilidad concreta:* M ganó 3 veces con su saque. R ganó 1 sola vez con su saque (perdió en las otras 3), y como M ganó sólo 3 veces de las 5; esto significa que R le ganó en las otras 2 oportunidades. Ésta es la situación que nos planteaba el problema, y se dio cuando M sacó primero.

d) ¿Podrá darse el caso en que M haya ganado sólo 2 veces con su saque? Si esto fuera así, R habría quebrado el saque de M en 3 oportunidades. Pero para poder llegar a tener 6 puntos, M debió ganar 4 veces, cuando quien sacaba era R. Sólo que entonces se habrían producido 4 más 3 quiebres en total, y esto contradice las hipótesis del problema. Luego, hay que descartar este caso también.

e) Si suponemos que M ganó una sola vez con su saque, esto implica que R le quebró el saque en las otras 4 oportunidades, pero esto contradice la hipótesis de que R sólo consiguió 3 puntos en total. Luego, hay que descartar también.

f) Si M no ganó nunca con su saque, esto implica que tendría que haber ganado siempre con el saque de R, lo cual significa que M tiene sólo 4 puntos, y no pudo llegar nunca a los 6 que plantea el enunciado. Hay que descartarlo también.

COROLARIO: sólo la situación c) es la que cumple con todas las hipótesis.

Análisis del segundo caso, en que R es quien saca ahora 5 veces, y M, sólo 4. Veamos si pueden darse algunas de las posibilidades que analizamos antes. Obviamente, R no puede ganar más que 3 veces con su saque, porque en total tiene 3 puntos.

a) Supongamos, entonces, que R ganó 3 veces con su saque. Luego M le quebró el saque 2 veces. Como R no pudo ganar más puntos, M tuvo que haber ganado todos los puntos con su saque, y esto es imposible, porque entonces, si bien es verdad que M tendría los 6 puntos que indica la hipótesis, no se habrían producido los 5 quiebres de saque que indica el problema. Moraleja, hay que descartar esta opción.

b) Supongamos que R ganó 2 veces con su saque. Entonces, M tiene que haberle quebrado el saque en 3 oportunidades. Queda por saber qué pasó con los puntos en los que sacó M (que son 4). Para que R junte los 3 puntos que le hacen falta, tiene que haberle quebrado el saque a M una sola vez. Pero esto implica que M ganó 3 de los 4 puntos. Entonces, lo que falla es la cantidad de veces que se produjeron los quiebres de saque: M quebró 3 veces y R quebró 1 vez. La suma no da 5. Luego, hay que descartar esta posibilidad también.

c) Supongamos ahora que R ganó 1 vez con su saque. Entonces, M le quebró 4 veces el saque. Para que en total haya 5 quiebres, significa que R está obligada a haber quebrado el saque de M una sola vez más. Pero entonces, R tiene en total 2 puntos y no 3 como debería ser. También hay que descartar esta posibilidad.

d) La última alternativa para considerar es que R no haya ganado nunca con su saque. Pero esto implicaría que M le tiene que haber quebrado el saque siempre, o sea, las 5 veces que sacó R. En ese caso, R, para poder juntar sus 3 puntos, tendría que haberle quebrado el saque a M 3 veces. Y eso es imposible, porque la cantidad de veces que se quebraron el saque entre las dos es 5. Luego, las hipótesis no se cumplen. Moraleja: hay que descartar esta posibilidad.

MORALEJA FINAL: la única manera en que se cumple lo pedido es la posibilidad c) del primer caso, cuando quien saca es M, y lo que tiene que haber sucedido es que haya ganado 3 de las 5 veces que sacó (lo que implica que R haya quebrado 2 veces), y que M le haya quebrado el saque a R 3 veces, con lo que se cumple todo: M ganó 6 puntos, R ganó 3 puntos, y entre ambas se quebraron el saque en 5 oportunidades.

Como no importa el orden en que se produjeron los quiebres, uno puede suponer que los resultados parciales fueron:

0-1 (quiebre de Rosemary a Miranda)
0-2 (gana Rosemary con su saque)
0-3 (nuevo quiebre de Rosemary a Miranda)
1-3 (quiebre de Miranda a Rosemary)
2-3 (gana Miranda con su saque)

3-3 (quiebre de Miranda a Rosemary)
4-3 (gana Miranda con su saque)
5-3 (quiebre de Miranda a Rosemary)
6-3 (gana Miranda con su saque)

Esto termina por resolver el problema en forma exhaustiva, ya que analicé todas las posibilidades. Muchas veces, cuando el número de casos no es descomunalmente grande, hacer un estudio minucioso (o sea, agotando todas las alternativas) permite sacar una conclusión terminante. La solución que encontramos es la única posible.

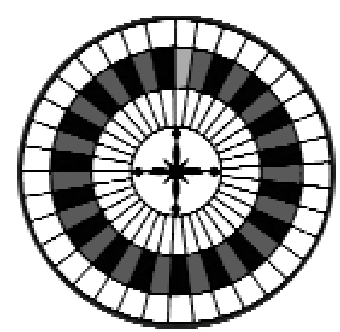
¿Habrá alguna respuesta más sencilla a este problema? A mí no se me ocurrió… pero, obviamente, eso no significa nada. Quizás usted encontró una solución más elegante y más breve. Ojalá.

Demostración de las ternas consecutivas en una ruleta

Vamos a probar que no es posible distribuir los números del 1 al 36 en una ruleta sin que haya tres consecutivos que sumen 55 o más.

Supongamos que se pudiera. Distribuimos los números entonces y los llamamos:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{36}$$



© Siglo XXI Editores Argentina S.A.

Vamos a suponer entonces que la suma de tres de esos números consecutivos siempre resulta estrictamente menor que 55, es decir:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 < 55\\
&x_2 + x_3 + x_4 < 55\\
&x_3 + x_4 + x_5 < 55\\
&x_4 + x_5 + x_6 < 55 \qquad (1)\\
&\ldots\ldots\\
&x_{35} + x_{36} + x_1 < 55\\
&x_{36} + x_1 + x_2 < 55
\end{aligned}
$$

Hay entonces 36 ternas. Cada número aparece *3* veces. Luego, si sumamos todo lo que aparece en las desigualdades (*), se tiene:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{35} + x_{36}) + (x_2 + x_3 + x_4 + \ldots x_{36} + x_1) + (x_3 + x_4 + x_5 + \ldots x_1 + x_2)$$

$$< 36 \cdot 55 = 1.980 \qquad (2)$$

Luego, cada número aparece *3 veces.* O sea, se tiene:

$$3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{35} + x_{36}) < 1.980 \qquad (3)$$

Pero, en realidad, los números

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{36}\}$$

son ni más ni menos que los números

$$\{1, 2, 3, \ldots, 35, 36\}$$

Luego, la desigualdad (3), se convierte en:

$$3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 34 + 35 + 36) = 3 \cdot (36 \cdot 37) / 2 \qquad (4)$$

(donde hemos usado que la suma de los primeros 36 números naturales es (36 x 37) / 2. Pero

$$3 \cdot (36 \cdot 37) / 2 = 3 \cdot 666 = 1998 \qquad (5)$$

Luego, de las fórmulas (2), (3), (4) y (5), se llega a una contradicción, porque aparecería que

$$1998 < 1980$$

Entonces, suponer que es posible hacer una distribución de los primeros 36 números en una ruleta y que ninguna terna sume 55 o más, lleva a una contradicción.

MORALEJA: no importa qué distribución se haga de los números, *siempre habrá al menos una serie de tres números consecutivos cuya suma es 55 o más*.

Texto de Niñas en la playa

CIERTO DIA DE VERANO ESTABA EN LA PLAYA OBSERVANDO DOS CHICAS BRINCANDO EN LA ARENA, ESTABAN TRABAJANDO MUCHO, CONSTRUYENDO UN CASTILLO DE ARENA CON TORRES, PASADIZOS OCULTOS Y PUENTES. CUANDO ESTABAN ACABANDO VINO UNA OLA QUE DESTRUYO TODO REDUCIENDO EL CASTILLO A UN MONTON DE ARENA Y ESPUMA. PENSE QUE DESPUES DE TANTO ESFUERZO LAS CHICAS COMENZARIAN A LLORAR, PERO EN VEZ DE ESO, CORRIERON POR LA PLAYA RIENDO Y JUGANDO Y COMENZARON A CONSTRUIR OTRO CASTILLO.

COMPRENDI QUE HABIA APRENDIDO UNA GRAN LECCION; ESTAMOS MUCHO TIEMPO DE NUESTRAS VIDAS CONSTRUYENDO ALGUNA COSA PERO CUANDO MAS TARDE UNA OLA LLEGA Y DESTRUYE TODO, SOLO

PERMANECE LA AMISTAD, EL AMOR Y EL CARINO, Y LAS MANOS DE AQUELLOS QUE SON CAPACES DE HACERNOS SONREIR.

SALUDOS Y BESOS.

Solución a la paradoja de Bertrand Russell

Voy a mostrar que las leyes que escribí son contradictorias.

Tomemos *todos los perros blancos*. Éste es, claramente, un conjunto de perros de Plutón. Como tal, tiene que corresponder a la lista de un *único perro* de Plutón, que voy a llamar Fido. Es decir: la lista de perros de Fido coincide *exactamente* con todos los perros *blancos* de Plutón. Y como esa lista tiene que cumplir las reglas, *no hay ningún otro perro* de Plutón que pueda tener la misma lista.

La pregunta que surge ahora es: Fido, ¿de qué color es? (Aquí, si yo fuera usted, volvería a pensar sola/o).

Veamos.

a) ¿Puede ser blanco Fido? Si fuera blanco, tendría que estar en su propia lista (porque acabamos de decir que la lista de perros que puede olfatear Fido, son todos los perros blancos. Si él fuera blanco, tendría que figurar en su propia lista). Pero, si revisamos la ley, en el punto 6, vemos que los perros blancos eran justamente aquellos que no figuraban en sus propias listas. Moraleja: Fido no puede ser blanco, porque, si no, contradiría las reglas.
b) Uno debe concluir, entonces, que Fido tiene que ser negro. Pero, si así fuera, tendría que poder olfatearse a sí mismo (véase la regla 5). O sea, tendría que figurar en su propia lista. Y esto no puede ser tampoco, porque la lista de Fido estaba compuesta justamente por todos los perros blancos. Entonces, si Fido fuera negro, no podría figurar en su propia lista.

Esta paradoja es una versión más de las célebres paradojas de Bertrand Russell. Más allá del ejemplo de Fido, los perros blancos, negros y Plutón, lo valioso de pensar en este tipo de cosas es entrenar el cerebro para recorrer caminos que no son habituales. En todo caso, creo que sirve para tomar decisiones más "educadas" en la vida cotidiana.[35]

Solución a la paradoja de Allais

Voy a hacer un diagrama que intenta resumir las cuatro opciones.

	1 a 33	34	35 a 100	Preferencia
A	2.500	0	2.400	18%
B	2.400	2.400	2.400	82%
C	2.500	0	0	83%
D	2.400	2.400	0	17%

Al revisar las preferencias de nuestros semejantes, uno advierte que entre A y B, la mayoría *abrumadora* se inclinó por B. La gente prefiere sacrificar los 100 pesos de más que podría cobrar si salieran los primeros 33 números, para no arriesgarse a no cobrar nada si sale el 34. Digo esto porque, del 35 en adelante, las opciones son iguales.

Pero lo llamativo es que, si uno modifica las opciones de tal forma que, si salen los números del 35 en adelante, y en cualquiera de los dos casos nadie cobra nada, la gente cambia increíblemente hacia el otro lado, y opta por la alternativa C en lugar de la D. Pareciera que la posibilidad de perder todo si sale el 34, que tan importante pareció ser en el primer caso, pierde relevancia frente a los 100 pesos de más que se cobrarían si saliera cualquiera de los treinta y tres primeros números.

[35] Para aquellos que han leído un poco más sobre cardinalidad y conjuntos infinitos, en realidad hay ya una contradicción anterior, y es que se sabe que el cardinal de partes es estrictamente mayor que el cardinal del conjunto. El conjunto de *todos los posibles subconjuntos de perros de Plutón* es mayor que el *conjunto de perros*. Por lo tanto, hay muchas más listas posibles de perros que perros para llevarlas colgadas. Y ese problema en el planteo ya no se puede salvar.

Lo interesante de esta variación en lo que elige la sociedad es que la diferencia que hay entre las opciones A y B, con respecto a la diferencia que hay entre las opciones C y D, es en esencia la misma. Y lo invito a pensar en esto. Tanto A como B ofrecen el mismo premio si salen los números del 35 en adelante. Y de la misma forma, tanto C como D ofrecen el mismo premio si salen números del 35 en adelante. Claro que, en el primer caso, ofrecían un premio de 2.400 pesos, en tanto que en los casos C y D, no ofrecen nada.

En realidad, si uno quisiera hilar más fino, lo notable es que en los dos últimos casos uno podría suponer que la ruleta pasó a tener *solamente* 34 números. Si salieran del 1 al 33, la opción C ofrece 100 pesos más que la D, y esta última es la que paga los 2.400 pesos si sale el 34, mientras que la C no paga nada.

Llama la atención el cambio abrupto y tan marcado que se produce en la elección de la gente (del 17% al 82%) por el simple hecho de que ahora ninguna de las dos opciones paga nada si salen los números del 35 en adelante. De ahí el nombre de *Paradoja de Allais.*

Mientras tanto, usted, ¿qué había elegido? ¿En qué categoría entró?

Solución a la paradoja de las papas

Para facilitar las cuentas, llamemos *P* a los kilos que se perdieron luego de un día de deshidratación. Entonces, al finalizar el día, las papas pesan:

$$(100 - P) \text{ kilos}$$

Por otro lado, el agua que había antes de deshidratarlas era exactamente:

$$(99\%) \cdot 100 \text{ kilos} \qquad (*)$$

mientras que el *agua* que queda, luego del proceso, es:

$$(98\%) \cdot (100 - P) \text{ kilos.} \qquad (**)$$

¿Por qué? Bien, porque las papas pesaban 100 kilos, pero después de la deshidratación a la que fueron sometidas pesan (100 – *P*) kilos, y de ese peso ahora sabemos que el 98% es agua. Si juntamos los datos que figuran en (*) y (**) para calcular el peso perdido *P* (que tiene que estar compuesto sólo por agua), lo que hago es restar el agua que había antes menos el agua que quedó. Esto es:

$$(99\%) \cdot 100 - (98\%) \cdot [100 - P] = P \qquad (***)$$

(Antes de seguir, lo invito a que relea esta última igualdad y la entienda antes de avanzar.)

Lo que dice es que el peso *P* del agua que se perdió se obtiene restando el agua que había antes de deshidratar las papas, menos el agua que quedó después. Ahora sí, sigo con la ecuación (***):

$$P = (0{,}99) \cdot 100 - (0{,}98) \cdot [100 - P]$$

$$= (0{,}99) \cdot 100 - (0{,}98) \cdot 100 + (0{,}98) \cdot P$$
(recuerde que "menos por menos es más")

$$= (0{,}01) \cdot 100 + (0{,}98) \cdot P$$

$$= (1 / 100) \cdot 100 + (98 / 100) \cdot P$$

Luego, si paso restando el término [(98 / 100) x *P*] al primer miembro, se tiene:

$$P - [(98 / 100) \cdot P] = (1 / 100) \cdot 100 = 1$$

Ahora, uso que $P = (100 / 100) \cdot P$:

$$(2 / 100) \cdot P = 1$$
$$P = (100 / 2) = 50$$

Lo increíble que acabamos de descubrir es que el peso que perdieron las papas es de ¡50 kilos! Por lo tanto, ahora las papas *pesan* 50 kilos (ya que originariamente pesaban 100).

En resumen:

Peso inicial de las papas	100 kilos
Peso inicial del agua	99% de los 100 kilos = 99 kilos
Peso de las papas luego de la deshidratación	100 – P (donde *P* es el peso del agua perdida en la deshidratación)
Peso del agua luego de la deshidratación	98% · (100 – P)
Peso del agua *perdida* en la deshidratación	(99% · 100) – 98% · (100 – P)

Luego, lo que queremos es *calcular* justamente el peso del agua *perdida* en la deshidratación (que hemos llamado *P*). Si uno mira en la última fila, la segunda columna, se tiene:

$$99\% \cdot 100 - 98\% \cdot (100 - P) = P \text{ (porque ese peso P es el que queremos calcular)}$$

$$(99 / 100) \cdot 100 - (98 / 100) \cdot (100 - P) = P$$

$$99 - 98 + (98 / 100) \cdot P = P$$

$$1 + (98 / 100) \cdot P = P$$

$$1 = P - (98 / 100) \cdot P$$

$$1 = (2 / 100) \cdot P$$

$$100 / 2 = P$$

$$50 = P$$

MORALEJA: aunque uno no lo pueda creer, si hace pasar por un proceso de deshidratación a 100 kilos de papas, cuyo peso está compuesto por un 99% de agua, hasta obtener un peso que esté conformado por un 98% de agua, ¡el peso total que tienen que perder las papas es de 50 kilos!

Esto es lo que se conoce con el nombre de la paradoja de las papas.