Gerold Stahl Schlichte, alemán, actualmente radicado en Francia, se doctoró en Munich con una tesis filosófico-matemática sobre la relatividad y a partir de 1953 ejerció la docencia, como profesor contratado en la Universidad de Chile, en filosofía de la matemática y lógica matemática. Ocupó la presidencia de la Sociedad Chilena de Lógica, Metodología y Filosofía de las Ciencias y ha publicado trabajos en las más importantes revistas especializadas: en la **Revue philosophique,** en **Zeitsch. f. math. logik,** en **Philosophy and Phenomenological Research,** etc. Asimismo es autor de cuatro libros de su especialidad, presentados por la Editorial Universitaria de Santiago; entre ellos: **Introducción a la lógica simbólica** (5ª edición, 1971). En esta obra, dedicada al estudio de la estructura y el conocimiento científico, Stahl desarrolla los temas siguientes: ¿qué es una estructura?; los sistemas, modelos y sistemas apropiados; completitud e isomorfia: clases de estructuras, estructura y realidad. Análisis estructural de objetos y entidades simples; parte y entero; el tiempo en el tratamiento estructural. La verdad desde el punto de vista lógico-matemático. Aspectos formales de algunas paradojas semánticas. El problema de la existencia en la lógica simbólica. La identidad de lo indiscernible.

Al lector la interesarán, asimismo, estos otros libros del fondo Paidós:

Ernest Nagel: La estructura de la ciencia. Obra consagrada a la filosofía de la ciencia, en especial al análisis de la lógica de la investigación científica y la estructura lógica de sus productos intelectuales. Es, ante todo —dice el autor— un examen de los patrones lógicos que aparecen en la organización del conocimiento científico, así como de los métodos lógicos cuyo uso (a pesar de frecuentes cambios en las técnicas especiales y de revoluciones en los contenidos teóricos) es la característica perdurable de la ciencia moderna. (Del Prefacio de Ernest Nagel.) El libro pone de relieve el carácter del método científico en una variedad de dominios concretos, tanto en las ciencias sociales y biológicas como en la física.

K. R. Popper: El desarrollo del conocimiento científico. Karl Popper, uno de los más importantes filósofos de la ciencia contemporánea, ha cultivado entre otras disciplinas la lógica matemática. Su posición, conocida a veces como "racionalismo crítico", está basada en el empleo sistemático del método "hipotético-deductivo" como arma típica del progreso del conocimiento. Su obra ha tenido extraordinaria influencia en la actual filosofía de la ciencia, obligando a modificar muchas de las primitivas posiciones del Círculo de Viena y a racionalizar muchas de las tendencias empiristas contemporáneas.

M. H. Marx y W. A. Hillix: La naturaleza de la ciencia. Temas que trata: naturaleza de la ciencia, criterios para distinguir la ciencia de lo que no es ciencia, el principio de control, el papel del análisis, lo empírico y lo simbólico, la naturaleza del "hecho", operacionismo, hipótesis científicas, la actitud científica.

Otras obras del fondo Paidós: Bertrand Russell: **Misticismo y lógica;** Bertrand Russell: **Conocimiento y causa;** F. M. Cornford: **La teoría platónica del conocimiento.**

Aires

GERROLD STAHL

ESTRUCTURA Y CONOCIMIENTO CIENTIFICO

oteca del hombre contemporáneo

BIBLIOTECA DEL HOMBRE CONTEMPORANEO

3 — W. Hollitscher: *Introducción al psicoanálisis.*
4 — F. Künkel y R. E. Dickerson: *La formación del carácter.*
5 — J. Rumney y J. Maier: *Sociología.* La ciencia de la sociedad.
7 — E. Fromm: *El miedo a la libertad.*
10 — E. Fromm: *El arte de amar.*
11 — V. Klein: *El carácter femenino.*
13 — B. Malinowski: *Estudios de psicología primitiva.*
14 — B. Russell: *Análisis del espíritu.*
16 — L. Klages: *Los fundamentos de la caracterología.*
17 — E. Jones y otros: *Sociedad, cultura y psicoanálisis de hoy.*
19 — F. Alexander y otros: *Neurosis, sexualidad y psicoanálisis de hoy.*
20 — F. Dunbar y otros: *Medicina psicosomática y psicoanálisis de hoy.*
21 — P. Schilder y otros: *Psiquiatría y psicoanálisis de hoy.*
22 — W. McDougall: *Introducción a la psicología.*
23 — G. Palmade: *La caracterología.*
24 — M. Reuchlin: *Historia de la psicología.*
25 — G. Viaud: *La inteligencia.*
26 — D. Lagache: *El psicoanálisis.*
27 — M. Mégret: *La guerra psicológica.*
28 — H. Baruk: *Las terapéuticas psiquiátricas.*
29 — P. Chauchard: *La medicina psicosomática.*
30 — P. Pichot: *Los tests mentales.*
31 — J. Maisonneuve: *Psicología social.*
32 — J. C. Filloux: *Psicologuía de los animales.*
33 — G. Palmade: *La psicotécnica.*
34 — R. Binois: *La psicología aplicada.*
36 — M. Abeloos: *El crecimiento.*
37 — P. Chauchard: *La química del cerebro.*
38 — J. Delay: *La psicofisiología humana.*
39 — P. Chauchard: *La muerte.*
40 — M. Merleau-Ponty: *El ojo y el espíritu.*
41 — P. Chauchard: *Fisiología de la conciencia.*
42 — E. Baumgardt: *Las sensaciones en el animal.*
43 — F. Grégoire: *El más allá.*
44 — P. Chauchard: *El cerebro humano.*

(*Continúa en la página 87*)

VOLUMEN
343

GÉROLD STAHL

José Padrón
1988

ESTRUCTURA Y CONOCIMIENTO CIENTIFICO

EDITORIAL PAIDOS
BUENOS AIRES

IMPRESO EN LA ARGENTINA
(PRINTED IN ARGENTINA)

1ª edición, 1977

EDITORIAL PAIDOS
S.A.I.C.F.

Defensa 599, 1er. piso Buenos Aires

INDICE

En Francia, donde en los salones se hace malabarismo con muchas ideas, hay gente que cree que el estructuralismo es la filosofía del mundo moderno. Pero eso fue sólo una moda, que terminó en mayo de 1968.

C. Lévi-Strauss
[Entrevista en "Der Spiegel", Nº 53, 1971, pág. 95.]

Consideraciones similares a las precedentes condujeron ocasionalmente a la posición de que no lo dado por sí mismo (por ejemplo, las sensaciones) sino "sólo las relaciones entre las sensaciones tienen un valor objetivo"... Obviamente esto constituye un paso hacia adelante, pero no va suficientemente lejos.

R. Carnap
[*The logical structure of the World*, pág. 30.]

PROLOGO

El trabajo presentado aquí con el título "Estructura y conocimiento científico" puede ser útil al lector interesado en estructuras y su aplicación a los más diversos campos, en que se trata el tipo de estructuras que suelen utilizarse en matemáticas y lógica matemática. La exposición breve y elemental del tema indica las posibilidades generales de aplicación y trata, además, la ubicación de las estructuras en la teoría del conocimiento científico.

Para seguir la exposición no se necesitan conocimientos especiales, aunque conocimientos generales de lógica matemática facilitan la lectura. El texto contiene un cierto número de ejercicios y se recomienda al lector no saltarlos, pues forman parte de la exposición.

Aparte del trabajo principal, el presente libro incluye cuatro artículos publicados con anterioridad, que tratan en forma no muy técnica materias relacionadas con el tema. Tres de ellos se publicaron en la *Revista de Filosofía* de la Universidad de Chile ("La verdad desde el punto de vista lógico-matemático" en vol. XIII, Nº 1, 1966, pp. 43-51; "Aspectos formales de algunas paradojas semánticas" en Nº 2, 1958, pp. 31-41; "La identidad de lo indiscernible" en vol. XI, Nos. 2/3, 1964, pp. 3-9) y uno en la *Revue Philosophique de la France et de l'étranger* ("Le problème de l'existence dans la logique symbolique", 1960, Nº 1, pp. 97-104). Todos estos artículos se publican ahora con ciertas modificaciones para hacerlos más accesibles; el artículo de la *Revue Philosophique* ha sido traducido al castellano por el autor.

Quisiera expresar mi gratitud a los editores de las revistas mencionadas por el permiso de reproducir los artículos y a todas las personas que en alguna forma han contribuido a la terminación y publicación del libro.

G. S.

CAPITULO I

ESTRUCTURA Y CONOCIMIENTO CIENTIFICO

1. Introducción

La palabra "estructura" tiene muchos significados diferentes, tanto en castellano como en otros idiomas. Con un significado especial se ha transformado en término de moda, que aparece en diversas doctrinas reunidas bajo el nombre "estructuralismo". Estas doctrinas filosóficas, etnológicas, lingüísticas, etcétera, además de referirse a estructuras, desarrollan temas específicos de sus campos que a veces no tienen mucho que ver con las estructuras. El presente análisis no se ocupa de esos temas específicos ni entra en los detalles de las consideraciones estructuralistas propiamente tales en estos campos. Intentará, en cambio, dar una visión general del tipo de estructuras que suelen utilizarse en matemática y lógica matemática y extender luego estas ideas a la teoría del conocimiento científico en general.

Dada la posición señalada, es dudoso que el presente trabajo pueda calificarse de estructuralista. Sin embargo, teniendo en cuenta que muchos estructuralistas sufrieron la influencia directa o indirecta del término "estructura" en el significado matemático, tal vez pueda interesar a partidarios y opositores del estructuralismo.

2. ¿Qué es una estructura?

Las estructuras, en el sentido en que queremos tratarlas aquí, son un tipo especial de k-tuplo, donde por k-tuplo se entiende una secuencia de k miembros, o sea, k miembros puestos en fila, uno en el primer lugar, uno en el segundo, etc., y finalmente uno en el k-ésimo lugar. Frecuentemente los k-tuplos se simbolizan de la siguiente manera:

$$<\ldots>$$

colocándose en lugar de los puntos suspensivos los símbolos de los diferentes miembros en el orden establecido. Así el triple cuyo primer miembro es *d*, el segundo *a* y el tercero *e* se simbolizaría por:

$$<d, a, e>$$

Vimos que no todos los k-tuplos son estructuras. Las estructuras tienen una forma muy especial. Como primer miembro figura una clase (una colección) que tiene por lo menos un elemento. Esta clase se simbolizará por "*V*" y sus elementos se llamarán "individuos"; los individuos en este tratamiento son objetos cualesquiera no necesariamente reales, de modo que el primer miembro de los k-tuplos es una colección de objetos reales o imaginarios. Los demás miembros de una estructura son subclases de *V* o relaciones entre los elementos de *V*.

Conviene mencionar que hay relaciones no sólo entre dos individuos (llamadas "relaciones biposicionales"; ejemplo: . . . *es el doble de* . . .) sino

también entre tres individuos (llamadas "relaciones triposicionales"; ejemplo: . . . *es la suma de* . . . *y de* . . .), entre cuatro individuos, etcétera. En lugar de hablar de relaciones biposicionales, triposicionales, etcétera, hablaremos también de *funciones proposicionales* biposicionales, triposicionales, etcétera.

Las subclases de *V*, por ejemplo todos los elementos de *V* que están hechos de yeso (. . . *está hecho de yeso*) o todos los elementos de *V* que miden menos de 30 cm (. . . *mide menos de 30 cm*), pueden tratarse como funciones proposicionales uniposicionales; pues por analogía con las funciones proposicionales biposicionales que tienen *dos* lugares libres (representados por *dos* huecos con puntos suspensivos), las subclases tienen *un* lugar libre (representado por *un* hueco con puntos suspensivos).

En consideración de lo anterior podemos decir que en el k-tuplo detrás de la clase *V* figuran funciones proposicionales que se refieren a los elementos de *V* y que pueden ser uniposicionales o biposicionales, etcétera. Estas funciones proposicionales se simbolizarán aquí por "*F*", "*G*", "*H*", "*K*", etcétera, de modo que las estructuras se simbolizarían por:

$$<V, H, K, \ldots>$$

Con todo esto ya pueden verse algunas características del tratamiento estructural en general. Por de pronto no se consideran objetos (individuos) aislados. Tampoco se trabaja con puras clases o totalidades sin más; una clase *V* por sí sola, por pobre o rica que sea en individuos no constituye una estructura. Unicamente si *V* se presenta junto con una o más funciones proposicionales, las que a su vez se refieren exclusivamente a los individuos de *V*, entonces podemos hablar de una estructura. Esta combinación de una clase con funciones proposicionales que se refieren a los individuos de la clase es uno de los puntos fundamentales del tratamiento estructural.

Para dar un ejemplo, consideremos el triple cuyo primer miembro V es la clase de los números enteros (los positivos, 0 y los negativos), F es la función proposicional triposicional . . . *es la suma de* . . . *y de* . . . y G es la función proposicional biposicional . . . *es el doble de* . . . Vemos que no nos interesan aquí ni determinados números enteros ni la clase de los números enteros, sino los números enteros junto con las funciones proposicionales de la suma y del doble, o sea todas las conexiones que rigen entre los números enteros gracias a estas dos funciones.

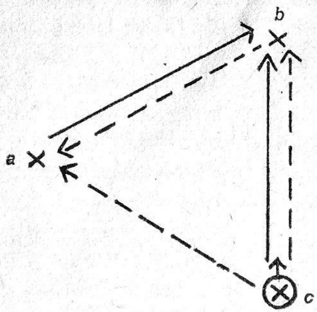
En todo el tratamiento estructural las funciones de los k-tuplos se aplican únicamente a los individuos de la clase V respectiva (en el ejemplo, a los números enteros). Si uno desea trabajar con funciones proposicionales más amplias, que además se aplican a otros individuos, no hay impedimento. Simplemente se forma una nueva estructura con una clase V más amplia y con funciones proposicionales más amplias que se aplican ahora exclusivamente a los individuos de la nueva clase V. En matemática y lógica matemática las ampliaciones de estructuras constituyen un tema muy interesante; por ejemplo, se desea ver cuáles características de la antigua estructura se guardan respecto de la nueva estructura ampliada.

Ejercicio 2.1) Señalar algunas estructuras, indicando con subíndices si las funciones proposicionales son uniposicionales, biposicionales, etcétera. Ejemplo: $<est, Mod_1, Pers_1, Vec_2, Ex_2>$, donde *est*

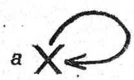
es la clase de las estaciones ferroviarias de una región; las *Mod* son aquellas que están modernizadas según un criterio determinado, las otras pertenecen automáticamente a $-Mod$; las *Pers* son las que están destinadas al transporte de personas; *Vec* es la relación biposicional de vecindad entre dos estaciones y *Ex* la relación biposicional de estar conectado por trenes expresos directos.

Ejercicio 2.2) Frecuentemente se presentan estructuras con una o más relaciones de orden total (como la relación *menor* entre números enteros) o de orden parcial (como la relación *es divisible por* entre números enteros positivos). Indicar estructuras con relaciones de este tipo. Ejemplo: $<el, Mas_1, Ed_2, Pes_2>$, donde *el* es la clase de los elefantes de un jardín zoológico; *Mas* son los de sexo masculino; *Ed* es la relación de tener más edad y *Pes* la relación de tener más peso.

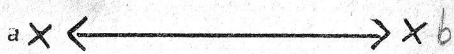
Ejercicio 2.3) Estructuras con un número reducido de individuos y funciones proposicionales (si éstas son sólo uniposicionales o biposicionales) pueden presentarse de la siguiente manera: los individuos se simbolizan por pequeñas cruces. Con signos agregados a las cruces se marca la pertenencia a las diversas funciones uniposicionales y con flechas de diverso tipo (flecha entera, flecha interrumpida, etcétera) entre las cruces se indican las funciones biposicionales. Representar gráficamente una estructura formada según los ejercicios 1 ó 2. Para dar un ejemplo, supongamos que haya tres elefantes (“*a*”, “*b*”, “*c*”), uno de ellos de sexo masculino señalado con “♂”. La relación *Ed* se representa por “——→” y *Pes* por “— — →”. Podríamos tener entonces (suponiendo que *a* y *c* sean de la misma edad, aunque no del mismo peso):



Puede ocurrir que el individuo *a* esté en relación *F* consigo mismo (caso que se presenta siempre con la relación de identidad, de mucha importancia en las estructuras matemáticas). Esta situación se representa gráficamente por:



Puede ocurrir que *a* esté en relación *F* con *b* y viceversa (caso que se presenta siempre con las relaciones *Vec* y *Ex*). Representación gráfica:



Ejercicio 2.4) Para formar estructuras con individuos de dos tipos diferentes, como personas y objetos físicos o números enteros y conjuntos de números enteros se elige como clase *V* la que contiene los individuos de las dos especies y se introduce luego una función uniposicional para hacer la distinción entre los individuos. Ejemplos: $<\mathit{pob}, \mathit{Pers}_1, \ldots>$, donde *pob* contiene personas y objetos físicos, los *Pers* son aquellos individuos que son personas (los objetos físicos serían en este caso automáticamente $-\mathit{Pers}$). $<\mathit{enc}, \mathit{En}_1, \ldots>$, donde *enc* contiene los números enteros y los conjuntos de números enteros, los *En* son aquellos individuos que son números enteros (los conjuntos de números enteros serían automáticamente $-\mathit{En}$). Análogamente se procede cuando hay individuos de tres o más especies. Señalar algunas estructuras de este tipo.

Ejercicio 2.5) Frecuentemente se presentan estructuras en que una subclase de *V* contiene un solo individuo. Indicar una estructura de este tipo. Ejemplo: $<\mathit{enp}, \mathit{Baj}_1, \ldots>$, donde *enp* es la clase de los números enteros positivos y *Baj* es formado por aquellos que son más o igualmente bajos que todos (hay uno solo que es 1).

3. Los sistemas

Para profundizar el análisis de las estructuras hay que hablar un poco de expresiones y clases de expresiones, pues ciertas clases de expresiones están íntimamente ligadas a las estructuras.

Para los lógicos matemáticos las expresiones no son más que secuencias de signos tipográficos [1]; por ejemplo, la expresión "hace calor" es la letra "h" seguida por la "a", seguida por la "c", seguida por la "e", seguida por el espacio en blanco, seguida por la "c", etcétera. Un ejemplo matemático sería "x + y = y + x".

Se pueden formar clases de expresiones y algunas de estas clases que cumplen con determinadas con-

[1] Aquí nos limitamos a las secuencias *finitas* de signos tipográficos.

diciones se llaman "sistemas". Las expresiones que son elementos de un sistema dado se llaman "teoremas" del sistema en cuestión. El procedimiento habitual para formar un sistema es, en líneas generales, el siguiente: por de pronto se descartan todas las expresiones que no se consideran significativas para el sistema que se desea construir. En lógica matemática esto se hace mediante reglas en forma tan rigurosa que no queda ninguna expresión discutible, o sea, ninguna expresión de la que no se puede determinar en forma rutinaria si es o no es significativa. Entre las significativas respectivas que quedan hay, en los casos normales, algunas que son teoremas del sistema y otras que no lo son. Para determinar los teoremas se señalan algunas expresiones significativas que se llaman "teoremas básicos" o "axiomas" del sistema. Además, por medio de ciertas reglas explícitamente señaladas se establece un mecanismo llamado "procedimiento demostrativo" que permite introducir uno por uno nuevos teoremas. La clase de todos los teoremas respectivos, los básicos y los introducidos por demostración, constituye luego el sistema en consideración.

Aunque sólo ciertos sistemas tienen un interés práctico, en principio cualquier clase de expresiones, formada según los criterios indicados, pero por lo demás con plena arbitrariedad, es un sistema.

Actualmente se utiliza un gran número de sistemas, especialmente en matemática, pero también para partes de la física, biología y economía. Entre los sistemas que tratan sectores de la matemática hay varios que se refieren a conjuntos, otros a números naturales, a números reales, etcétera. Hay sistemas geométricos, por ejemplo, de la geometría euclidiana, y muchos sistemas más. Habitualmente todos ellos se construyen de tal manera que tienen

un fondo lógico común. Este fondo lógico a su vez constituye un sistema que se llama "sistema funcional básico".

En las expresiones de los sistemas mencionados figuran ciertos signos o secuencias de signos que se llaman "símbolos". De interés especial para lo que sigue son los *símbolos individuales* que simbolizan individuos determinados (se refieren a individuos determinados) y los *símbolos funcionales* (simbolizan funciones proposicionales determinadas).

4. Modelos y sistemas apropiados

Tomando como base las secciones anteriores puede señalarse ahora una conexión fundamental entre sistemas y estructuras. Para ello conviene proceder en dos etapas.

Primera etapa: tengamos, por un lado, un sistema S. Sea C la clase de todos los símbolos individuales que figuran en las expresiones S. Supongamos, además, que en las expresiones de S figuran sólo (con muchas repeticiones) dos símbolos funcionales, uno de función proposicional uniposicional y uno de función proposicional triposicional. Tengamos, por otro lado, una estructura E, por ejemplo $<V, F, G>$ con F uniposicional y G triposicional. Ahora hacemos corresponder a cada símbolo individual de C un individuo de V, al símbolo funcional uniposicional la función F y al símbolo funcional triposicional la función G. Esta correspondencia podría considerarse como un tipo de simbolización o denotación, de modo que los símbolos individuales de C simbolizarían ciertos individuos de V y los símbolos funcionales, las funciones F y G.

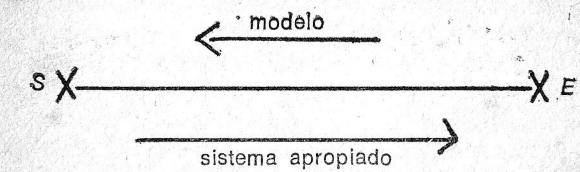
Resumiendo, tenemos por un lado un sistema, una entidad que puede considerarse como algo lingüístico, y por otro, una estructura, algo que normalmente no tiene nada de lingüístico. Tenemos, por un lado, símbolos individuales y funcionales, y por otro, individuos y funciones. Finalmente hemos logrado establecer un tipo de relación de simbolización entre los símbolos, por un lado, y los individuos y funciones proposicionales, por otro.

La relación de simbolización puede establecerse sólo si la estructura E es lo suficientemente rica; es decir, si en el sistema S hay símbolos funcionales n-posicionales, debe haber en la estructura E por lo menos una función proposicional n-posicional. Esta exigencia es bien razonable, pues de otro modo ¿a qué función de E se refiere el símbolo funcional? En cambio no se exige que diferentes símbolos individuales o funcionales simbolicen siempre diferentes individuos o funciones; es perfectamente admisible que, por ejemplo, "IV" y "4" simbolicen un mismo individuo, y lo mismo ocurre con las funciones proposicionales. Aunque así dos o más símbolos pueden simbolizar lo mismo, sin embargo, un símbolo del sistema que se considera simboliza un solo individuo o una sola función de una estructura, de modo que respecto de un sistema y una estructura dados no hay ambigüedad posible.

Segunda etapa: en lo que sigue se tratará sólo de la conexión entre sistemas y estructuras si es posible establecer una relación de simbolización tal como ha sido señalada en la primera etapa. Podría ocurrir entonces que lo afirmado por un teorema de S rige en la estructura E. Por ejemplo, podríamos tener en S el teorema "$5 > 3$" y podría ocurrir que en la estructura E 5 es mayor que 3 (o sea, la relación biposicional *mayor* rige entre 5 y 3). Hasta podría presentarse el caso de que lo afirmado por *todos* los teoremas de S rige en la estructura E. En-

tonces decimos que la estructura E es un *modelo* de S o, a la inversa, que S es un *sistema apropiado* de E.

Una representación gráfica de esta conexión sería:



Una estructura es científicamente interesante sólo si el hombre de ciencia dispone de un sistema apropiado para la estructura o está empeñado en construir uno. Si tiene un sistema apropiado entonces automáticamente lo que dice un teorema rige en la estructura; conocer teoremas significa ser capaz de señalar conexiones entre los elementos de la estructura.

Para demostrar concretamente que un sistema es apropiado basta probar que lo afirmado por los axiomas rige en la estructura. Con esto lo afirmado por los demás teoremas del sistema también rige en la estructura, siempre que se trate de los sistemas aquí considerados, basados en el sistema funcional básico. Así la demostración de que un sistema es apropiado es más fácil que lo que aparece a primera vista.

Lo afirmado por algunos teoremas rige en todas las estructuras. Son aquellos teoremas que pertenecen al fondo lógico común, o sea, al sistema funcional básico. Por lo tanto este sistema es apropiado para todas las estructuras o, a la inversa, todas las estructuras son modelos del sistema funcional básico.

Ejercicio 4.1) Para ilustrar la relación de simbolización se podrían pegar objetos pequeños en una hoja de papel y escribir una o más letras minúsculas latinas al lado de cada uno, pero de tal modo que ninguna letra esté al lado de dos o más objetos. Desgraciadamente este procedimiento no es aplicable a todos los individuos, sea por su tamaño (elefante), su carácter abstracto (el número 7), etcétera. Menos aún es aplicable a las funciones proposicionales. Así, en general, conviene proceder en forma abstracta, ejemplo: la cifra "0" simboliza el número 0, la cifra "1" simboliza el número 1, . . ., la expresión "*Par*" simboliza la clase de los números pares, el signo "<" simboliza la relación *menor*, etcétera. Hacer una lista de símbolos individuales y funcionales e indicar (en palabras) lo que simbolizan.

Ejercicio 4.2) Indicar en castellano algunos teoremas generales tales que lo afirmado por ellos rige en todas las estructuras. Ejemplos: "Algún individuo pertenece a *F* o no es el caso que algún individuo pertenece a *F*", "Si todos los individuos que pertenecen a la subclase *F* pertenecen también a *G* y todos los que pertenecen a *G* pertenecen a *H*, entonces todos los que pertenecen a *F* pertenecen a *H*".

Ejercicio 4.3) Indicar en castellano algunos teoremas específicos tales que lo afirmado por ellos rige en una de las estructuras indicadas en los ejercicios de la sección 2. Ejemplos posibles: "Todas las estaciones destinadas al transporte de personas están modernizadas", "Algunas estaciones no son vecinas de todas las estaciones", "Algún elefante no está en relación *Ed* con algún elefante".

5. Completitud e isomorfía

Se puede demostrar que, dada una estructura, existen siempre infinitos sistemas apropiados para ella. Es tarea del científico, especialmente del matemático, encontrar uno y ojalá uno que proporcione mucha información, porque (según la definición indicada) hay sistemas apropiados constituidos únicamente por teoremas que no proporcionan información específica sobre la estructura (ejemplo, el sistema funcional básico). Lo ideal sería un sistema apropiado que proporcione el máximo de información, o sea que, para cada conexión, simple o compleja, que rige en la estructura, haya un teorema del sistema que la exprese. Hay una definición formal de "sistema que proporciona el máximo de información"; el sistema que lo hace se llama "sistema completo respecto de la validez".

Para ciertas estructuras hay sistemas completos, para otras hay sistemas apropiados más y más informativos, pero no hay uno que proporcione el máximo de información, porque se puede demostrar que siempre hay otros con más información todavía.

Así como para cada estructura hay infinitos sistemas apropiados, también, a la inversa, para cada sistema del tipo aquí considerado *que está libre de contradicción* hay infinitas estructuras que son sus modelos.

Puede suceder que muchas de estas estructuras tengan cierto parecido especial entre sí, parecido que en matemática se llama "isomorfía". Para aclarar un poco este parecido consideremos dos estructuras E y E', más explícitamente:

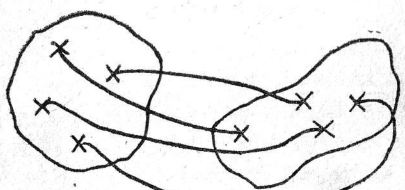
$$<V, F, G>$$

y:

$$<V', F', G'>$$

Supongamos que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre V y V', o sea que a cada elemento de V puede asignarse exactamente uno de V' y viceversa.

V V'



Si a, b, c, etc., son elementos de V, entonces simbolizamos por "a'", "b'", "c'", etc., los elementos correspondientes de V'. Supongamos que siempre cuando F rige entre a y b entonces F' rige entre a' y b' y algo análogo respecto de G y G' y lo mismo para todos los elementos de V en general y sus correspondientes de V'. En este caso decimos que E y E' son isomorfos.

Utilizando palabras simples, diremos que isomorfía significa que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre las clases V de tal modo que los elementos correspondientes satisfagan siempre las funciones proposicionales correspondientes.

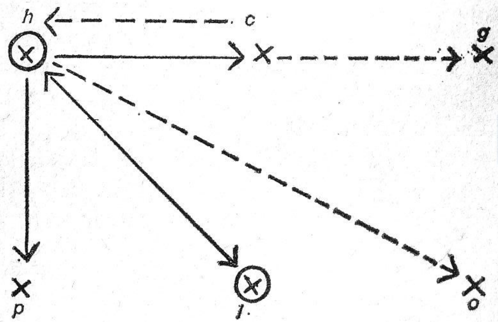
La isomorfía es fundamental para la matemática actual y en general para el tratamiento estructural. Al analizar un campo se determina una de sus estructuras y se aprovechan luego los resultados obtenidos respecto a esta estructura no sólo en el campo mismo sino además en todos aquellos campos, tal vez muy lejanos, donde hay estructuras isomorfas con la primera. Para usar la isomorfía no importa cuáles son los elementos de V, ni cuáles las funciones proposicionales; lo único que importa es que estén relacionados de la misma manera.

Según la definición indicada cada estructura es isomorfa consigo misma, y si E es isomorfa con E' también E' es isomorfa con E. Además, si E es isomorfa con E' y E' con E'', entonces E es isomorfa con E''. Si E es modelo del sistema S y E' es isomorfa con E, entonces E' también es modelo de S (se cambia correspondientemente la relación de simbolización; por ejemplo, lo que antes era símbolo de F es ahora símbolo de F').

A veces no se hace distinción entre estructuras isomorfas, y se tratan como si fueran una sola estructura; pero según la terminología de este trabajo, E y E', aunque isomorfas, son diferentes, a menos que la clase V y las funciones proposicionales de E sean idénticas a las de E'.

Ejercicio 5.1) Indicar una secuencia S, S', S'', etcétera, de sistemas apropiados de una estructura, donde S' es más informativo que S, S'' más informativo que S', etcétera. Ejemplo respecto a la estructura $<el, Mas_1, Ed_2, Pes_2>$ del ejercicio 2.2: S es la clase de los teoremas del sistema funcional básico con Mas_1, Ed_2 y Pes_2; S' tiene además "Algún elefante es masculino" y todo lo que se puede deducir a partir de este axioma; S'' tiene, aparte de los teoremas de S y S', el axioma "Algún elefante no es masculino" y todo lo que se puede deducir de esta expresión, etcétera.

Ejercicio 5.2) Indicar una estructura donde los individuos son los personajes principales de un drama o cuento; como mínimo conviene que la estructura tenga una función uniposicional y dos biposicionales. Ejemplo: $<ham, Veng_1, Mat_2, Res_2>$, donde *ham* es la clase de los personajes principales de HAMLET, o sea, Hamlet (h), el rey Claudio (c), la reina Gertrudis (g), Polonio (p), Laertes (l) y Ofelia (o); *Veng* es la clase de los que planean una venganza, *Mat* es la relación de matar (físicamente) y *Res* es la relación de ser indirectamente responsable de la muerte. La representación gráfica sería:



Los círculos marcan aquellos que planean una venganza.

Ejercicio 5.3) Describir una situación que constituya una estructura isomorfa a la del ejercicio 5.2, pero de un campo muy alejado. Hay que demostrar punto por punto que las dos estructuras son isomorfas. Ejemplo: En una pieza hay dos lámparas encendidas (h' y l') que se iluminan mutuamente. Además, la primera lámpara (h') ilumina una silla (p') y una mesa (c'). Sobre la mesa está puesta la lámpara h' y en uno de sus cajones el libro (g'). En el tubo de la

lámpara está puesto un resorte (o') que permite subir y bajar la lámpara. Tenemos así la estructura $<pi, Lam_1, Il_2, Pu_2>$, donde los individuos son los objetos de la pieza, es decir, h', c', g', p', l', o'; *Lam* es la clase de las lámparas, *Il* la relación *ilumina a* y *Pu* la relación *tener puesto encima o adentro*. Utilizando las letras del ejercicio 5.2 con primas ("h'", etcétera) se ve que hay una correspondencia biunívoca entre *ham* y *pi* ($h - h'$, $c - c'$, etcétera). Mientras que h y l pertenecían a la clase *Veng*, ahora h' y l' pertenecen a la clase *Lam*. Donde había la relación *Mat* ("⟶") hay ahora la relación *Il* y donde había la relación *Res* ("– – →") hay ahora la relación *Pu*. Tenemos la misma representación gráfica que en el ejercicio 5.2, sólo hay que cambiar las letras simples ("*h*", etcétera) por las letras correspodientes con primas ("h", etc.).

6. Clases de estructuras

En la sección 5 vimos que para cada sistema libre de contradicción hay infinitas estructuras que son sus modelos. Muchas de estas estructuras pueden ser isomorfas entre sí, pero los sistemas habituales tienen también siempre, como modelos, estructuras no isomorfas entre sí.

La clasificación más usada de las estructuras se efectúa justamente por hacer referencia a los sistemas de que son modelos. Concretamente, a una clase pertenecen todas las estructuras que son modelos del sistema S_1, a otra, todas las estructuras que son modelos de S_2, y así sucesivamente.

Por de pronto, la clasificación mencionada da clases mucho más amplias que una clasificación por isomorfismo. Pero ella no es exclusiva. Por ejemplo, una estructura E puede ser modelo tanto del sistema S_1 como también del sistema S_2 y tal vez también de S_3 y de otros (vimos que toda estructura es modelo del sistema funcional básico). A pesar de la falta de exclusividad, se prefiere en el tratamiento estructural dentro y fuera de la matemática la clasificación respecto de sistemas a toda otra clasificación posible.

Así, en matemática tenemos la clase de las estructuras que son modelos de sistemas como el de los grupos, el de los anillos, el de las álgebras de Boole [2] y otros. Aquellas estructuras que son modelos del sistema de los grupos (que pertenecen a la clase correspondiente de estructuras) se llaman simplemente "grupos"; las que son modelos del sistema de los anillos se llaman "anillos"; las que son modelos del sistema de las álgebras de Boole se llaman "álgebras de Boole", etcétera. Tenemos de este modo una larga lista de estructuras matemáticas con nombres especiales [3] y nada nos impide extender este tipo de clasificación a otros campos.

Para dar un ejemplo matemático, sea V la clase de los números enteros, F la función proposicional biposicional de igualdad y G la función proposicional triposicional de suma; luego $<V, F, G>$ es (entre otras cosas) un grupo, porque para esta estructura rige lo afirmado por los axiomas (y demás teoremas) del sistema de los grupos. Hay infinitos otros grupos, algunos de ellos isomorfos con $<V, F, G>$, otros no.

[2] En vez de hablar de "sistema de los grupos", "sistema de los anillos", se habla frecuentemente de "teoría de los grupos", "teoría de los anillos".

[3] En esta sección y en las anteriores vimos que la ciencia matemática se ocupa de *diversos* sistemas y de *diversas* estructuras. Esta concepción moderna no tiene nada de extraordinario si uno la compara, por ejemplo, con la zoología que se ocupa de diversos animales.

7. Estructura y realidad

Hasta el momento se correlacionó algo no lingüístico, que son las estructuras, con algo lingüístico, que son los sistemas. Hay una sola excepción; son aquellas estructuras en que la clase V a su vez está constituida entera o parcialmente por expresiones, de modo que ya la estructura misma tiene algo de lingüístico. En este caso se atribuye un carácter especial a los sistemas apropiados; se dice, en terminología logicomatemática, que están formulados en "lenguaje de segundo nivel", o en "metalenguaje", de modo que las estructuras (parcialmente) lingüísticas estarían correlacionadas con sistemas metalingüísticos.

Volviendo a aquellas estructuras que son entes no lingüísticos (y de las cuales las recién señaladas no se distinguen fundamentalmente), uno puede preguntarse si, o hasta qué punto, constituyen la realidad. ¿Son, por lo menos en parte, el mundo objetivo?

La respuesta es más bien negativa, pero toda la problemática es muy compleja. Por de pronto hay que ver las estructuras como construcciones mentales elaboradas por hombres de ciencia, como productos de la actividad racionalizadora humana, que tal vez reflejen más o menos fielmente ciertos aspectos de la realidad. Más no se puede pretender. No se sabe siquiera si la realidad tiene un carácter estructural. Además hay diferentes estructuras que corresponden a un sistema o a sistemas igualmente bien apoyados en la experiencia. Es posible que en estos casos la realidad excluya todas las estructuras, excepto una. Sin embargo, también es posible que varias estructuras reflejen igualmente bien ciertos aspectos de la realidad; pues hay que tener en cuenta que todo trabajo científico constituye una simplificación y que en esta simplificación una estructura puede reflejar, hasta cierto punto, los aspectos A y otra los aspectos B de la realidad.

Aunque no podemos afirmar que una estructura sea la realidad o parte de la realidad o una copia fiel de la realidad, no por eso las estructuras están totalmente desvinculadas de la realidad. Si los sistemas apropiados correspondientes están apoyados directa o indirectamente en la experiencia, entonces las estructuras modelan o simulan la experiencia ya obtenida y posiblemente futuras experiencias, por lo menos con cierta aproximación. De este modo la razón y la experiencia juntas nos guían en la preselección de estructuras, nos ayudan en su construcción por etapas y nos hacen descartar algunas estructuras a favor de otras.

Pero todo esto no constituye una justificación suficiente para hablar de estructuras naturales (independientes de los hombres teoretizantes) que se encuentran en las cosas. Por otro lado, la pregunta por la existencia de una tendencia mental especial de formar estructuras o de preferir ciertas estructuras a otras, pertenece al campo de la psicología y no se tratará aquí.

Ejercicio 7.1) Indicar una estructura puramente lingüística donde *ex* es una clase determinada de expresiones y se consideran relaciones como *ser expresión más larga* (con más signos) y *ser sinónimo*.

Ejercicio 7.2) Señalar (en metalenguaje) algunos teoremas de la estructura del ejercicio 7.1.

8. Análisis estructural de objetos y entidades simples

Es de interés aplicar las consideraciones estructurales no sólo a campos más o menos extendidos

del saber, sino también a objetos que se presentan como algo simple a los sentidos, tales como una piedra, una manzana, una melodía o a entidades no muy complejas, como una familia.

En algunos casos especialmente simples, hasta un análisis conjuntivista es suficiente, mientras que en otros un análisis estructural es más provechoso. Por ejemplo, para una colección dada de estampillas puede ser suficiente considerar cuáles son las estampillas que pertenecen a la colección y cuáles no. Tal vez no interesa el orden en que las estampillas están pegadas en el álbum, ni cuál estampilla es una variante de otra, cuál es más valiosa que otra, etcétera. En este caso basta un análisis conjuntivista; la colección se trata simplemente como la clase o el conjunto de las estampillas. Si, en cambio, se desea tener en cuenta las relaciones arriba mencionadas u otras similares, habría que considerar una estructura como <*est*, *Ant*, *Var*, . . .>, donde *est* (o sea *V*) sería la clase de las estampillas, *Ant* la relación biposicional *figurar con anterioridad en el álbum*, *Var* la relación biposicional *ser una variante de*, etcétera.

En muchos otros casos el análisis conjuntivista es de antemano insuficiente; no basta tratar una pared como una clase de ladrillos, una piedra como una clase de moléculas, una manzana como una clase de células o de moléculas, una melodía como una clase de sonidos. En todos estos casos debe considerarse un determinado número de funciones proposicionales, aparte de la clase que se elige para formar la base de la estructura respectiva.

Así tendríamos para una pared determinada hecha sólo de ladrillos, sin argamasa, algo como <*lad*, *Tar*, *Tis*, . . .>, donde *lad* sería la clase respectiva de los ladrillos, *Tar* la relación biposicional *topar en el plano por arriba*, *Tis*, *topar en el* *plano por la izquierda*, también con relaciones como *topar en una línea*, *topar en un punto* y tal vez otras más. Aplicando el mismo tratamiento a todo lo que, en principio, uno está dispuesto a considerar como pared de ladrillos, se pueden formar en general las estructuras correspondientes. No es difícil construir un sistema llamado tal vez "teoría de las paredes de ladrillos" que señala, mediante axiomas y teoremas demostrados, las características comunes de todas estas estructuras en un sentido muy amplio (incluyendo, por ejemplo, las estructuras isomorfas con ellas). Los modelos del sistema serían, luego, paredes de ladrillos (tratadas como estructuras) y estructuras isomorfas con paredes de ladrillos, todo en plena analogía con los grupos, anillos y álgebras de Boole.

Consideraciones similares, aunque más complejas, se aplican a piedras, manzanas, etcétera, se construyen sistemas correspondientes y se consideran luego los modelos de estos sistemas.

Una determinada melodía ejecutada (es decir, interpretada tal día y a tal hora) podría tratarse, en un análisis muy primitivo, como <*son*, *Ant*, . . .>, donde *son* sería la clase de los sonidos respectivos (que a su vez son complejos e incluyen también la falta de sonido, o sea, el silencio), *Ant*, la relación de anterioridad y algunas relaciones más, según el grado en que uno quiere profundizar el análisis. Un musicólogo probablemente procedería en forma diferente; por un lado, no partiría de *son* sino de una clase de sonidos en algún sentido básicos; por otro, no analizaría melodías ejecutadas sino melodías de tipo general que son comunes a una variedad de ejecuciones. Estos detalles, aunque en sí muy interesantes, no son esenciales para un tratamiento general de las estructuras. En cualquier

caso se procede, luego, a la construcción de los sistemas correspondientes, lo que permite, posteriormente, analizar los modelos de estos sistemas.

También una familia o un regimiento son más que una clase de personas, al igual que un bosque es más que una clase de árboles. Para una familia determinada en sentido biológico (sin considerar aspectos legales) tenemos algo como <*pers*, *Mas*, *Pam*, *Cop*, *Cos*, . . .>, donde *pers* es la clase de los integrantes de la familia, *Mas* la función uniposicional *ser de sexo masculino*, *Pam* la relación biposicional *ser padre o madre de*, *Cop* la relación biposicional *ser primer cónyuge* (en orden temporal) *de*, *Cos* la relación biposicional *ser segundo cónyuge de*. Análogamente un regimiento determinado puede tratarse tal vez como <*pers*, *Sa*, *Ten*, . . .>, donde *pers* es la clase de los integrantes del regimiento, *Sa*, la relación biposicional *ser sargento de*, *Ten*, la relación biposicional *ser teniente de*. Sin dificultad se forman los sistemas correspondientes que tienen por modelos familias (regimientos) y estructuras isomorfas con familias (regimientos).

En el caso de los bosques un tratamiento simplificado sería limitarse a los árboles y a las relaciones entre ellos. Naturalmente nada nos impide profundizar el análisis incluyendo en la clase *V* las demás plantas del bosque, los animales y otros objetos que, según la opinión del que realiza el análisis, tienen importancia. Una vez tomadas las decisiones previas respecto de *V* y las funciones proposicionales, se forman las estructuras y el sistema correspondiente.

Lo que se señaló aquí para objetos y entidades simples (muy simplificadas en estas páginas) puede extenderse también a casos más complejos, como estados psíquicos, lenguajes, economías y sociedades. Pero entonces el grado de dificultad aumenta enormemente, a menos que uno se limite a tomar en cuenta sólo unas pocas funciones proposicionales.

9. Parte y entero

La relación *parte - entero* es un problema interesante de la lógica. Ha sido analizada a fondo en algunos casos especiales como el de *subclase - clase* y de *subestructura - estructura*. En cambio la relación entre lo que aquí se llamará "estructura parcial" y la estructura entera no ha sido tratada en forma especial, que yo sepa (véase, por ejemplo, [8] y [4] en la bibliografía).

Tengamos un triple $\langle V, F, G\rangle$ que es un grupo, o sea una estructura que cumple con las condiciones señaladas en los axiomas de la teoría de los grupos. Formemos, además, un triple $\langle V', F', G'\rangle$ donde V' es una subclase (no vacía) de V y F' y G' con restricciones de F y G a V' (son F y G aplicadas sólo a los elementos de V'). Supongamos que $\langle V', F', G'\rangle$ también sea un grupo. En este caso decimos que $\langle V', F', G'\rangle$ es un *subgrupo* de $\langle V, F, G\rangle$. Por ejemplo, los números enteros (positivos, 0 y negativos) forman, respecto de la igualdad y la suma, un grupo $\langle ent, Ig, Su\rangle$. Lo mismo hacen los números pares (positivos, 0 y negativos) respecto de igualdad y suma restringidas a los números pares. Así $\langle par, Ig', Su'\rangle$ es un subgrupo de $\langle ent, Ig, Su\rangle$.

Exactamente las mismas consideraciones pueden aplicarse a cualquier estructura, de modo que podemos hablar de subparedes de ladrillos, de subpiedras, submanzanas, submelodías, etcétera.

Se exige que V' sea una subclase de V, en otras palabras, que todos los elementos de V' sean elementos de V. Puede ser que también todos los

elementos de V sean elementos de V' (en este caso se dice que V' es *subclase impropia* de V) o que en V haya elementos que no figuran en V' (en este caso se dice que V' es *subclase propia* de V). Aplicando la definición de "subestructura" a las subclases impropias, se ve que cada grupo es subgrupo de sí mismo, cada piedra subpiedra de sí misma.

Sin embargo, estos casos triviales en que V' es una subclase impropia de V interesan menos que los casos en que V' es una subclase propia de V (así, en el ejemplo, *par* es subclase propia de *ent*).

Muchos grupos tienen subgrupos propios, como es fácil de ver. Dada una pared de ladrillos de cierta extensión, se puede encontrar una subpared propia, o sea, una subclase propia de *lad* cuyos elementos cumplen, respecto de las relaciones *Tar'*, *Tis'*, etcétera, con las condiciones características de las paredes de ladrillos. Algo análogo vale también para las piedras de cierto tamaño. En cambio, la única submanzana de una manzana dada es esta manzana misma, porque no hay una subclase propia de las células de modo que los elementos de esta subclase cumplan, respecto de las funciones proposicionales correspondientes, con las condiciones características de las manzanas (por lo menos en el caso ideal de las manzanas a las que no les faltan partes).

Para melodías no demasiado cortas hay submelodías propias, y lo mismo vale para familias más o menos numerosas. También hay subregimientos propios (por ejemplo un regimiento después de los combates en relación con el regimiento antes de los combates) e, igualmente, hay subbosques propios.

Tenemos, así, un tipo de relación *parte - entero* que ha sido ampliamente investigado, por lo menos en el caso de las álgebras tradicionales, como grupos, anillos y álgebras de Boole. Se vio que la extensión de este tratamiento a paredes, piedras y otros objetos no ofrece dificultades en principio.

Sin embargo, hay casos en que la relación *parte-entero* no está comprendida en el tratamiento de subestructuras. Así un cuarto de manzana no es una manzana, una tajada de pan no es un pan. En todos estos casos no se trata de subestructuras, porque las células del cuarto de manzana o las moléculas de la tajada de pan no cumplen, respecto de las funciones proposicionales correspondientes, con las condiciones características de las manzanas o de los panes, respectivamente.

Por otro lado, las células del cuarto de manzana cumplen con *algunas* condiciones características de las manzanas. En otras palabras, aunque $\langle cel', F', G', \ldots \rangle$ no es una submanzana de $\langle cel, F, G, \ldots \rangle$, los elementos de cel' cumplen, respecto de F', G', etc., por lo menos con algunas de las condiciones señaladas en los axiomas y demás teoremas del sistema que podría llamarse "teoría de las manzanas". Habría que indicar cuáles son las condiciones que se desean conservar y, eventualmente, cuáles son las condiciones adicionales cuyo cumplimiento se exigirá para las *partes de* manzanas. Una vez hecho esto, se construye sin dificultad un sistema tal vez llamado "teoría de las partes de manzanas". Uno de sus modelos sería entonces $\langle cel', F', G', \ldots \rangle$; si, además, cel' es una subclase de cel y si F', G', etcétera, son restricciones de F, G, respecto de aquellas condiciones que se conservan, entonces $\langle cel', F', G', \ldots \rangle$ podría considerarse como parte de $\langle cel, F, G, \ldots \rangle$.

La relación *parte de manzana - manzana* sería entonces un nuevo tipo de relación *parte - entero*. Exactamente el mismo tratamiento puede aplicarse a la relación *tajada de pan - pan* y a muchos otros ca-

sos. El nuevo tipo de partes podría llamarse "estructuras parciales" (respecto de las estructuras originales).

Hay muchas diferencias entre las subestructuras, por un lado, y las estructuras parciales, por otro. Así, para cualquier estructura queda establecido en principio cuáles son sus subestructuras (estructura y subestructuras respectivas son de la misma clase). En cambio, en cada caso hay que fijar de nuevo cuáles son las estructuras parciales de una clase dada de estructuras; por ejemplo, se debe fijar qué es una estructura parcial respecto de las manzanas, qué es una estructura parcial respecto de los panes, etcétera.

Vimos antes que cada estructura es subestructura de sí misma. En cambio una estructura no es necesariamente estructura parcial de sí misma (no lo es si para las estructuras parciales respectivas se fijan condiciones adicionales que no se cumplen en las estructuras originales).

Una pregunta interesante se refiere a la parte de la parte. ¿Es a su vez parte del entero? Respecto de las subestructuras tenemos (según la definición de "subestructura") el resultado de que una subestructura de una subestructura de una estructura es también directamente subestructura de la estructura.

Tampoco aquí tenemos lo mismo para las estructuras parciales. Supongamos que una miga de pan sea estructura parcial de una tajada de pan (cumple con las condiciones características de las *partes de tajadas de pan* y hay la relación de subclase entre las V respectivas y de restricción entre las funciones proposionales). Supongamos, además, que la tajada a su vez sea estructura parcial de un pan entero (cumple con las condiciones características de las *partes de panes* y hay la relación de subclase y de restricción). No por eso la miga es necesariamente estructura parcial del pan entero, ya que no cumple automáticamente con las condiciones características de las *partes de panes*. Depende del sistema de las partes de panes elegido si, además de las tajadas, también las migas se consideran partes de panes. Aunque así, en resumen, E_1 (la miga) es estructura parcial de E_2 (de la tajada) y E_2 es estructura parcial de E_3 (del pan entero), no por eso E_1 es automáticamente estructura parcial de E_3.

Los análisis recién señalados nos proporcionaron algunos datos básicos sobre dos relaciones bien diferenciadas, la de subestructura y la de estructura parcial. Ambas pueden tratarse rigurosamente y son, hasta cierto punto, representativas de la relación informal *parte - entero*.

Ejercicio 9.1) Hacer una lista de ejemplos entero - parte, subrayando aquellas expresiones de partes que simbolizan subestructuras.

Ejercicio 9.2) Indicar teoremas que rigen para una estructura y no para una de sus estructuras parciales y viceversa (señalando previamente la estructura parcial). Ejemplo respecto a manzanas y partes de manzanas (con Pul_1 *ser célula de la pulpa* y Ex_1 *ser célula que está en contacto con el exterior*): "Ninguna célula de *Pul* es *Ex*".

10. El tiempo en el tratamiento estructural

Se señaló en la introducción que este trabajo, aunque dedicado a las estructuras, no está dentro de la línea estructuralista. Así, el estructuralismo generalmente trata las estructuras haciendo abstracción del tiempo, o bien las enfoca en un determinado punto temporal, sin tener en cuenta, de este modo, los cambios temporales, o sea, el desarrollo. En cambio, desde el punto de vista logicomatemático no hay razón alguna para excluir los factores temporales, si éstos son de interés para el campo respectivo. Tampoco existen dificultades en principio que impidan un tratamiento temporal.

Como ejemplo sencillo se señalará el caso de las familias. Vimos que sin consideraciones temporales una familia puede presentarse como k-tuplo de la forma <*pers*, *Mas*, *Pam*, *Cop*, *Cos*, . . .>. En esta estructura queda establecido quién es tío de quién, al igual que en un árbol genealógico; pero no se toma en cuenta que el tío y el sobrino hayan o no hayan vivido como contemporáneos durante un tiempo, ni quién de los dos haya nacido o muerto antes.

Para tratar ahora ciertos aspectos temporales, consideremos una familia durante un tiempo determinado, supongamos un siglo. Efectuamos un corte temporal siempre que un integrante de la familia haya nacido, se haya casado, haya muerto y tal vez haya intervenido en otros acontecimientos que se consideren importantes. Supongamos que el número total de los cortes temporales sea 80, aparte de las fechas claves que son el principio y el fin del siglo. El siglo se descompone entonces en 81 trechos temporales.

Supongamos que el nacimiento de Jonás haya marcado el principio del trecho 17 y su muerte el fin del trecho 60 (el principio del trecho 61). En vez de considerar a Jonás como un único elemento de *pers*, trataremos ahora a Jonás_{17}, a Jonás_{18}, . . . , a Jonás_{60} como elementos de una clase *pert*, o sea, de una clase cuyos elementos se llamarán "personas temporales". Se procede de un modo análogo con los demás integrantes de la familia. Así *pert* tiene muchos más elementos que *pers* (en vez de un solo Jonás tiene 44 Jonás). Ahora, *pert* nos servirá de clase básica para una estructura en que aparte de *Mas* *, *Pam* *, *Cop* *, *Cos* * (las funciones proposicionales de la estructura original atemporal modificadas correspondientemente para referirse ahora a los elementos de *pert*), figuran numerosas funciones proposicionales como *presentarse en el mismo trecho temporal que* (por ejemplo, Jonás$_{22}$ y Pablo$_{22}$), *estar conectado evolutivamente con* (por ejemplo, Jonás$_{22}$ con Jonás$_{47}$), etcétera.

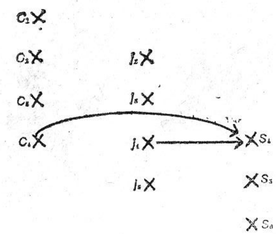
Consideraciones análogas pueden aplicarse a todas las estructuras, por ejemplo, a las piedras o, para mencionar un caso donde el tiempo es de importancia, a los núcleos de átomos durante un lapso determinado, usando en este caso como clase básica las partículas y resonancias temporalmente limitadas (en analogía a Jonás$_{17}$, etcétera).

La lógica y la matemática tienen muchas otras maneras de considerar el tiempo, por ejemplo, incluyendo entre los individuos de la clase *V* los puntos temporales.

Todo esto nos permite ver que tiempo, desarrollo e historia son perfectamente compatibles con el tratamiento estructural.

Ejercicio 10.1) Supongamos que tenemos los siguientes individuos de *pert*: Carlos$_1$, Carlos$_2$, Julia$_2$, Carlos$_3$, Julia$_3$, Carlos$_4$, Julia$_4$, Sonia$_4$, Julia$_5$, Sonia$_5$, Sonia$_6$. Supongamos, además, que sabemos que sólo nacimiento, casamiento y muerte de una de las tres personas inician o terminan un corte temporal. Escribir la historia de la familia. Ella comenzaría así: Nace Carlos (el primer trecho corresponde a la vida de Carlos antes de que Julia haya nacido), nace Julia . . .

Ejercicio 10.2) Una representación gráfica de los individuos del ejercicio 10.1 con la relación *ser actualmente padre o madre de* sería:



Representar (con otros tipos de flechas) las relaciones *presentarse en el mismo trecho temporal* y *estar conectado evolutivamente.*

Ejercicio 10.3) Tengamos un pión negativo (π^-), este se desintegra en un muón negativo (μ^-) y un neutrino (ν), luego el muón se desintegra en un electrón (e^-), otro neutrino (ν') y un antineutrino ($\bar{\nu}$). a) Indicar la clase *part* de las partículas temporales. b) Representar gráficamente la estructura $<$*part*, *Noc*$_1$, *Des*$_2$, *Ev*$_2>$, donde *Noc* es la clase de aquellas partículas (temporales) que no tienen carga eléctrica (es decir, las partículas temporales que corresponden a los dos neutrinos y al antineutrino), *Des* es la relación *ser producto directo de la desintegración de* y *Ev* la relación *estar conectado evolutivamente* (entre partículas temporales que corresponden a una misma partícula).

11. Conclusión

Si prescindimos de consideraciones especulativas y nos limitamos a un tratamiento estructural del tipo aquí indicado, vemos que éste constituye un método muy fructífero. En el estado actual de las ciencias tiene aplicación universal, o sea, el tratamiento estructural puede imponerse, con más o menos ventaja, a todo campo teórico (se construye la clase V, se establecen las funciones proposicionales que son de interés, luego se forma el k-tuplo, etcétera). Sin embargo, no se debe sobrevalorar este tratamiento en forma unilateral ni olvidar que hay otros métodos que pueden ser igualmente fructíferos.

Bibliografía

1. Carnap, R.: *The Logical Structure of the World - Pseudo-problems in Philosophy.* Berkeley, Los Angeles, 1969.
2. Piaget, J.: *Le structuralisme.* París, 1968.
3. Pingaud, B. y otros: *Lévi-Strauss: Estructuralismo y dialéctica.* Buenos Aires, 1968.
4. Rescher, N.: *Axioms for the Part Relation*, Philosophical Studies, vol. 6. Minneapolis, 1955, págs. 8-11.
5. Robinson, A.: *Introduction to Model Theory and the Metamathematics of Algebra.* Amsterdam, 1963.
6. Stahl, G.: *Elementos de metamatemática*, Santiago, 1973.
7. —: "Linguistic Structures Isomorphic to Object Structures". *Philosophy and Phenomenological Research*, vol. XXIV, nº 3, 1964, págs. 339-344.
8. —: "Termes temporals dans des systèmes fonctionnels", *Revue Philosophique de la France et de l'étranger*, París 1974, nº 3, págs. 293-303.
9. Tarski, A.: *Foundations of the Geometry of Solids*, en *Logic, Semantics, Metamathematics*, Oxford, 1956, págs. 24-29.

CAPITULO II

LA VERDAD DESDE EL PUNTO DE VISTA LOGICOMATEMATICO

En un tiempo en que tantas "verdades eternas" se ven contradichas, la verdad misma no puede escapar a un análisis científico, realizado, en este caso, en el marco de la lógica matemática o lógica simbólica. Como muchos otros trabajos científicos, también aquellos que versan sobre la verdad tienen sus raíces en el pasado, pero constituyen al mismo tiempo una superación de las contribuciones precientíficas.

Dado el carácter general de esta conferencia, los aspectos puramente técnicos de la definición de "verdad" no se tratarán, y, dado su carácter científico, las consideraciones especulativas en torno a la verdad tampoco serán tratadas. En la región límite entre lógica formal y teoría del conocimiento (y no en la región límite entre metafísica y teoría del conocimiento) está situado el presente análisis. Este excluye igualmente consideraciones psicológicas.

La lógica matemática se ocupa, por un lado, de un lenguaje formal o parcialmente formalizado y, por otro, de objetos denotados por ciertas expresiones del lenguaje. Estos objetos (tomando "objeto" en un sentido muy amplio) no son necesariamente reales (la realidad no es un problema de la lógica formal). Así, entre tales objetos pueden figurar, por ejemplo, $\sqrt{-1}$, el Pegaso o la clase de los hombres.

Una parte de las expresiones del lenguaje son las frases; por ejemplo, "La torre Eiffel está en París" y "La torre Eiffel está en Santiago". Las frases se clasifican habitualmente en dos clases, de modo que una frase del lenguaje pertenece a una sola de estas dos clases. Se habla de "lógica bivalente" si se aplica rigurosamente la convención de que cada frase pertenece a una o a otra clase; y esto aunque en algunos casos, por falta de conocimientos, no podamos realizar efectivamente esta clasificación. Las frases de la primera clase se llaman "frases verdaderas", las de la segunda, "frases falsas".

Para establecer esta clasificación, es decir, para determinar en principio qué frase pertenece a qué clase, necesitamos una definición formal de "frase verdadera" y "frase falsa". Tal vez sean conocidas formulaciones como: "La nieve es blanca" es verdad, si, y sólo si la nieve es blanca; "La torre Eiffel está en Santiago" es verdad, si, y sólo si la torre Eiffel está en Santiago, etcétera. Se puede dar un número tan grande como se quiera de estas definiciones parciales para un caso concreto; esto no constituye nunca una definición general de "frase verdadera".

Para dar una definición *general* se utilizará un procedimiento de Tarski, muy simplificado y un poco cambiado. En primer término hay que hacer una distinción entre frases primitivas y frases compuestas. Una frase primitiva es una combinación de una expresión individual como "la torre Eiffel" y de un predicado como "estar en París"; también hay frases primitivas constituidas por varias expresiones individuales y un predicado. Una frase compuesta se forma partiendo de una o varias frases primitivas, agregando en forma apropiada "no", "o", "y", "si... entonces", "todos", "por lo menos un" y otras conectivas.

Se puede dar, ahora, una definición de "frase verdadera" y "frase falsa" en los puntos siguientes (únicamente las expresiones señaladas por estos puntos son verdaderas, respectivamente falsas):

1) Una frase primitiva es verdadera si el individuo de la expresión individual (la torre Eiffel) satisface la función correspondiente al predicado (si la torre Eiffel satisface la función *estar en París*). La frase es falsa si el individuo no satisface la función. Esto corresponde perfectamente a las definiciones parciales aquí señaladas (ejemplo, "La nieve es blanca"...). Análogamente se tratan frases primitivas con varias expresiones individuales.

2) Una frase precedida por la negación es verdadera si la frase sin negación es falsa. Ella es falsa en el caso contrario.

De un modo análogo se formulan reglas para "o", es decir, para la disyunción, y para "todos", es decir, para el operador universal.

Debido a que se pueden formar todas las frases compuestas partiendo de frases primitivas y utilizando la negación, la disyunción y el operador universal, la definición indicada, que es absolutamente rigurosa, abarca todas las frases del lenguaje.

Sin embargo, se presenta de inmediato un problema que exige mayor precisión. Se pueden hacer *diversas* clasificaciones en frases verdaderas y falsas. Por ejemplo, para la aritmética habitual "$2 + 2 = 4$" es una frase verdadera y con todo otro valor en lugar de *4* se obtiene una frase falsa. Respecto de un álgebra de Boole, en cambio, "$2 + 2 =$

2" es una frase verdadera, y, para un álgebra módulo 3, "$2 + 2 = 1$" es verdad. Lo que hay que hacer entonces es precisar respecto de qué las frases son verdaderas o falsas.

Para esto tenemos que referirnos a ciertos k-tuplos, o sea, a secuencias de k miembros (k objetos puestos en fila, uno en el primer lugar, uno en el segundo lugar..., uno en el k-ésimo lugar). Los k-tuplos tratados aquí se representan simbólicamente por "$<\ldots,\ldots,\ldots>$", colocándose en los lugares correspondientes los símbolos de los objetos a que se refieren. Consideremos aquellos k-tuplos que tengan en el primer lugar una clase de individuos V, que tiene por elementos, por ejemplo, la torre Eiffel, la nieve, etcétera. Luego figuran en el k-tuplo funciones proposicionales, como *estar en París, ser blanco*, y otras. Los k-tuplos que nos interesan aquí tendrían entonces la forma $<V,\ldots,\ldots>$ con símbolos de funciones proposicionales en lugar de los puntos suspensivos. Estos k-tuplos se llaman "estructuras". Hoy día se trabaja ampliamente con estructuras en muchos campos científicos, los ejemplos más conocidos en matemática son las álgebras.

Respecto a estas estructuras hay que definir "frase verdadera" y "frase falsa". Entonces "$2 + 2 = 4$" es verdad respecto de la aritmética habitual, que constituye, en términos estructurales, un álgebra llamada "cuerpo"; "$2 + 2 = 2$" es verdad respecto de un álgebra de Boole, etcétera.

Así tenemos una relativización de la verdad respecto de las estructuras. Pero no hay que ver algo negativo en esto. Si conociéramos la realidad podríamos decir que "$2 + 2 = 4$" es verdad respecto de la realidad *si tuviéramos* $2 + 2 = 4$ *en realidad*. ¿Pero $2 + 2 = 4$ en realidad? ¿O 2? ¿O 1? No podemos responder a estas preguntas; pero podemos

responder frecuentemente si se trata de una estructura que corresponde a una ciencia.

La relativización no debe ser entendida en el sentido de que todo resulta vago e impreciso, o de que todo depende de las preferencias personales. Al contrario, sabemos absolutamente que, para un cuerpo, "$2 + 2 = 4$" es verdad y, para un álgebra de Boole, "$2 + 2 = 2$". Se trata aquí, por decirlo así, de una relatividad objetiva que depende del k-tuplo y no de las personas o de las convicciones. Algo análogo pasa, por ejemplo, con la teoría especial de la relatividad, donde todo depende de la velocidad entre los objetos.

Los sistemas formales, especialmente la matemática, son como los instrumentos de un cirujano. Cuando el cirujano efectúa una operación, elige el instrumento más adecuado. Exactamente lo mismo hace el físico cuando necesita una teoría formal o parcialmente formalizada para resolver sus problemas.

Con todo esto volvamos ahora a la definición de "verdad". En el fondo ella puede parecer bastante trivial. Una parte de esta apariencia injustificada se debe a la simplificación adoptada en esta conferencia. La auténtica definición de Tarski es mucho más técnica. Ella es extraordinariamente fructífera, lo que siempre constituye un criterio de no-trivialidad. Por ejemplo, la teoría de los modelos y algunos otros sectores de la matemática actual se han beneficiado largamente con el tratamiento tarskiano de la verdad. Otra parte de la trivialidad aparente se debe a cierta semejanza con algunas definiciones clásicas.

Para apreciar esta semejanza se puede considerar en primer lugar una definición de Aristóteles, que es la más cercana: *Decir de algo que es, que no es, o de algo que no es, que es, es falso; mientras que* *decir de algo que es, que es, o de algo que no es, que no es, es verdadero.* Se ve que la diferencia fundamental no está en la concepción de la verdad, sino en el hecho de que la nueva definición es detallada y precisa hasta el último punto. Ella es rigurosamente formalizable, lo que no se puede decir de la definición de Aristóteles. Hay que tener presente que ninguna precisión en esta materia es excesiva, ya que de otro modo pueden obtenerse paradojas del tipo del "Mentiroso".

Consideremos ahora otra definición clásica, la de la *"adaequatio rei et intellectus"*.

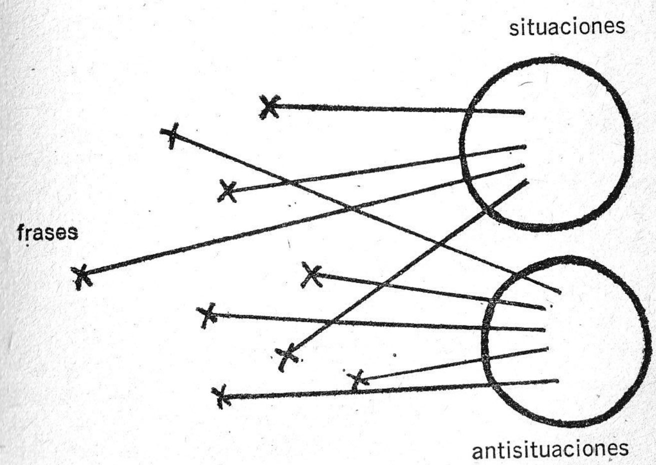
El término *"intellectus"* se utiliza frecuentemente en un sentido psicológico. Se establece la adecuación con actos o contenidos psíquicos. Sin embargo, la lógica matemática prescinde totalmente de las consideraciones psicológicas, que, en este caso, son puramente especulativas o pueden variar de un individuo a otro. En lugar de referirse al *intellectus*, ella toma como punto de partida las expresiones, las que para ella son secuencias de signos tipográficos ("n", "i", "e", "v", "e"), es decir, algo concreto y accesible a todo el mundo.

El término *"res"*, que se traduce literalmente por "cosa", debe ser entendido como "situación", o "estado de cosas", o algo similar.

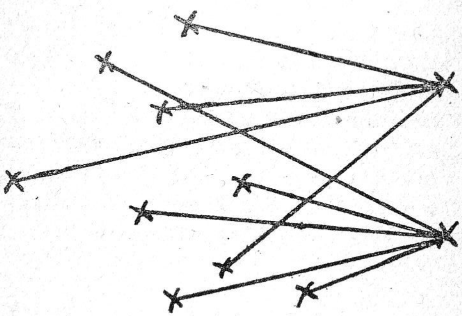
El verdadero problema de esta concepción clásica no es ni el *intellectus* ni la *res*, sino la adecuación. Normalmente la adecuación no es identidad. ¿Puede ser similitud? Pero ¿de qué modo? Naturalmente ella puede ser una correspodencia. Pero hay muchas correspondencias entre expresiones y no-expresiones; por ejemplo, debido a una técnica especial de Gödel se puede establecer una correspondencia entre expresiones cualesquiera y números naturales, de modo que cada expresión, cualquiera que ella sea, tenga su número correspondiente y

cada número natural su expresión. Todo esto indica una sola cosa: hablar de adecuación no basta, es algo demasiado vago; hay que especificar *cuál* es la correspondencia, lo que no hace la palabra "adecuación", pero sí la definición indicada.

Consideremos una estructura dada. Supongamos, para tratar un caso simple, que un individuo satisface una de las funciones de la estructura. Este hecho de que el individuo satisface la función se llamará "situación" de la estructura. Si el individuo no satisface la función mencionada se habla de "antisituación" de la estructura. Estas mismas consideraciones pueden extenderse también a casos más complejos. Según la definición indicada de "verdad", las situaciones corresponden a las frases verdaderas y las antisituaciones a las frases falsas. La correspondencia así establecida puede ser considerada como un tipo de denotación, donde cada frase verdadera denota su situación y cada frase falsa, su antisituación. Gráficamente tendríamos:



Otro tratamiento sería el siguiente: Podríamos considerar todas las situaciones idénticas entre sí y también todas las antisituaciones. Luego podríamos limitarnos a tomar una situación cualquiera como representativa de las situaciones y simbolizarla por "σ". También podríamos trabajar con una antisituación representativa, simbolizada por "α". Entonces, según este segundo tratamiento, todas las frases verdaderas denotarían σ y toda las frases falsas, α. Gráficamente esto se representaría por:



En algunos textos de lógica - matemática σ y α se llaman "valores veritativos", σ sería el valor veritativo *verdad* y α, el valor veritativo *falsedad.* Para no producir confusiones con algunos otros términos utilizados, se prefiere hablar aquí simplemente de σ y α.

Hasta el momento se han visto sólo frases. Pero también hay otro tipo interesante de expresiones, como "$x = x$" o "x es el padre de y", etcétera. Este tipo de expresiones se llama "esquemas", con uno o varios símbolos de variables ("x", "y"). Un modo de transformar un esquema en una frase es sustituir (colocar), en lugar de los símbolos de todas

las variables, símbolos que denotan individuos determinados (o, según el caso, funciones proposicionales determinadas) de la estructura correspondiente. Tengamos, por ejemplo, como individuos del k-tuplo personas de una familia, entre ellos Carlos y María; al sustituir "Carlos" en lugar de "x" y "María" en lugar de "y", se obtienen frases como "Carlos = Carlos" y "Carlos es el padre de María". Si un esquema se transforma en frase *verdadera* en todas las sustituciones, entonces se llama "expresión siempre verdadera" o "expresión válida" respecto de la estructura dada. De modo análogo existen expresiones a veces verdaderas y a veces falsas y también expresiones siempre falsas respecto de la estructura.

Hasta el momento se han visto expresiones que son verdaderas o válidas respecto de la estructura dada. Pero se puede demostrar que hay también expresiones que son verdaderas o válidas respecto de todas las estructuras. Estas expresiones se llaman "expresiones lógicamente verdaderas (lógicamente válidas)"; por ejemplo, "Si la torre Eiffel está en París, entonces la torre Eiffel está en París" y "$x = x$". Ya Leibniz las había considerado al hablar de verdades de razón, que rigen para todos los mundos posibles. Actualmente no se habla de mundos posibles, sino en su lugar, de estructuras.

Se podría pensar que con estas expresiones tenemos verdades (expresiones válidas) independientes de las estructuras y, por lo tanto, absolutas. Desgraciadamente no es así. Aunque son totalmente independientes de las estructuras, hay todavía otras relativizaciones, de las cuales todavía no se ha hablado.

Primera relativización adicional: hasta el momento hemos trabajado con sistemas lógicos sin especificarlos. Pero todas las expresiones lógicamente verdaderas (válidas) dependen del sistema elegido. No hay sistema absoluto y universal. Prácticamente se trabaja siempre con un sistema llamado "sistema funcional superior", o con una parte de él, el sistema funcional básico. Pero se trata aquí de una preferencia por razones prácticas, a causa de que este sistema, utilizado junto con las estructuras, corresponde a nuestras experiencias. En principio se podrían formar sistemas lógicos cuyas expresiones lógicamente verdaderas (válidas) sean las negaciones de aquellas de los sistemas usuales.

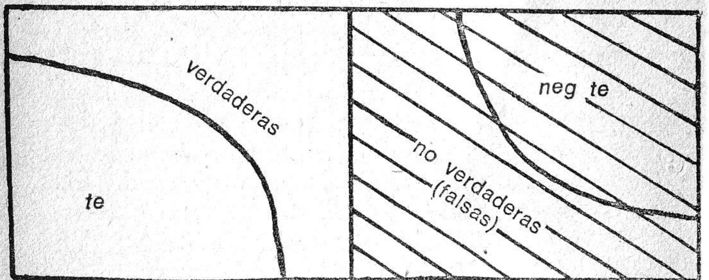
Segunda relativización adicional: las reglas de la definición de "verdad" han sido elegidas convencionalmente. Para dar un ejemplo, se podría decir que una frase es verdadera si ella comienza con una vocal y falsa si comienza con una consonante. Naturalmente no se van a elegir definiciones de este tipo. La exigencia formulada normalmente frente a las definiciones de "verdad", es que ellas sean definiciones *adecuadas*. Es posible definir precisamente lo que es a su vez una definición adecuada de "verdad". Se formulará aquí esta exigencia de un modo un poco simplificado: una definición de "verdad" es adecuada, si, y sólo si podemos deducir de la definición todas las expresiones correspondientes de la forma "*s* es verdad, si, y sólo si *p*", donde en lugar de "*p*" se sustituye una frase y en lugar de "*s*" una expresión que denota la frase. Para dar un ejemplo, *p* corresponde a: la nieve es blanca; *s* corresponde a "la nieve es blanca" (frecuentemente se utiliza para denotar una expresión, la misma expresión puesta entre comillas).

La definición de "verdad" que se introdujo al principio de la conferencia es adecuada, como se puede ver, porque podemos deducir de ella todas las expresiones de la forma: "la nieve es blanca" es verdad, si, y sólo si la nieve es blanca.

Habiendo hablado tanto de relativizaciones, uno podría pensar que ya no queda nada estable. Sin embargo, si utilizamos el sistema funcional básico o superior y una definición adecuada de "verdad", entonces la clase de las expresiones lógicamente verdaderas (lógicamente válidas) es fija y estable. Naturalmente esta estabilidad se debe a que hemos hecho nuestra elección del sistema lógico y del tipo de definiciones de "verdad".

En conexión con lo anterior hay que decir algunas palabras sobre la relación entre las expresiones verdaderas y válidas, por un lado, y los teoremas, por otro. Las primeras han sido introducidas por definiciones del tipo indicado; los segundos se demuestran a partir de axiomas y utilizando reglas axiomáticas, según los criterios generales para *sistemas* (que no son más que los conjuntos, o sea colecciones, de los teoremas respectivos). En lo que sigue se utilizará el término "expresión válida" no sólo para los esquemas válidos, sino también para las frases verdaderas, que constituyen, en el fondo, un caso especial de las expresiones válidas.

Al leer, por ejemplo, los "Principia Mathematica" de Russell y Whitehead, se nota que los dos autores han identificado, de hecho, las expresiones válidas con los teoremas. Era la tendencia natural de su época, y sólo unos veinte años más tarde Gödel demostró que no pueden coincidir, si los sistemas tienen cierta extensión. Es decir, el conjunto de los teoremas es o más amplio o más estrecho que el conjunto de las expresiones válidas. Se prefiere trabajar entonces, en cada caso, con un sistema más estrecho que el conjunto de las expresiones válidas; de este modo por lo menos todos los teoremas son válidos. Una representación gráfica de esta situación, pero sólo para las frases, sería:



Tomando más axiomas se obtienen más teoremas (*te*) y también más negaciones de teoremas (*neg te*); pero Gödel demostró justamente que este proceso no llega nunca a un fin. Se pueden agregar indefinidamente axiomas y, sin embargo, quedan siempre frases verdaderas que no son teoremas, o el conjunto de las frases que son teoremas sobrepasa el conjunto de las frases verdaderas. Lo análogo rige también para los esquemas válidos y los esquemas que son teoremas. Así, una identificación de los sistemas, por un lado, con los conjuntos de las expresiones válidas, por otro, no es posible (para lograrla habría que cambiar la definición de "sistema", utilizando los llamados "semisistemas", o, la definición de "expresión válida", utilizando en su lugar las llamadas "expresiones secundariamente válidas"). Pero esto no significa que hemos llegado al fin de la matemática rigurosa, como se puede leer a veces; significa sólo que la lógica y la matemática disponen de dos técnicas para establecer expresiones de preferencia (las válidas y los teoremas), y que los conjuntos formados mediante estas dos técnicas son diferentes.

Existen textos de filosofía especulativa sobre la verdad, en que todas las dificultades están definitivamente resueltas, todos los adversarios han sido refutados y todo está puesto perfectamente en su lugar. No hay sólo un trabajo de este tipo sobre la verdad sino muchos, y todos son igualmente definitivos. Desgraciadamente ninguno de estos textos coincide con otro. Ahí está la gloria y la miseria de la filosofía especulativa.

Lo que se ha señalado aquí no pretende tener el mismo grado de perfección; pero representa lo que se puede decir actualmente al apoyarse en los procedimientos científicos.

Bibliografía

1. Carnap, R.: *Introduction to Semantics.* Cambridge, Mass., 1942.
2. Stahl, G.: "Linguistic Structures Isomorphic to Object Structures". *Philosophy and Phenomenological Research.* Philadelphia, 1964, vol. 24, nº 3, págs. 339-344.
3. —: *Elementos de metamatemática.* Santiago, 1973.
4. Tarski, A.: *Logic, Semantics, Metamathematics.* Oxford, 1956.