Allwood, J.; Andersson, L. Y Dahl, Ö. (1981): *Lógica para Lingüistas*. Madrid: Paraninfo. Pp. 9-10.

Símbolos y convenciones notacionales

| *Símbolo* | *Nombre* |
|---|---|
| $\in$ | Elemento ('e un miembro de') |
| $\notin$ | 'no es elemento de' |
| $\{\,\}$ | Llaves (denotan conjunto) |
| $\varnothing$ | Conjunto vacío |
| 1 | Conjunto universal |
| $\subset$ | Inclusión propia ('es un subconjunto propio de') |
| $\subseteq$ | Inclusión ('es un subconjunto') |
| $=$ | Identidad de conjuntos |
| $\cap$ | Intersección |
| $\cup$ | Unión |
| — | Diferencia |
| $\langle\rangle$ | Paréntesis en ángulo |
| t | 'verdadero' |
| f | 'falso' |
| $\vert$ | Barra de Sheffer |
| $\sim$ (—) | Negación |
| & (. , $\wedge$) | Conjunción |
| $\vee$ | Disyunción (inclusiva) |
| | Disyunción (exclusiva) |
| $\rightarrow$ ($\supset$) | Implicación (material) |
| $\equiv$ ($\leftrightarrow$) | Equivalencia |
| $\forall$ | Cuantor universal |
| $\exists$ | Cuantor existencial |
| | Conversa de R |
| *M* ($\Diamond$) | Operador de posibilidad |
| *N* ($\Box$) | Operador de necesidad |
| | Implicación estricta ('arpón') |
| | Operador contrafáctico |
| *F, H, G, A* | Operadores temporales |
| $\iota$ | Operador iota |
| $\lambda$ | Operador lamda |
| *A*, *B*, *C* ... | (en teoría de conjuntos) conjuntos<br>(en lógica de predicados) constantes de predicado |
| *a, b, c...* | (en teorías de conjuntos) elementos de los conjuntos<br>(en lógica de predicados) constantes de individuos |
| ***A, B, C*** ... | Conjuntos de conjunto |
| *f, g, h...* | Funciones |
| *p, q, r* ... | Variables de enunciados |
| *x, y, z* ... | Variables de individuo |
| $\Phi, \psi, \mathrm{X}$ ... | Variables de predicado |
| $\alpha, \beta, \gamma$ ... | Metavariables para e.b.f. |
| *P*, *Q*, *R* ... | Metavariables para términos de predicado |
| $t_1, t_2 \ldots t_n$ | Metavariables para términos de individuos |

Las expresiones en castellano y otros lenguajes naturales se citan en cursiva, por ejemplo *caballo*, cuando la expresión hace referencia a sí misma, y entre comillas, por ejemplo, 'caballo' cuando la expresión se refiere al significado de la expresión.
Cuando se introduce un término de importancia, se da en negrita, por ejemplo, **extensión**.

Allwood, J.; Andersson, L. Y Dahl, Ö. (1981): *Lógica para Lingüistas*. Madrid: Paraninfo. Pp. 13-25.

## TEORÍA DE CONJUNTOS

### 2.1. CONJUNTOS Y ELEMENTOS

En lo que sigue utilizaremos a menudo conceptos de la **Teoría de Conjuntos**. Además de sus conexiones con la lógica, la teoría de conjuntos es fundamental en matemáticas y tiene una serie de aplicaciones en lingüística. Por todo ello, vamos a comenzar por una breve caracterización de los conceptos más importantes en este campo.

Un *conjunto*, es una agrupación o colección de cosas o entidades de cualquier tipo. Otros términos que se utilizan a menudo para referirse a conjuntos son los de 'clase' y 'grupo' (aunque estos términos tienen otros usos técnicos diferentes en matemáticas). Un conjunto consiste en una serie de **elementos o miembros.** En la vida cotidiana hablamos habitualmente de conjuntos de elementos que tiene algo en común, por ejemplo hablamos de todos los suecos o del conjunto de los libros en una cierta biblioteca. La teoría de conjuntos no establece tal restricción sobre la formación de conjuntos: un conjunto puede formarse a partir de elementos entre los cuales no existe ninguna relación. Podemos por ejemplo decidir formar el conjunto consistente en el Primer Ministro sueco, el más pequeño de los satélites de Marte y la raíz cuadrada de 7.

Algunas convenciones sobre la notación: usaremos letras latinas mayúsculas (*A*, *B*, *C*...) para referirnos a conjuntos y letras latinas minúsculas (*a*, *b*, *c*...) para referirnos a los objetos singulares que son elementos de los conjuntos. Introducimos un símbolo especial, $\in$, que se lee 'es un elemento de' o bien 'es un miembro de.' Por ejemplo, '*a* es un miembro de *B'* se escribe a e *B.* Si queremos decir que *a* no es un miembro de *B*, escribimos a $\notin$*B.*

Necesitamos también una notación para escribir expresiones tales como 'el conjunto formado por las siguientes personas: 'Juan, Guillermo, Enrique' o 'el conjunto de los españoles pelirrojos'. Para estos casos empleamos llaves, { }. Como se trasluce de los ejemplos empleados, hay al menos dos maneras de definir conjuntos: por **enumeración** y por **descripción.** Utilizando llaves nuestros ejemplos cobrarían el siguiente aspecto:

> Enumeración: {Juan, Guillermo, Enrique}
> Descripción: {x/x es español pelirrojo} (léase: 'el conjunto de los x tales que x es español pelirrojo)

Existen también expresiones del lenguaje cotidiano para expresar esto. Las enumeraciones se forman habitualmente con la conjunción y por ejemplo: *Juan* (y) *Guillermo y Enrique, y para* las descripciones utilizamos oraciones de relativo, p. ej.: lo*s que son españoles*.

Aunque puede resultar extraño, la teoría de conjuntos permite conjuntos cuyo número de elementos es uno o cero. Para cada individuo u objeto en el mundo, hay un conjunto que tiene como único elemento ese individuo u objeto. Por ejemplo, dada una persona *a*, podemos formar el conjunto {*a*}. Es importante recordar que *a y {a}* son cosas diferentes: *a* no es un conjunto.

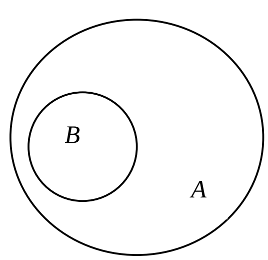
Un conjunto con un único elemento se llama **conjunto unidad.** Un conjunto que no tiene elementos (que tiene cero elementos) se llama **conjunto vacío,** o mejor, el conjunto vacío puesto que sólo hay uno. Lo denotamos con el símbolo $\varnothing$ La razón de que sólo exista un conjunto vacío estriba en un principio general de la teoría de conjuntos, el **principio de extensionalidad,** que afirma lo siguiente: dos conjuntos son diferentes entre sí exactamente cuando existe al menos una cosa que es elemento de uno y no del otro. En otras palabras, si la lista de elementos es la misma, estamos operando con el mismo conjunto. Todo conjunto vacío tiene, evidentemente, la misma lista de elementos, así que no hay más que un conjunto vacío. Una consecuencia ligeramente paradójica de todo esto es que, por ejemplo, el conjunto de todas las mujeres que han sido Presidente de los EE.UU. es idéntico con el conjunto de los perros que escriben programas de computadora. De todos modos entenderemos esto mejor si observamos la diferencia entre (a) el modo en que se escogen los elementos de un conjunto (los criterios para distinguir entre elementos y no-elementos) y (b) los elementos que de hecho se han escogido. Es claro que los mismos elementos se pueden escoger de modos muy diferentes. La idea del principio de extensionalidad es prescindir, totalmente del modo en que los elementos de un conjunto han sido elegidos. Esta distinción está relacionada con otra que tendrá gran importancia en los capítulos siguientes: la distinción entre **intensión y extensión** de una expresión en un lenguaje: Estudiemos un sintagma nominal que, describe un conjunto, p. ej.: *los españoles pelirrojos.* Podemos decir que este sintagma selecciona (o se refiere a) ciertas entidades o cosas en el mundo por medio de una especificación de ciertas propiedades que les son comunes. Las entidades seleccionadas -esto es, las personas que son españolas y pelirrojas- constituyen la extensión del sintagma nominal, mientras que el modo o manera en que son seleccionadas -esta es, los criterios usados para determinar la extensión de la expresión- sería la intensión del sintagma. Vemos ahora que el concepto de 'conjunto' en la teoría de conjuntos se puede considerar **extensional** en el sentido de que no hay que preocuparse por el modo en que los miembros de un conjunto se seleccionan. De ahí el nombre de principio de extensionalidad.

Lo que llevamos dicho pone de manifiesto que el concepto matemático de conjunto no coincide exactamente con el concepto cotidiano al que nos referimos con palabras como 'clase' o 'grupo', aunque provisionalmente lo hayamos supuesto al principio de este capítulo. Cuando hablamos de grupos en la vida cotidiana, por ejemplo al hablar de grupos de personas, pensamos en ellos como sí fueran el mismo en momentos diferentes del tiempo, aunque sus miembros cambien. Así, por ejemplo, hablamos del grupo de personas que gobiernan Inglaterra, diciendo incluso cosas como *este grupo tiene más miembros de los que solía tener,* un enunciado que sería contradictorio si supusiéramos que el principio de extensionalidad es válido para la entidad que designamos con *este grupo.* Nótese también que hay muchas cosas que se pueden decir de los grupos, por ejemplo que realizan tal o cual acción (colectiva) -tal sería el caso en *Nuestro grupo envió una petición al gobierno*-, mientras que por lo menos algunos matemáticos dirían que los conjuntos son entidades abstractas que no hacen tales cosas.

Otro conjunto especial es el **conjunto universal,** que simbolizamos con 1 (el número uno). Para explicar el conjunto universal, hemos de introducir una nueva noción, la de **universo del discurso,** que puede definirse sin pretensiones de exactitud, como 'todo aquello de lo que se habla en un cierto texto o conversación'. Por ejemplo, en un libro de matemáticas el universo del discurso pueden ser todos los números, mientras que en un manual de física podrían serlo todos los cuerpos físicos. El conjunto universal será, pues, el conjunto de todos los objetos en el universo de discurso pertinente.

## 2.2. RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Hay una serie de conceptos en la teoría de conjuntos que se refieren a las relaciones entre conjuntos. Estas relaciones se pueden representar dibujando los conjuntos como círculos. Consideremos por ejemplo el conjunto de todos los europeos y el conjunto de todos los ingleses. Dado que todos los ingleses son europeos podemos dibujar el diagrama (1) para representar las relaciones entre los dos conjuntos, siendo *A* el conjunto de los europeos y *B* el conjunto de los ingleses.



En tal caso, decimos que *B* es un **subconjunto** de *A* o que *B* está incluido en *A*. En teoría de conjuntos se distinguen normalmente dos relaciones: inclusión e inclusión propia. Decimos que un subconjun *B* es un subconjunto propio del conjunto *A*, cuando todos los miembros de *B* son miembros de *A* y además hay al menos un miembro de *A* no, es miembro de *B*. Escribimos $A \subset B$ con el símbolo $\subset$ para 'es subconjunto propio' o 'está incluido estrictamente en'. Si, como ocurre a menudo, no afirmamos que *A* contiene al menos un elemento que pertenece a *B*, escribimos $B \subseteq A$, que quiere decir simplemente *'B* e incluido en *A*' o *'B* es un subconjunto de *A*'.

Si queremos decir que *A* y *B* son el mismo conjunto **-**en otras palabras, que son idénticos-, escribimos A = B. Hemos visto en la sección precedente que esto significa que A y B tienen los mismos elementos.

Es importante distinguir entre las relaciones 'es un elemento, de' ('es un miembro de') y 'es un subconjunto de'. El conjunto de los ingleses es un subconjunto del conjunto de los europeos, pero no es un elemento de ese conjunto. John Smith, por otro lado, es un elemento del conjunto de los ingleses, pero no un subconjunto de ese conjunto.

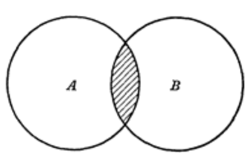
## 2.3. OPERACIONES CON CONJUNTOS

Hay, conjuntos cuyos elementos son a su vez conjuntos. (Tales conjuntos se llaman a veces **colecciones** o **familias**). Por ejemplo, es posible formar, a partir de cualquier conjunto *A* el conjunto que contiene todos los subconjuntos de *A*. Este conjunto se llama **conjunto potencia** de *A*. Ejemplo: El conjunto {a, *b*} tiene los siguiente subconjuntos: {*a*}, {*b*}, {*a*, *b*}, ∅ *(El* conjunto vacío es un subconjunto de cualquier conjunto.) El conjunto potencia de {*a*, *b*} *es* pues {{*a*}, {*b*}, {*a*, *b*}, {∅}.

Para distinguir los conjuntos de conjuntos de los conjuntos ordinarios, nos referiremos a ellos utilizando mayúsculas: A.

Hemos hablado, de diferentes maneras de definir conjuntos. Un conjunto puede también definirse en términos de otros conjuntos por medio de las llamadas **operaciones con conjuntos.** Dados dos conjuntos *A y B*, podemos definir el conjunto formado Por los objetos que son elementos de *A* y de *B*. Llamamos a este conjunto **intersección** de *A y B* y lo simbolizamos con $A \cap B$. En (1) la intersección de *A* y *B* viene indicada por el área sombreada

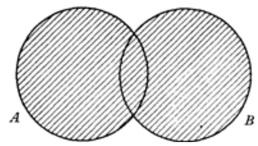
(1)




Ejemplo: Si *A* es el conjunto de los lingüistas y *B* es el conjunto de los suecos $A \cap B$ es el conjunto. de los lingüistas suecos.

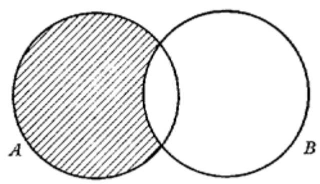
Puede ocurrir también que queramos hablar del conjunto de los objetos que son elementos de al menos uno de los conjuntos *A* o *B*. Este conjunto se llama **unión** de A y B y se simboliza por $A \cup B$. Corresponde al área sombreada en (2).

(2)




Ejemplo: Si *A* es el conjunto de las personas que han leído *Guerra y Paz* y *B* es el conjunto de las personas que han leído *Ana Karenina*, entonces $A \cup B$ es el conjunto de la gente que ha leído *Guerra y Paz* o *Ana Karenina* (o ambos).

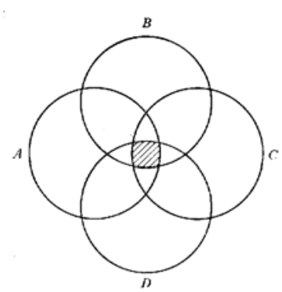
(3)




El conjunto sombreado en (3), esto es, el conjunto de elementos que son miembros de *A* pero no lo son de *B*, se llama **diferencia** de *A* y *B* y se simboliza $A — B$ (léase '*A* menos *B')*. Ejemplo: Si *A* es el conjunto de los ingleses y *B* el conjunto de las personas que hablan portugués, *A* — *B* es el conjunto de los ingleses que no hablan portugués (todos los ingleses excepto aquellos que hablan portugués).

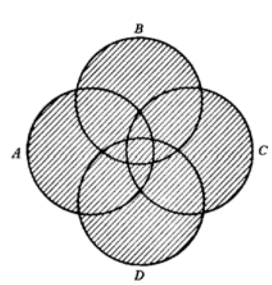
Hasta ahora hemos hablado de operaciones con pares de conjuntos. No hay nada, sin embargo, que nos impida ampliar las operaciones de modo que se apliquen a tres o más conjuntos. Podemos, por ejemplo, definir la intersección de *A, B, C, D* (el conjunto formado por los elementos comunes a los cuatro conjuntos *A, B, C y D)* como una operación con el conjunto de conjuntos {*A*, *B*, *C*, *D*} que se puede simbolizar por medio de n {*A*, *B*, *C*, *D*} (el área sombreada en (4)).

(4)



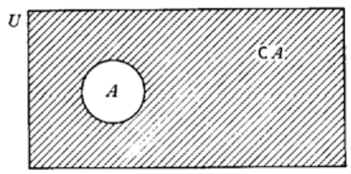

Del mismo modo, podemos simbolizar con ∪ {*A*, *B*, *C*, *D*} la unión de *A, B, C y D* (el conjunto que contiene los objetos que son elementos de al menos uno de los conjuntos *A, B, C y D).* La unión de estos conjuntos corresponde en el diagrama (5) al área sombreada.

(5)



Otro concepto importante es el de **complemento de** un conjunto. Dado cierto universo de discurso *U*, por ejemplo el conjunto de todos los seres humanos, y un subconjunto *A* de este conjunto, por ejemplo, el conjunto de los franceses, podemos hablar del conjunto de los miembros de *U* que no son miembros de *A*, es decir, en este caso, del conjunto de los seres humanos que no son franceses. Este conjunto se llama **complemento** de *A* respecto a *U*. en (6) el rectángulo es *U*, el círculo es el conjunto *A* y el área sombreada es el complemento de *A*, que se simboliza con *CA* o con *A*−.

(6)




## 2.4. RELACIONES Y FUNCIONES

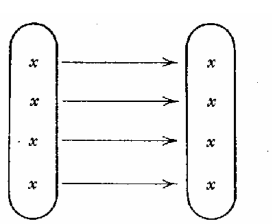
Un conjunto de dos elementos se llama **par**. Si decidimos considerar que los elementos del par están ordenados en alguna manera, obtenemos un **par ordenado.** Para simbolizar los pares ordenados utilizamos paréntesis en ángulo < > en vez de llaves { }. (A veces se utilizan paréntesis ordinarios ( ) ). Cuando manejamos pares no ordenados, el orden en que enumeramos los elementos no tiene importancia. Por ejemplo {*a*, *b*} es el mismo conjunto que {*b*, *a*}. El par ordenado <*a*, *b*>, sin embargo, no es necesariamente idéntico con el par ordenado <*b*, *a*>. Para dejar esto en claro, vamos a estudiar brevemente el concepto de **relación,** que discutiremos más detalladamente en la sección 5.8. Una relación diádica, por ejemplo, 'ser más inteligente que' se da entre dos objetos singulares, que han de ser considerados como miembros de un par ordenado. Es claro que el orden en que se dan los dos objetos es esencial: 'Hengist es más inteligente que Horsa' no es lo mismo que 'Horsa es más inteligente que Hengits'.

Del mismo modo podemos hablar de TRIO ordenado (con 3 elementos), CUÁDRUPLO (4 elementos), QUNTUPLO (5 elementos), y, en general, N-TUPLO. (Corresponden a relaciones de 3, 4, 5 y n lugares o argumentos, respectivamente). Los días del año, por ejemplo, pueden considerarse un 365-tuplo ordenado.

Un concepto, muy importante en lógica, matemática y lingüística es el de **función.** Veamos un ejemplo. Todo automóvil tiene una matrícula.

Consideremos ahora el conjunto de los automóviles y el de las matrículas. Lo, representamos en el diagrama (1):

(1)



Cada x representa un elemento en su respectivo conjunto (puede haber, desde luego, más elementos). De cada elemento en el conjunto, de la izquierda, es decir, el conjunto de los automóviles parte una flecha hacia un elemento en el conjunto de la derecha, a saber, hacia la matrícula correspondiente a cada coche. De esta manera obtendríamos un gigantesco número de pares ordenados en los que el primer elemento, es un coche y el segundo, su matrícula: así por ejemplo, <el coche de Paco Pérez, M-27.552>. Hemos **asignado** a cada elemento en el primer conjunto un elemento del segundo conjunto. Tal asignación se llama **función.** Para que exista una auténtica función es necesario que haya exactamente un elemento en el segundo conjunto por cada elemento en el primer conjunto (es posible, sin embargo, que varios elementos en el primer conjunto compartan un solo elemento en el segundo conjunto). En otras palabras, las flechas pueden ser convergentes pero no divergentes. (Volveremos sobre este punto al estudiar las propiedades formales de las relaciones en la sección 5.8).

Supongamos ahora que tenemos dos conjuntos *A* y *B* como en la figura (2), y una función (simbolizada por la flecha) que asigna un elemento distinto de *B* a cada elemento de *A*. Decimos

**(2)**


que tenemos una función inyectiva de *A* en *B,* o bien una función que PROYECTA *A* en B. Esta última expresión puede parecer extraña al principio, pero se usa a menudo en la bibliografía técnica lingüística. Por ejemplo, una transformación en una gramática transformacional puede ser considerada como una función que proyecta un conjunto de estructuras en otro conjunto de estructuras, lo cual es un modo imaginativo de decir que para cada estructura que 'entra' en la transformación hay exactamente una estructura que 'sale' de ella.

Otros ejemplos cotidianos de funciones se encuentran, por ejemplo, en cualquier libro que tenga tablas estadísticas. Por ejemplo, podemos encontrarnos con un listado de los países de Europa y su población (3): Un cuadro estadístico de este tipo representa una función en la que la columna de la izquierda corresponde al conjunto *A* en (2) y la columna de la derecha, al conjunto *B.* En otras palabras, tenemos una función que proyecta el conjunto de los países el conjunto de los números.

(3)

| | |
|---|---|
| Albania | 2,337,600 |
| Andorra | 25,000 |
| Austria | 7,456,403 |

Debemos explicar alguna terminología más. Cada elemento de la columna de la izquierda es un **argumento** de la función, y el correspondiente elemento de la columna de la derecha es el **valor** de la función para ese argumento. Denotamos la función misma como letras minúsculas a partir de la *f*, y escribimos *f(x)* para indicar el valor de la función *f* para el argumento x. *Si f* es la función representada en la tabla anterior, podemos, por ejemplo, escribir *f* (Suecia) = 8.000.000 para indicar que la función toma el valor 8.000.000 para el argumento Suecia; en otras palabras, que la población de Suecia es ocho millones.

El conjunto de los posibles argumentos de una función (por ejemplo, el conjunto *A* en (2)), se llama **dominio** de la función, mientras que el conjunto de valores de la función se llama **rango** o **condominio** de la función.

Si todo elemento de *B* es el valor de la función para algún elemento de *A*, decimos que se trata de una función **suprayectiva**. Si *A* y *B* son el mismo conjunto, es decir, si se trata de una función suprayectiva de *A* en *A*, decimos que la función es una **operación**. Un ejemplo de operación tomado de la matemática, es '*x* es el cubo de *y*' una función de números en números. Si se proyectan los números naturales de 1 a *n*, siendo *n* un número cualquiera, en un conjunto *A* de objetos, tenemos una secuencia (en efecto, cada elemento de *A* recibe uno o varios números). Algunas funciones tienen más de un argumento. Consideremos, por ejemplo, un cuadro de distancias en millas entre las grandes ciudades del mundo. Puede parecerse a (4).

(4)

| | Berlín | Buenos Aires | Cairo | Calcutta |
|---|---|---|---|---|
| Berlín | --- | 7,402 | 1,795 | 4,368 |
| Buenos Aires | 7,402 | --- | 7,345 | 10,265 |
| Cairo | 1,795 | 7,345 | --- | 3,539 |
| Calcutta | 4,368 | 10,265 | 3,539 | --- |

En este caso, la función toma pares de ciudades como argumentos y una distancia como valor.

Concluimos este capítulo mencionando un tipo peculiar de función que nos será de utilidad más tarde. Sean dos conjuntos *A* y *B* tales que *B* es un subconjunto de *A*. *A* puede ser el conjunto de los miembros del Parlamento y *B* el conjunto de los miembros del partido, mayoritario. Consideremos ahora un tercer conjunto *C* que contiene exactamente dos elementos, por ejemplo, los números 1 y 0. Podemos hora construir una función que asigne un 1 a todo elemento de *A* que sea también elemento de *B* y un 0 a todo elemento de *A* que no lo sea de *B*, es decir, a todo elemento que pertenezca al complemento de *B* relativo a *A*. Tal función se llama **función característica** del conjunto *B* relativo al dominio *A*.

La elección del conjunto *C*, de dos elementos, es de hecho arbitraria: cualquier par de objetos vale, siempre que se distingan de los elementos del conjunto que queremos diferenciar de su complemento. Es normal, en lógica, identificar los valores de verdad 'verdadero' y 'falso' (sobre los que volveremos en la sección 3.4) con los objetos utilizados como rango de la función característica.

**E J E R C I C I 0 S**

1. Simbolizar:

(a) *b* es un elemento de *C*
(b) *C* es un subconjunto propio de *D*
(c) la unión de *A* y *C*
(d) el conjunto formado por los elementos *d*, *e* y *g*
(e) *d* no es un elemento de la intersección de *A* y *B*.
(f) el complemento de *A* es un subconjunto propio de la unión de *B y C*

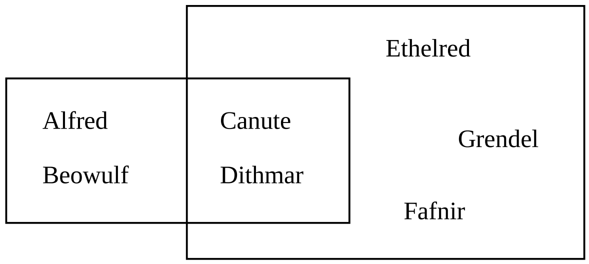
2. Traducir las siguientes expresiones al castellano

(a) {x/x es un mozo y María a besado a x}

(b) {x/x es danés} $\cap$ {x/x es filósofo}

3. ¿Cuál es el conjunto potencia de {Londres, Barcelona, Sevilla}?

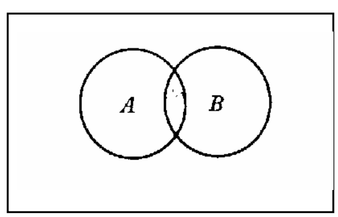
4. Dado el siguiente diagrama:




¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera y cuál falsa?

(a) Alfred es un elemento de $A \cup B$
(b) Alfred es un elemento de $A \cap B$
(c) $A \cap B$ tiene dos elementos
(d) {Etheldered, Fafnir} $\subset$ (A,u *B)*
(e) { Etheldered, Fafnir, Grendel } $\subset (B — A)$
{Etheldered, Fafnir, Grendel} $\subseteq (B — A)$

5. Sombrear el área correspondiente al conjunto $C(A \cap B)$




6. ¿Qué afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas?
(a) $c \in \{a, b, c\}$
(b) $d \notin \{a, b, c\}$
(c) $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c\}$
(d) $\{\mathrm{a}, b, c\} \subseteq \{\mathrm{a}, b, c\}$
(e) $\{a, b\} \subseteq \{\mathrm{a}, b, c\}$
(f) $c \in \{b, \{c\}\}$
(g) $\{c\} \in \{b, \{c\}\}$

7. Indicar los dominios y codominios de las siguientes funciones:

(a) 'la capital de'
(b) 'la mujer de' (en una sociedad monógama)
(c) 'el jefe de Estado de'

Allwood, J.; Andersson, L. Y Dahl, Ö. (1981): *Lógica para Lingüistas*. Madrid: Paraninfo. Pp. 26-37

**INFERENCIA Y ANÁLISIS LÓGICO DE LOS ENUNCIADOS**

## 3.1. INFERENCIA

Comparemos los siguientes razonamientos:

(1) Todos los amigos de Juan son mis amigos. Todos mis amigos son simpáticos por lo tanto, todos los amigos de Juan son simpáticos.

(2) Ninguno de los amigos de Juan es mi amigo. Ninguno de los amigos de Juan es simpático por lo tanto, ninguno de mis amigos es simpático.

Nos damos cuenta inmediatamente de la diferencia entre (1) y (2): Si razonamos como en (1), lo hacemos correctamente, y si razonamos como en (2), lo hacemos incorrectamente. Decimos que en (1) la **conclusión** (el enunciado que comienza con por lo tanto) se sigue de las **premisas** (los enunciados que el razonamiento usa como base, en este caso los dos primeros enunciados de (1) y (2)). Cuando una conclusión se sigue de sus premisas y las premisas son verdaderas, la conclusión es verdadera también. En (2) la conclusión no tiene por qué ser verdadera, incluso en el caso de que las premisas lo fueran. Podría ocurrir que de hecho la conclusión fuera verdadera pero ello no dependería de su relación con las premisas. En (1), sin embargo, podemos estar seguros de que si las premisas son verdaderas, la conclusión también lo es. (1) es, pues, una **inferencia lógicamente válida.**

Uno de los más importantes aspectos de la lógica es el estudio de las inferencias válidas y de los enunciados que son necesariamente verdaderos. Hay dos tipos fundamentales de inferencia: las que son necesariamente válidas y las que lo son solo con un cierto grado de probabilidad.

A cada tipo de inferencia le corresponde un tipo especial de estudio lógico. El estudio de las inferencias necesariamente válidas se desarrolla en el seno de la **lógica deductiva**, mientras que las inferencias que son válidas hasta un cierto grado de probabilidad se estudian en la **lógica inductiva.** Consideremos los dos ejemplos siguientes, que ponen de manifiesto la diferencia entre una inferencia deductiva y una inferencia inductiva.

(3) INFERENCIA DEDUCTIVA

Premisas: Si nieva, hace frío
Está nevando

---

Conclusión: Hace frío

(4) INFERENCIA INDUCTIVA

Premisas: Cuando nieva es habitual que haga frío
Está nevando

---

Conclusión: Hace frío

Vemos que la conclusión de una inferencia inductiva es válida sólo con un cierto grado de probabilidad y que no es necesariamente válida como en el caso de la inferencia deductiva.

Hasta el momento, la lógica deductiva ha sido estudiada de manera más completa que la lógica inductiva. Dado que la lógica deductiva nos abre las perspectivas más interesantes sobre la estructura del lenguaje, en lo que sigue nos ocuparemos sólo de ella. A partir de ahora utilizaremos el término ‘lógica’ como sinónimo de ‘lógica deductiva’.

La lógica es, pues, el estudio de aquellas propiedades que hacen necesariamente válida una inferencia o que hacen necesariamente verdadero un enunciado. Puesto que las inferencias válidas son aquellas inferencias en las que las premisas implican lógicamente la conclusión, el centro de interés de la lógica reside en el estudio de la **implicación lógica** o **consecuencia.**

La validez lógica y la verdad lógica son, en cierto sentido, totalmente independientes de la validez o verdad de hecho de lo que se afirma o argumenta. La validez y verdad lógica son, pues, independientes de la naturaleza de los objetos a los que se refieren afirmaciones y argumentaciones. Para aclarar lo que queremos decir, vamos a estudiar algunos ejemplos de inferencia.

(5) Premisas: Los anarquistas o los comunistas lograrán la victoria final
Los comunistas no ganarán

---

Conclusión: Los anarquistas lograrán la victoria final

Nótese que la validez de este razonamiento no depende de que se hable de comunistas o anarquistas y de la victoria final. El siguiente razonamiento es del mismo tipo y válido por las mismas razones:

(6) Premisas: Colón o Leif Eriksson descubrieron América
Colón no lo hizo

---

Conclusión: Leif Eriksson descubrió América

Las propiedades comunes a los razonamientos (5) y (6) que hacen válidos a ambos constituyen lo que llamamos **forma lógica** de los razonamientos. Estudiaremos más detenidamente este concepto en la sección próxima.

Para aclarar el hecho de que la validez de un razonamiento es totalmente independiente de la verdad de hecho de sus premisas y de su conclusión, vamos a analizar tres razonamientos más.

(7) Premisa: La lechuza y 'la zorra son pájaros’

Conclusión: La lechuza es un pájaro

(7) es una inferencia válida, a pesar de que su premisa es de hecho falsa y su conclusión verdadera.

(8) Premisas: Si la luna es un trozo de queso verde, todo el mundo es feliz
La luna es un trozo de queso verde

Conclusión: Todo el mundo es feliz

(8) es una inferencia válida, a pesar de que tanto las premisas como la conclusión son probablemente falsas.

Si intentamos combinar una premisa verdadera con una conclusión falsa como en (9) encontramos por fin que en este caso no puede haber una inferencia válida.

(9) Premisa: Toda ballena es mamífero

Conclusión: Las ballenas son peces

Así pues, la inferencia lógica transmite la verdad; nos dice que algo es un hecho si las premisas son verdaderas. De otro modo: si las premisas de un razonamiento son verdaderas, la conclusión ha de serlo también. Puesto que se puede decir que la validez lógica y la verdad lógica son independientes de la verdad de hecho, se dice a menudo que dependen de la forma (estructura) y del significado de aquellos enunciados que aparecen en los razonamientos estudiados. La lógica deja de lado el problema de si lo que se dice es realmente verdadero, para concentrarse en el estudio de qué tendría que ser verdadero si las premisas fueran verdaderas. La verdad de hecho de las premisas y la conclusión no es cuestión lógica. Desde luego si las premisas son verdaderas de hecho, la conclusión de una inferencia válida ha de ser verdadera también.

La validez lógica y la verdad lógica son formales, algo, que a menudo se interpreta como significado que la validez y verdad lógicas dependen de la forma (estructura) del enunciado o razonamiento, más que de aquello acerca de lo que el enunciado trata. Por todo esto se puede decir que las inferencias lógicas (las verdades lógicas) son válidas (verdaderas) independientemente de la configuración del mundo, de cómo sea el mundo de hecho.

### 3.2. FORMA LOGICA

Veamos ahora algunos ejemplos en los que un razonamiento se expresa en un sólo enunciado:

(1) Todo hombre es mortal; por lo tanto, algún hombre es mortal.
(2) Todo cisne es blanco; por lo tanto, algún cisne es blanco.
(3) No todos los hombres son sabios; por lo tanto, algunos hombres no son sabios.
(4) No todos los cisnes son blancos; por lo tanto, algunos cisnes no son blancos.

Vemos de nuevo que es la forma lógica de los enunciados, y no aquello de lo que tratan, lo que es decisivo para la validez del razonamiento. No podemos seguir la pista de la validez hasta la verdad de hecho de los enunciados de que se trate. El razonamiento en (2) es válido a pesar de que, en realidad, no todos los cisnes son blancos. Hay también cisnes negros. La validez del razonamiento depende sólo del hecho de que la conclusión tendría que ser verdadera si las premisas lo fueran.

Se puede decir que la forma lógica de las premisas determina qué es verdadero (qué conclusiones se pueden sacar) en el supuesto de que las premisas sean verdaderas. Un razonamiento es válido cuando la forma lógica de las premisas tiene realmente la conclusión como consecuencia. De qué traten las premisas es irrelevante. Pueden ser de hecho verdaderas o falsas. En lógica, nos interesamos sólo por si la verdad de las premisas implica realmente la verdad de la conclusión y prescindimos totalmente de la cuestión de qué es lo que realmente se da.

Vamos a estudiar ahora cómo es posible decir que la validez lógica depende de ciertas relaciones formales entre enunciados y componentes de enunciados. Estas relaciones formales dependen habitualmente de la aparición en un enunciado de ciertas partículas o palabras lógicas. En los cuatro ejemplos de arriba estas partículas lógicas son *todos*, *algunos* y *no*. Podemos escribir ahora los cuatro ejemplos del siguiente modo:

(1) y (2): Todo *S* es *P*; -por lo tanto algún *S* es *P*

(3) y (4): No todos los *S* son *P*; por lo tanto algunos *S* no son *P*

La forma lógica de los cuatro razonamientos resulta ahora más clara y podemos ver mas fácilmente las relaciones formales que los hacen válidos. (5) es un principio lógico importante que podemos plantear ahora:

(5) Si un razonamiento o enunciado, con una cierta forma lógica, es lógicamente válido o verdadero, entonces todos los razonamientos y enunciados de la misma forma lógica son válidos o verdaderos respectivamente.

Una advertencia es aquí de rigor: la forma lógica no es lo mismo que lo que la gramática tradicional ha llamado forma gramatical. De hecho, es un difícil problema el determinar con exactitud la correspondencia entre forma gramatical y forma lógica. Como hemos de ver más adelante, en los últimos años se han propuesto diferentes teorías sobre la relación entre forma lógica y forma gramatical. Se ha propuesto, por ejemplo, que la forma lógica se identifique con ciertos conceptos de una u otra versión de la gramática transformacional, como 'estructura profunda', 'estructura conceptual' o 'representación semántica'.

Podemos ver con facilidad que es insuficiente el tomar en cuenta sólo la estructura gramatical superficial cuando se sacan conclusiones lógicas. Estudiemos los dos enunciados siguientes:

(6) Ricardo es un corrupto asesino
(7) Ricardo es un presunto asesino

Si bien (6) y (7) tienen estructuras superficiales muy semejantes, la conclusión expresada en (8) se sigue sólo de (6).

(8) Ricardo es un asesino

Dado que el concepto, de forma (estructura) lógica es tan importante en lógica -hemos visto que es la forma lo que determina la validez lógica y la verdad- uno de los objetivos más importantes en lógica es caracterizar lo más precisa y claramente posible lo que la forma, lógica sea. Un modo de lograrlo es encontrar un método de expresión o **notación** que refleje la forma lógica de un enunciado y las relaciones lógicas que pueden existir entre las formas lógicas de los enunciados.

### 3.3. ENUNCIADOS Y PROPOSICIONES

Hemos dicho que la lógica se ocupa de las inferencias, es decir, de cómo se pasa de las premisas a las conclusiones. Al introducir los conceptos de premisa y conclusión, hablamos de ellos como si se tratara de enunciados. Parecería entonces que la lógica estudiara relaciones entre enunciados. Esto no es completamente exacto, al menos no lo es si por 'enunciado' se entiende una cierta secuencia de sonidos o letras. Veamos el enunciado (1) una vez más.

(1) Todos los amigos de Juan son mis amigos

Si oímos este enunciado, ¿podemos sacar conclusiones del tipo que sea acerca de personas individuales?

No. En primer lugar necesitamos saber quién ha usado el enunciado, pues si no, no sabríamos a quién se refiere el *mis*. Para saber qué inferencias son posibles a partir de un cierto enunciado, necesitamos saber primero qué dice el enunciado acerca del mundo. El mismo enunciado, utilizado por diferentes personas o en diferentes momentos, puede decir cosas muy diferentes sobre el mundo. Si por ejemplo Josefina, hablando de Napoleón, a las dos de la tarde del 6 de enero de 1806, dice 'en este momento tiene hambre', dirá algo bastante diferente de lo que habría dicho Krupskaya si hubiese utilizado el mismo enunciado pero refiriéndose a Lenin, a las tres de la tarde del 7 de enero de 1920. Uno de los enunciados habría sido una afirmación acerca de Napoleón, mientras que el otro lo hubiera sido acerca de Lenin.

Lo determinante en una inferencia es lo que el enunciado dice acerca del mundo y no el enunciado en cuanto secuencia de sonido o signos.

Introduciremos el término **proposición** para designar aquello que un enunciado dice acerca del mundo.

Como ya hemos dicho, el mismo enunciado puede expresar diferentes proposiciones en diferentes ocasiones. Inversamente, diferentes enunciados pueden expresar una y la misma proposición. El enunciado *Hoy es lunes*, usado el lunes, expresa la misma proposición que *Ayer era lunes*, usado el martes.

Cuando queremos señalar una proposición en el lenguaje ordinario usamos a menudo oraciones completivas con *que*. La distinción tradicional entre estilo directo y estilo indirecto puede entenderse, simplificando un poco las cosas, como una distinción entre hablar acerca de enunciados y hablar acerca de proposiciones. Compárese (2) y (3):

(2) Juan Lanas dijo: 'Los impuestos son buenos para los labriegos'

(3) Juan Lanas dijo QUE los impuestos eran buenos para los labriegos

(2) es verdadero sólo si Juan Lanas utilizó las palabras Los *impuestos son buenos para los labriegos,* (3) es verdadero si afirmó el contenido de la oración completiva *que los impuestos eran buenos para los labriegos.* (3) seguiría siendo verdadera si hubiera utilizado otras palabras o incluso otro lenguaje:

(4) Skatter är bra för bönder

(5) Pagar impuestos beneficia a los agricultores

En (3), expresión en estilo indirecto, decimos que Juan Lanas afirmó cierta proposición más bien que un cierto enunciado.

El lenguaje ordinario ofrece cierto apoyo a la idea de que lo que aparece en las inferencias son proposiciones. Parece más natural usar expresiones tales como *verdadero* e *implica* a propósito de oraciones introducidas con un *que* que a cerca de enunciados en forma de cita. Vemos más abajo que las expresiones (a) son preferibles a las expresiones (b).

(6) (a) Es verdad que la nieve es blanca
(b) ‘La nieve es blanca' es verdadero
(7) (a) Que la nieve sea blanca implica que la nieve no es negra
(b) ‘La nieve es blanca' implica 'la nieve no es negra'

En vez de ‘proposición' podríamos haber usado la palabra **afirmación** (stament) que a menudo significa proposición en el lenguaje ordinario. El inconveniente de usar ‘afirmación’ es que parece implicar alguien que afirme – alguien que realice la afirmación.

Lo normal en lógica es pasar por alto las complicadas relaciones entre enunciados y proposiciones y fingir que cada enunciado corresponde exactamente a una proposición y viceversa. Ciertos lógicos -por ejemplo, W. v. 0. Quine- piensan incluso que la proposición es una entidad superflua. De echo es posible prescindir de la distinción entre enunciados y proposiciones en tanto se eviten expresiones tales como pronombres personales (*yo*, *tú*, *él*) y adverbios de tiempo como *hoy*, *ahora*, *ayer*, cuya interpretación depende de la situación o contexto. Se puede, pues, usar los términos ‘enunciados’ y ‘proposición’ sin distinguirlos. En lo que sigue, vamos a actuar de acuerdo con esta práctica habitual, aunque el lector debería tener presente la distinción al menos en ciertos momentos.

### 3.4. MUNDOS POSIBLES Y CONJUNTO-VERDAD DE UNA PROPOSICION

Podemos interpretar formalmente el concepto de proposición utilizando la teoría de conjuntos. Para lograrlo, introducimos el concepto de **mundo posible.** (En la conversación cotidiana usamos a menudo palabras como **'caso' o 'situación'** en vez de 'mundo').

En primera aproximación la idea es ésta: cualquiera puede imaginarse que el mundo en que vivimos podría ser diferente en algún aspecto de lo que en realidad es, y podemos también hablar con sentido de lo que ocurriría si el mundo fuera diferente, como en el siguiente enunciado:

(1) Si no hubiera llovido esta mañana, habría ido al campo

Podemos entonces decir que 'el mundo podría haber sido de otra manera'. En vez de esta expresión compleja utilizaremos la expresión más corta 'mundo posible’.

Hemos dicho ya que una proposición es lo que un enunciado dice, en una determinada ocasión, sobre el mundo. Podemos decir esto de otro modo. Supongamos que cierta proposición, por ejemplo la de que Lincoln admiraba a Jefferson Davis, es verdadera. Esto es lo mismo que decir que nuestro mundo pertenece a un conjunto de mundos posibles, en concreto el conjunto de mundos posibles en los que ocurre que Lincoln admiraba a Jefferson Davis. Para cada proposición podemos encontrar un conjunto de mundos posibles, en los que la proposición es verdadera. Llamaremos a este conjunto el **conjunto-verdad** de la proposición. Así pues, una manera de caracterizar una proposición es dar su conjunto-verdad, esto es, el conjunto de mundos posibles en que es verdadero.

Inversamente, un mundo posible puede caracterizarse como el conjunto de proposiciones que son verdaderas en él (y que, por lo tanto, lo describen).

Otra manera equivalente de caracterizar una proposición consiste en hablar de la función característica del conjunto-verdad en vez de tomar en consideración el conjunto-verdad mismo. Obtenemos entonces una función que asigna a cada mundo posible uno de los valores 'verdadero' o 'falso', según que la proposición sea verdadera o falsa en el mundo en cuestión. Algunos lógicos identifican, desde luego, la proposición con esta función. Debido a ello nos encontramos a veces con afirmaciones de que 'las proposiciones son funciones de mundos posibles a valores de verdad'. Quizá una parábola ayude a captar la idea. Pensemos en la proposición como en una condición sobre mundos posibles. Imaginemos un ser sobrenatural que tiene todos los mundos posibles en un gran cesto, de donde los va sacando uno por uno y los selecciona según que cumplan la condición o no la cumplan (es decir, según que la proposición sea verdadera o falsa en el mundo en cuestión). Si se quiere, el ser sobrenatural estampa en cada mundo la palabra 'verdadero' o 'falso' según que se cumpla o no la condición, al modo en que un inspector del gobierno estampa la palabra ‘aprobado’ o no ‘aprobado’ en las mercancías según que estas cumplan ciertas condiciones o no. De este modo, una proposición sería un principio de clasificación de mundos posibles en dos categorías: aquellos en que la proposición es verdadera y aquellos en que s falsa. En este sentido una proposición es – o mejor dicho, corresponde a- una función de mundos posibles a valores de verdad.

## 3.5. ENUNCIADOS ANALITICOS Y SINTETICOS

La **verdad analítica** se introduce a menudo como un concepto que engloba el de verdad lógica. Toda verdad lógica es analítica, pero hay verdades analíticas que son verdades lógicas. Las verdades analíticas que son también verdades lógica, por ejemplo.

(1) No es cierto que el agua sea y ni sea un elemento químico

son verdaderas por su forma lógica, mientras que las otras verdades analíticas dependen de ciertas relaciones semánticas entre palabras que no pertenecen al vocabulario 'lógico' del enunciado o razonamiento. La **sinonimia** (igualdad o semejanza de significado) y la **hiponimia** (inclusión de significado) son las más comunes entre tales relaciones semánticas. El enunciado (2) es un ejemplo de enunciado que, debido a una sinonimia parcial, es analíticamente verdadero pero no lógicamente verdadero.

(2) Ningún soltero está casado

(3) es una inferencia analíticamente válida, por razón de una hiponimia, pero no es lógicamente válida.

(3) Premisa: Esto es una rosa

Conclusión: Esto es una flor

La diferencia entre verdades analíticas que dependen de la forma lógica y verdades que dependen de relaciones semánticas es una diferencia de grado y no de categoría. La distinción entre lo que uno quiera considerar forma (o estructura) y lo que se quiera considerar significado, es, al menos en parte, arbitraria. En última instancia, el que una palabra pertenezca al vocabulario lógico o no es una cuestión de decisión.

Si se niega un enunciado analíticamente verdadero, el resultado es un enunciado que ha de ser falso en virtud de su significado o de su forma -un enunciado **analíticamente falso** o contradicción, por ejemplo (4).

(4) No es verdad que todo soltero no está casado

Los enunciados analíticamente verdaderos o analíticamente falsos se llaman **enunciados analíticos.** Todos ellos tienen en común que su valor de verdad es independiente de cómo sea el mundo. Un enunciado analíticamente verdadero es VERDADERO EN TODO MUNDO POSIBLE; un enunciado analíticamente falso es FALSO EN TODO MUNDO POSIBLE. Podemos decir que el conjunto-verdad de los enunciados analíticamente verdaderos es 1 (el conjunto de todos los mundos posibles y que el de los enunciados analíticamente falsos es $\varnothing$**.**

Los enunciados que no son analíticos se llaman **sintéticos.** Son verdaderos o falsos en dependencia de la configuración del mundo; en otras palabras, son verdaderos en unos mundos y falsos en otros. Un ejemplo de enunciado sintético es

(5) Carlos I fue decapitado en 1649

Igual que la frontera entre verdad lógica y verdad analítica es, hasta cierto punto, arbitraria, no hay una frontera fija y estricta entre enunciados analíticos y sintéticos. ¿Debemos considerar que (6) es analítico?

(6) El coche de Juan tiene color

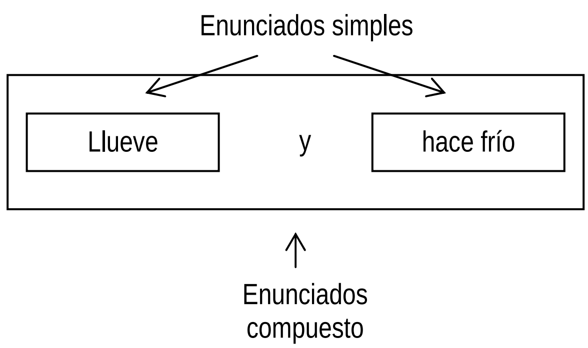
Parece que en nuestro mundo todo objeto material ha de tener color. ¿Ocurre lo mismo en todo mundo posible? Hasta ahora no tenemos respuestas adecuadas a tales preguntas; todavía esperamos una teoría en la que se distingan y relacionen de manera exacta los enunciados analíticos, sintéticos y lógicamente verdaderos.

### 3.6. ENUNCIADOS SIMPLES Y COMPUESTOS

Un rasgo importante de la concepción tradicional de la estructura lógica es la idea de que todo enunciado puede ser analizado hasta el nivel de los enunciados **simples o atómicos.** Estos enunciados simples se combinan o relacionan entre sí de maneras diversas para formar enunciados **compuestos o moleculares.** Todo enunciado es simple o compuesto, es decir, todo enunciado es simple o, está construido partiendo de enunciados simples de una manera muy precisa.

La distinción entre enunciados simples y compuestos ni es nueva ni exclusiva de la lógica. Existe también en la gramática tradicional, en donde las interdependencias entre enunciados simples 'y compuestos se han estudiado desde siempre bajo los títulos de coordinación y subordinación (parataxis e hipotaxis). (1) muestra cómo se puede formar un enunciado compuesto a partir de dos enunciados simples por medio de '*y*'.

(1)




### 3.7. EL ALCANCE DEL ANALISIS LOGICO

El análisis de la forma lógica se puede desarrollar en diferentes niveles o con diferentes grados de finura. Un modo tradicional de dividir la lógica, lo hace según el nivel de refinamiento en que el análisis se desarrolla.

El tipo de análisis lógico más superficial o grosero es aquel en que se investigan las relaciones lógicas que existen entre enunciados simples y compuestos, dejando totalmente de lado la estructura lógica interna de los enunciados simples. Los enunciados simples se toman como unidades no analizadas y sólo se presta atención al modo en que se relacionan entre sí.

El estudio de las relaciones entre enunciados, en cuanto distinto del estudio de las relaciones internas al enunciado, se realiza en la lógica de **enunciados o proposicional.** Si además tomamos en cuenta la estructura interna de los enunciados simples, alcanzamos el nivel de la lógica de predicados y de varias lógicas modales.

Allwood, J.; Andersson, L. Y Dahl, Ö. (1981): *Lógica para Lingüistas*. Madrid: Paraninfo. Pp. 38-69

## LÓGICA DE ENUNCIADOS

### 4.1. CONECTIVAS

Las relaciones lógicas entre los enunciados compuestos y los enunciados simples que los forman están determinadas, en general, por ciertas palabras llamadas **conectivas enunciativas** (o **proposicionales**). Las conectivas proposicionales pertenecen habitualmente a la categoría gramatical tradicional de las conjunciones (y, o, *por lo tanto, porque, ya que, pero, antes que, como, aunque, si... entonces*).

En los siguientes ejemplos se verá con claridad que las conectivas combinan enunciados de manera lógicamente diferentes.

(1) Luis es un sindicalista aunque lea a Pemán
(2) Luis es un sindicalista aunque y lee a Pemán
(3) Luis es un sindicalista o lee a Pemán

El hecho de que realmente estemos tratando con relaciones lógicas diferentes se ve de modo particularmente claro si observamos las conclusiones podemos sacar de los tres enunciados. De (1) se sigue más o menos que no es de esperar que un sindicalista lea a Pemán. De (2) y (3) no se sigue tal conclusión. (3) no implica siquiera que los dos enunciados componentes sean verdaderos, sino sólo que al menos uno de los dos

La forma lógica definida por las conectivas determina, por lo tanto, las consecuencias lógicas que se siguen de los enunciados formados por medio de conectivas y otros enunciados.

Dado que al hacer lógica proposicional no estamos interesados en la estructura interna de los enunciados sino sólo en las relaciones lógicas entre ellos, introducimos las llamadas *variables de enunciado (o proposicionales),* esto es, signos que se refieren a cualquier enunciado. Habitualmente se utilizan como variables letras latinas minúsculas a partir de *p*. Utilizando variables de enunciado, nuestros anteriores ejemplos tendrían el siguiente aspecto.

(1') *p* aunque *q*
(2') *p* y *q*
(3') *p* o *q*

En este momento estamos utilizando variables para los enunciados pero mostramos la estructura lógica con palabras. Sean cuales sean los enunciados que las variables representan, la estructura lógica continúa siendo la misma, puesto que depende sólo de las propiedades de las conectivas y no del contenido de los enunciados simples.

En lógica, los signos que tienen un significado permanente, no variable, se llaman **constantes.** Puesto que los functores o conectivas tienen esta propiedad y además forman parte de lo que hemos llamado vocabulario lógico, se llaman **constantes lógicas,** es decir, signos que por su significado y función permanente determinan la estructura lógica de los enunciados en los que aparecen. Las variables indican el contenido que se estructura y las constantes representan la estructura misma. Además de las conectivas proposicionales, se consideran constantes lógicas los cuantificadores y los operadores modales (todos los cuales estudiaremos luego).

Tradicionalmente se ha mostrado interés, en la lógica proposicional, por sólo cuatro de las conectivas del lenguaje natural, en concreto por las cuatro conectivas y, *o, si... entonces* y *si y sólo si* (si es que la última se puede considerar una conectiva en el lenguaje natural). También se ha estudiado cómo afecta la negación (*no*) a los enunciados.

La mayoría de las conectivas del lenguaje natural no se han estudiado. Conjunciones como por lo *tanto, ya que, mientras, aunque y antes* se han estudiado muy poco desde el punto de vista de su contribución a la estructura lógica de los enunciados.

Ha habido dos razones para ello. La primera y quizá principal es que la lógica se ha estudiado hasta ahora fundamentalmente por su interés matemático, lo que ha llevado a concentrarse en aquellos tipos de inferencia que son más comunes en el razonamiento matemático. Muchos de los tipos de razonamiento que realizamos en el lenguaje natural están por ello relativamente poco explorados.

La otra razón es más seria desde un punto de vista teórico. Se trata de la cuestión de si, y en qué medida, las conectivas del lenguaje natural son **veritativos-funcionales.** Para entender esta cuestión, hemos de introducir el término **valor de verdad.** Todo enunciado tiene un valor de verdad y sólo uno. Un enunciado verdadero tiene el valor de verdad 'verdadero', mientras que un enunciado falso tiene el valor de verdad 'falso'. Abreviamos los dos valores de verdad por medio de **t** y **f**, respectivamente. Consideremos el siguiente ejemplo.

(4) Hace un día templado y ventoso

(4) se puede parafrasear de modo lógicamente más transparente como sigue

Para que la expresión (4') sea verdadera tanto (5) (a) como (5) (b) han de serlo.

(5) (a) Hace un día templado

(b) Hace un día ventoso

Sólo cuando los dos enunciados simples unidos por *y* son verdaderos, es verdadero también el enunciado compuesto, Si uno de los enunciados, o los dos, es falso, la expresión compuesta es falsa. Podemos decir, entonces, que el valor de verdad de la expresión compuesta es función de los valores de verdad de los enunciados simples.

Es veritativo-funcional toda conectiva que tiene la propiedad de determinar el valor de verdad de la expresión compuesta en sola dependencia de los valores de verdad de los enunciados simples unidos por ella. Podemos expresar esto de manera diferente con la ayuda de los dos esquemas siguientes.

(6) (a) _____ y _______
(b) _____ o _______

Utilizamos aquí líneas en vez de variables. Tanto *y* como *o* son veritativo-funcionales y por lo tanto el valor de verdad de los enunciados compuestos que forman están totalmente determinados por los valores de verdad de los enunciados que puedan reemplazar a las líneas.

Uno de los objetivos tradicionales de la lógica ha sido el de mostrar qué conclusiones podemos sacar correctamente de un conjunto de premisas, o, en otras palabras, qué conclusiones preservan la verdad de las premisas. Tiene por lo tanto grave importancia el entender las propiedades veritativo-funcionales de las conectivas. Estas propiedades son lo que nos permite juzgar sobre la validez de un razonamiento, en la medida en que ésta es independiente de la verdad de hecho de los enunciados simples.

No todas las conectivas son veritativo-funcionales. Veamos primero las diferencias entre los siguientes enunciados.

(7) Hay tormenta y me siento bien
(8) Hay tormenta pero me siento bien
(9) Dado que hay tormenta, me siento bien

Tanto *y* como *dado que* piden que los enunciados simples que combinan sean verdaderos para que la expresión compuesta que crean lo sea. Si esta condición se cumple, el enunciado con y es verdadero, pero no ocurre necesariamente lo mismo con *dado que*. El enunciado puede ser falso. Más allá de la conexión veritativo-funcional entre los dos enunciados, *dado que* requiere que uno de ellos sea la razón del otro. Es decir, es necesario pero no suficiente que los dos enunciados simples sean verdaderos para que el enunciado compuesto con *dado que* sea verdadero. *Dado que* no es, por lo tanto, veritativo funcional.

Si nos volvemos a *y* y *pero*, vemos que el enunciado con *pero* es verdadero si los enunciados simples que une lo son. Así pues, *pero* es veritativo-funcional. De todos modos, continúa existiendo una diferencia entre *y* y *pero*, aunque la diferencia no es veritativo-funcional y la lógica, en su desarrollo actual, no tiene un método para tratarla. Todas las relaciones formales entre enunciados que se tratan en la lógica proposicional son veritativo-funcionales.

Como hemos visto la lógica de enunciados tradicional está limitada por dos factores: sólo se han estudiado conectivas veritativo-funcionales y, entre ellas, sólo han sido analizadas sistemáticamente las que son relevantes desde un punto de vista matemático. El lógico considera sin importancia la introducción de más conectivas veritativo-funcionales, dado que se conoce el número, más bien pequeño, de funciones de verdad y que, además, toda función de verdad se puede reducir a combinaciones de operaciones con una sola función, a saber, la llamada barra de Sheffer, que se escribe | (p|q se lee ‘no *p* o no *q’).*

Originariamente la lógica se entendió como un instrumento de estudio de las propiedades lógicas del lenguaje natural. Se esperaba que traduciendo razonamientos en lenguaje natural el cálculo proposicional aparecerían aquellos en forma más clara, con lo que se haría más fácil ver si eran válidos. La traducción, sin embargo, no resultó fácil; había que traducir el lenguaje natural, con toda su ambigüedad y vaguedad, a un sistema de representación formal no ambiguo escogido, en cierta manera, arbitrariamente. Dado que tal sistema presentaba grandes ventajas en otros aspectos, la lógica se fue separando más y más del estudio del lenguaje natural. Todavía no hemos descubierto una manera mejor de estudiar y formalizar las relaciones no veritativo-funcionales, aunque, el estudio de la pragmática, que plantearemos con cierta extensión en el capítulo 9, quizá ofrece un tipo de solución a este problema.

## 4.2. EL SIGNIFICADO DE LAS CONECTIVAS LOGICAS

Vamos ahora a estudiar un poco más de cerca el significado de las cinco conectivas que se usan normalmente en lógica proposicional. El requisito de que las conectivas sean veritativo-funcionales implica que tengan, en lógica, un significado definido y fijo que sólo parcialmente coincide con su uso en el lenguaje ordinario. En las secciones siguientes apuntaremos algunas de las diferencias entre su significado en lenguaje natural y en lógica. Las cinco conectivas son: **conjunción** (*y*), **disyunción** (*o*), **implicación** (*si... entonces*), **equivalencia** (*si y sólo si*) *y* negación (*no*), que en realidad no es una conectiva, puesto que no une enunciados sino que opera sobre un sólo enunciado cada vez. Las cinco conectivas se representan en lógica con símbolos especiales.

### 4.2.1. *Negación* ~

Las siguientes expresiones corresponden normalmente en el lenguaje natural a la negación lógica.

(1) (a) Es falso que
(b) No es el caso que
(e) No
(d) No es exacto que
(e) Es falso que

La negación se usa en lógica para formar un enunciado compuesto cuyo valor de verdad es el contrario del enunciado simple sobre el que opera. Así, si *Está nevando* es verdadero, *No está nevando* ha de ser falso, y al revés. De manera abreviada esto puede expresarse como sigue. Usaremos variables de enunciado y un símbolo especial para no, ~ (— existe aunque menos corrientemente).

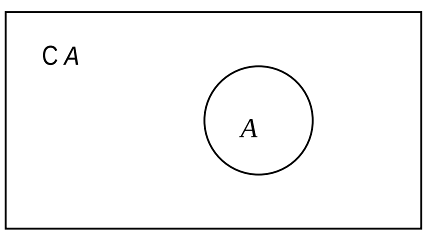
(2)

| $p$ | $\sim p$ |
|---|---|
| **t** | **f** |
| **f** | **t** |

Una abreviatura de este tipo, en la que se indican los valores de **verdad** de ~ *p* (el enunciado, compuesto) en dependencia de los valores de verdad de *p* (el enunciado simple) se llama *tabla de verdad.*

Podemos también caracterizar la negación en términos de teoría de conjuntos. Considérese (3). Sea *A* el conjunto-verdad de *p*, es decir, el conjunto de mundos en los que *p* es verdadero. El conjunto-verdad de ~ *p* será el conjunto de mundos en que *p* es falso, que coincide desde luego con C*A*, es decir, con el complemento de *A*.

(3)




Como ya hemos dicho, la negación lógica no es el equivalente de las expresiones de negación en el lenguaje natural. El lenguaje ordinario parece permitir la aparición de negaciones en el interior del enunciado, pero esto no es posible en lógica proporcional.

(4) No se permite la entrada a los no estudiantes

Hemos de ignorar la negación que precede a ‘estudiantes’ y traducir (4) como ~ p. Otra diferencia es que la posibilidad de hacer hincapié, por medio del énfasis y la entonación, en los diferentes constituyentes de un enunciado negado, se pierde en la lógica proporsicional. Compárese (5) y (6).

(5) María no besó a Pepe

(6) *Mari* no besó a Pepe

(5), si se dice con el acento y entonación normales, es la negación neutral de *Mari besó a Pepe,* mientras que (6), en donde se enfatiza *Mari,* parece presuponer que fue otra quien besó a Pepe. La diferencia entre (5) y (6) no puede reproducirse en lógica proposicional; ambas expresiones se traducirían como ~ p.

(7) D. Gil Calzasverdes no creía que a Alfredo le gustaran los pasteles

Finalmente, (7) es ambiguo para mucha gente, puesto que existe la posibilidad de entender que la negación afecta o bien a la oración principal o bien a la subordinada. No es posible reproducir tales complejidades en la representación formal de la lógica proposicional.

### 4.2.2. *Conjunción* &

La conjunción se asemeja al *y* del lenguaje cotidiano. La conjunción se usa en lógica para construir un enunciado compuesto que es verdadero sólo si son verdaderos los enunciados simples a partir de los cuales se forma el compuesto. Si alguno de los enunciados simples es falso, el enunciado compuesto o **conjunción** (es costumbre usar el nombre de la constante lógica para designar también la expresión compuesta que crea) es también falso. Así (1) es verdadero, mientras que (2) es falso.

(1) El fuego quema y Carnap fue filósofo
(2) El fuego quema y Carnap fue torero

Podemos resumir esto en una tabla de verdad con variables de enunciado y & como símbolo de la conjunción.

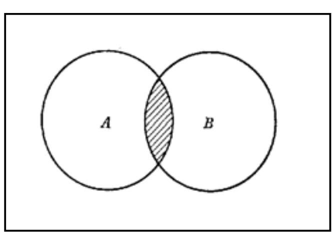
(3)

| *p* | *q* | *p* & *q* |
|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** |
| **t** | **f** | **f** |
| **f** | **t** | **f** |
| **f** | **f** | **f** |

Vemos que hemos agotado todas las posibilidades de, combinar los valores de verdad de *p* y de *q* y *que* sólo si ambos elementos de la conjunción son verdaderos, lo es también la conjunción en su conjunto.

Estudiemos ahora la relación entre el conjunto-verdad de *p* & *q* y el conjunto-verdad de los enunciados simples que contiene. En (4) *A* es el conjunto-verdad de *p* y *B* es el conjunto-verdad de *q.*

(4)



El conjunto-verdad de *p* & *q* es el conjunto de mundos en que tanto *p* como *q* son verdaderos. Es decir, la intersección de *A* y *B.* Se puede decir de modo general que el conjunto-verdad de una conjunción es equivalente a la intersección de los conjuntos-verdad de los enunciados simples que forman parte de la conjunción. Una manera diferente de ver las relaciones entre conjunción e intersección puede ser la siguiente. Supongamos que Emilio (*e*) es miembro de un club de ajedrez *A* y de un club de fútbol *B.* En tal caso es verdad que $e \in A$ & $e \in B$. Sabemos que una conjunción es verdadera sólo si son verdaderos los dos enunciados de que está compuesta.

| (5) | $e \in A$ | & | $e \in B$ |
|---|---|---|---|
| | **t** | **t** | **t** |
| | **t** | **f** | **f** |
| | **f** | **f** | **t** |
| | **f** | **f** | **f** |

Así pues, sólo en el caso de que *e* sea miembro tanto de *A* como de *B*, o en otras palabras, de que sea un elemento de la intersección de *A* y *B*, será verdadera la conjunción compuesta $e \in A$ y $e \in B$.

Al igual que hemos visto en el caso de la negación, el significado de la conjunción lógica es algo diferente del *y* del lenguaje cotidiano. Mientras que & sólo se puede usar para unir enunciados, *y* se utiliza para unir constituyentes en el interior de los enunciados. El *y* de *Juan y Pepe* no puede traducirse. Sólo si los términos se pueden distribuir en enunciados diferentes se hace posible la traducción en un enunciado compuesto.

(6) se puede dividir en dos enunciados (véase (7)) si Juan y Pepe tiene cada uno un coche.

(6) Juan y Pepe tienen un coche
(7) Juan tiene un coche y Pepe tiene un coche (*p* & *q)*

Sin embargo, si son los dueños de un solo coche, no es posible un análisis del tipo de (7) y basta *p* como traducción.

Las oraciones unidas por *y* en lenguaje ordinario expresan a menudo una sucesión de hechos. Si se cambia el orden de los elementos de la conjunción, cambia con él el orden de los sucesos.

(8) Gunnar se tumbó en el lecho y murió
(9) Gunnar murió y se tumbó en el lecho

En lógica *p & q* es siempre equivalente a *q & p*. La conjunción lógica, se ve en la comparación de (8) con (9).

Hay otros muchos usos de *y* en el lenguaje cotidiano. A menudo ocurre que no deben analizarse como conjunciones lógicas.

(10) Tócame y te beso
(11) Corre un kilómetro diario y te sentirás un hombre nuevo

(10) y (11) deberán probablemente analizarse como implicaciones y no como conjunciones.

(10) (a) Si me tocas, entonces te beso
(11) (b) Si corres un kilómetro diario, entonces te sentirás un hombre nuevo

En lógica de enunciados es habitual admitir sólo conjunciones de dos enunciados. En el lenguaje ordinario no existe tal limitación, p. ej.

(12) Julio fuma y Octavio va de fulanas y Antonio bebe y Cleo se lamenta

Nada hay que impida la construcción de una lógica de enunciados que opere de esta manera, es decir, permitiendo que la conjunción una más de dos enunciados. En este caso resulta práctico poner & delante de los enunciados que se han de combinar y escribir la expresión del siguiente modo: & (*p*, *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, *v*, *w*). Este método de escritura (la llamada notación polaca, que introduciremos en uno de los ejercicios) puede, naturalmente, utilizarse también cuando, sólo se unen dos enunciados. Todo esto vale también para nuestra próxima conectiva, la disyunción. Además hay que tener en cuenta que ((*p* & *q)* & *r)* es lógicamente equivalente a (*p* & (*q* & *r*)), lo que significa que toda conjunción, independientemente de su tamaño, puede reducirse a una cadena de conjugaciones binarías (en terminología matemática decimos que la conjunción es **asociativa).**

### 4.2.3. *Disyunción* $\vee$

La disyunción corresponde muy exactamente al *o* del lenguaje ordinario. La disyunción se utiliza en lógica para crear un enunciado compuesto (llamado también **disyunción)** que es falso sólo si los dos enunciados simples que lo forman son falsos. Basta, pues, conque uno de los enunciados que forman la disyunción sea verdadero para que la disyunción completa lo sea. Así, dado el actual estado de nuestros conocimientos, (1) es falso y (2), verdadero.

(1) Marte es un satélite o un agujero negro

(2) Marte es un planeta o un agujero negro

La tabla de verdad para la disyunción, con el símbolo especial $\vee$, es la siguiente.

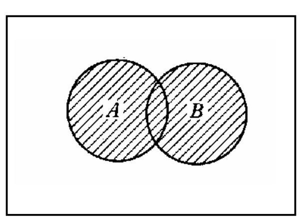
(3)

| *p* | *q* | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** |
| **t** | **f** | **t** |
| **f** | **t** | **t** |
| **f** | **f** | **f** |

Vemos que una disyunción es falsa si los dos enunciados que la forman lo son; en otro caso es verdadera.

En la sección precedente vimos que la conjunción corresponde a la intersección conjuntista. Estudiemos ahora la disyunción. Sean de nuevo *A* y *B* en (4) los conjuntos-verdad de *p* y *q* respectivamente.

(4)



El conjunto-verdad de $p \vee q$ es el conjunto de mundos en que $p$ o $q$ son verdaderos, o lo que es lo mismo, la unión de *A* y *B*. El conjunto verdad de una disyunción es, por lo tanto, equivalente a la unión de los conjuntos-verdad de los enunciados simples con los que se forma.

Podemos demostrar la conexión entre unión y disyunción de un modo distinto. Supongamos que sabemos que Emilio (*e*) es miembro de un sólo club o de los dos. En este caso será verdadero lo siguiente:

$e \in A \vee e \in B$. Vemos que la disyunción de los enunciados $e \in A$ *y* $e \in B$ *es* verdadera sólo si *e* es elemento de la unión de *A* y *B*.

Otra vez encontramos aquí discrepancias entre la disyunción lógica y el uso de *o* en el lenguaje natural.

A menudo se indica, con el *o* del lenguaje ordinario, un tipo más estricto de disyunción, que sólo es verdadero si exactamente uno de los elementos de la disyunción lo es. Para esta conectiva se utiliza a menudo un signo propio, xxx, y se llama disyunción **exclusiva**, para distinguirla de $\vee$, disyunción **inclusiva.** La disyunción exclusiva tiene la siguiente tabla de verdad.

| (5) | *p* | *q* | *p* xxx *q* |
|---|---|---|---|
| | **t** | **t** | **f** |
| | **t** | **f** | **t** |
| | **f** | **t** | **t** |
| | **f** | **f** | **f** |

En este caso la disyunción es falsa si los dos enunciados que la forman son verdaderos o si los dos son falsos. El *o* exclusivo es veritativo-funcional, pero no es el *o* que se utiliza primordialmente en lógica. La razón es que podemos representar el *o* exclusivo usando *y*, *no* y el *o* inclusivo de la siguiente manera.

(6) $(p \vee q) \& \sim (p \& q)$

Partiendo del *o* inclusivo, excluimos la posibilidad de que tanto, *p* como *q* sean verdaderos negando la conjunción que afirma que tanto *p* como *q* son verdaderos. Esta es justamente la función del *o* exclusivo. Encontramos un *o* que parece funcionar como una disyunción exclusiva en enunciados y formados con o *bien... o bien... y en* preguntas y peticiones.

(7) 0 bien Dios es bueno o bien no lo es
(8) ¿Quieres vino blanco o tinto?
(9) i La bolsa o la vida!

Un *o* con carácter más claramente inclusivo lo encontramos en (10), donde, naturalmente el caso normal es que los dos elementos de las disyunción sean verdaderos de una persona.

(10) Todo aquel que es ciudadano sueco o ha vivido en Suecia durante el año precedente está obligado a hacer declaración de renta.

Hay que hacer notar que el aire de incertidumbre que en la conversación normal acompaña al uso de *o* no es necesario en lógica. Por lo que a la lógica toca es perfectamente aceptable usar el siguiente enunciado mientras que se mira como cae la primavera nevada del invierno

(11) Está nevando o está lloviendo

Lo único que se precisa para que una disyunción sea verdadera es que lo sea de uno de los enunciados que la forman. Este es el caso en la situación descrita, aunque esté totalmente excluido que esté lloviendo.

Normalmente, sin embargo en la comunicación lingüística intervienen muchas más cosas que propiedades veritativo-fundamentales. El hecho de que (11), pronunciado en la situación antes descrita, se consideraría como una expresión en cierto modo extraña, muestra que además de las propiedades veritativo-funcionales hay otros factores que determinan nuestra interpretación de los hechos lingüísticos.

Como sugestión para un análisis de estos factores podemos decir que hay un conjunto de normas comunicativas que tienden a hacer lo más efectivo posible el intercambio de comunicación entre los participantes en un diálogo. Basándonos en esas normas se podría decir: no se debe decir $p \vee q$ si se puede decir *p* o $p$ & $q$, que son expresiones que conllevan más información definida, por virtud de sus tablas de verdad. Las expresiones lingüísticas deberían utilizarse del modo más efectivo posible, logrando que tanto, lo que se dice corno lo que no se dice tenga relevancia para el modo de entender lo dicho. Este es uno de los supuestos normalmente implícitos en la comunicación lingüística.

### 4.2.4. *Implicación*

La implicación de la lógica de enunciados es todavía más diferente de las expresiones correspondientes en el lenguaje ordinario *(si... entonc*es, si y, a veces, y) que las otras conectivas que hemos estudiado. Consideremos algunos ejemplos de *si... entonces* en el lenguaje ordinario.

(1) Si has trabajado mucho (entonces) probablemente estés cansado
(2) Si está lloviendo (entonces) habrá humedad
(3) Si Hengist es más gordo que Horsa (entonces) Horsa es más delgada que Hengist
(4) Si eres buen chico (entonces) tendrás pastel

En (1) y (2), *si... entonces* indica una ‘ligazón causal’ entre el antecedente y el consecuente. En (4), el antecedente está ligado al consecuente por la obligación de una promesa por parte del hablante. Podemos decir que en (3) *si... entonces* expresa una consecuencia lógica. La lógica proposicional trata la implicación sólo desde el punto de vista veritativofuncional, y por ello simplemente estipula que una implicación es verdadera cuando su antecedente es falso o su consecuente verdadero. Podemos dar, por lo tanto, la siguiente tabla de verdad para la implicación. Como símbolo utilizamos$\rightarrow$. (Quizá es más corriente usar $\supset$, pero se confunde con facilidad con $\subset$**,** el símbolo de la inclusión en teoría de conjuntos).

(5)

| $p$ | $q$ | $p\rightarrow q$ |
|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** |
| **t** | **f** | **f** |
| **f** | **t** | **t** |

**f f t**

La implicación veritativo-funcional se llama habitualmente **implicación material** y, como vemos, sólo es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente falso. Veamos ahora qué correspondencias hay entre la implicación material y el uso del *si... entonces* en el lenguaje ordinario.

Hay un caso que parece presentar pocos problemas: una oración con *si... entonces* es falsa, al igual que un enunciado con $\rightarrow$, cuando su antecedente es verdadero y su consecuente falso. Así, en (6).

(6) Si Londres es la capital de Inglaterra, entonces Inglaterra no tiene capital

Quizá es también natural decir que la implicación (el enunciado compuesto) es verdadero cuando tanto el antecedente como el consecuente lo son. Sin embargo lo normal es que se exija algo más de un enunciado formado con *si... entonces* en la conversación normal. Habitualmente se requiere que el antecedente y el consecuente estén ligados por alguna relación que no es veritativo-funcional, como, por ejemplo, una relación causal o de consecuencia lógica. Véanse los ejemplos 1-4). Consideremos el enunciado /7(.

(7) Si Kennedy fue Presidente, entonces la berza es un vegetal

En este caso antecedente y consecuente no guardan ninguna relación entre sí, pero ambos son verdaderos y como los valores de verdad son lo único relevante en una evaluación veritativo-funcional de un enunciado compuesto, (7) ha de tratarse exactamente del mismo modo que el resto de los enunciados con *si... entonces*, en los que además de tener un antecedente y un consecuente verdaderos, existe algún tipo de relación no veritativo-funcional entre ellos.

La situación empeora cuando el antecedente de una implicación es falso. Veamos una apuesta.

(8) Te apuesto a que si llueve, mañana no habrá excursión

Si la condición de que llueva no se cumple, la apuesta no vale, es como si no hubiera apuesta Parece natural pensar que esto ocurre también en el caso de enunciados puros.

(9) Si los perros son peces, entonces no pueden nadar

En cualquier caso no parece tener sentido decir que algo acerca del valor de verdad de la implicación cuando el antecedente es falso. Hay ejemplos de este tipo (llamados habitualmente enunciados **contrafácticos**) que son todavía más claramente absurdos.

(10) Si fuera invisible, todo el mundo me vería

Supongamos que (10) se analiza en la forma $p \rightarrow q$ y que $p$ es falso, cosa que es demostrable empíricamente. En este uso $p \rightarrow q$ es automáticamente verdadero, por las condiciones de verdad de la implicación.

(11) Si fuera invisible, nadie me vería

(11) que parece mucho más razonable sería verdadero por la misma razón. No hay modo de dar cuenta de nuestra intuición de que (11) parece bastante razonable, mientras que (10) parece totalmente absurdo. Los dos enunciados se analizan como $p \rightarrow q$ y se tratan de la misma manera desde el punto de vista veritativo-funcional.

(12) Si Daoiz y Velarde eran franceses, entonces eran valientes

(13) Si Daoiz y Velarde eran franceses, entonces no eran valientes

Aunque (13) dice lo contrario de (12), hay que considerar verdaderos a ambos si analizamos el antecedente y el consecuente como unidos por la implicación material, dado que el común antecedente de ambos es falso.

Aunque el análisis de *si... entonces* como implicación material es inadecuado en muchos aspectos, hay unas cuantas cosas que hablan a su favor. Parece que los enunciados en lenguaje ordinario que corresponden a expresiones lógicas veritativo-funcionalmente equivalente a $p \rightarrow q$, tienen muy aproximadamente el mismo alcance que las expresiones del lenguaje ordinario que corresponden a $p \rightarrow q$. $\sim p \vee q$ es equivalente, desde el punto de vista veritativo-funcional, a $p \rightarrow q$. Las tablas de verdad nos dicen que la implicación material es verdadera si su antecedente es falso o su consecuente verdadero. Esto es exactamente lo que expresa $\sim p \vee q$ 'antecedente falso o consecuente verdadero'. Podemos comprobarlo construyendo la tabla de verdad de $\sim p \vee q$.

(14) y (15) corresponden en el lenguaje ordinario a $p \rightarrow q$ y $\sim p \vee q$, respectivamente.

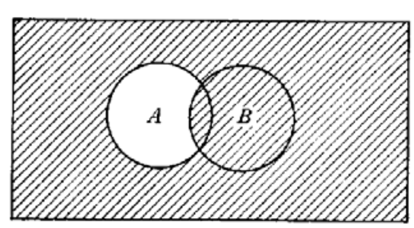
(14) Si estoy en lo cierto, te debo 10 duros

(15) 0 estoy equivocado o te debo 10 duro

Como vemos tienen el mismo significado Esto resta cierto apoyo in directo al análisis veritativo-funcional de *si... entonces* que hemos estipulado. Ha habido también intentos de usar la implicación material como base de un análisis de *si... entonces* que utiliza normas comunicativas del tipo que mencionamos antes al hablar de la disyunción. Los antedichos resultados del análisis de si... *entonces* como $\rightarrow$, en cierto modo absurdos, se explican desde esta perspectiva como violaciones de normas comunicativas generales.

La contrapartida conjuntista de la implicación no es tan directa como las que hemos estudiado para las otras conectivas. En (16), *A* y *B* son los conjuntos-verdad de *p* y *q*, respectivamente y el área sombreada, el conjunto-verdad de $p \rightarrow q$.

(16)



### 4.2.5. *Equivalencia* ≡

La equivalencia corresponde aproximadamente a *si y sólo si*, just*amente cuando, sólo cuando, sólo si*. A veces incluso se utiliza un simple si para indicar la equivalencia. En cuanto función de verdad, una equivalencia se analiza como una doble implicación material, una que va de antecedente a consecuente y otra de consecuente a antecedente. Dado, que el análisis de la equivalencia se basa en el de la implicación, algunos de los problemas de la correspondencia entre implicación y lenguaje ordinario vuelven a aparecer en conexión con la equivalencia.

Otro problema que, en ocasiones, es causa de dificultades, es el de diferenciar entre equivalencia e implicación. Intentaremos clarificar la distinción con dos ejemplos.

(1) Mari pasará el examen si el resultado de su ejercicio escrito es satisfactorio

(2) Mari pasará el examen si y sólo si el resultado de su ejercicio escrito es satisfactorio

En (1), 'pasar el ejercicio escrito' es una condición **suficiente** pero no **necesaria** para que Mari pase el examen. Exámenes orales, rojas manzanas o incluso un leve coqueteo pueden ser otros medios suficientes. En (2), sin embargo, pasar el ejercicio escrito no es sólo una condición suficiente sino también necesaria para pasar el examen. No hay otros medios.

Dado que la equivalencia es una conjunción de dos implicaciones, obtenemos la siguiente tabla de verdad para la equivalencia. Como símbolo especial usamos ≡ (a veces se usa ↔ o xxx ). Muy frecuentemente 'si y sólo si' se abrevia en 'sii'.

(3)

| $p$ | $q$ | $p \equiv q$ |
|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** |
| **t** | **f** | **f** |
| **f** | **t** | **f** |
| **f** | **f** | **t** |

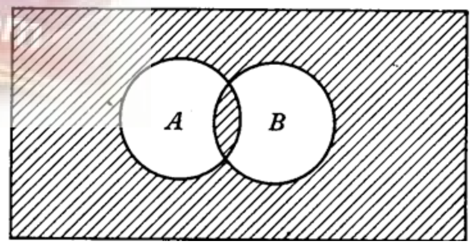
Como vemos, la equivalencia es verdadera sólo cuando los enunciados simples que la forman tienen el mismo valor de verdad. Si pensamos en la equivalencia como en una conjunción de dos implicaciones materiales, entenderemos por qué es así.

(4) $(p \to q) \& (q \to p)$

Sabemos que para que una conjunción sea verdadera se precisa que todos los enunciados que la forman sean verdaderos. Para que esta condición se cumpla o bien *p y q* son ambos verdaderos o bien son ambos falsos. Si tienen diferentes valores de verdad, las condiciones de verdad de la implicación material no se cumplirá en los dos enunciados simultáneamente (el antecedente puede no ser verdadero y el consecuente falso), que es lo que se precisaría para que la conjunción fuera verdadera.

La contrapartida conjuntista de la equivalencia es bastante clara y muestra que se mantiene la condición de simultaneidad del valor de verdad de los dos enunciados. En (5) el conjunto-verdad de $p \equiv q$ está sombreado, mientras que $A$ y $B$ representan los conjuntos-verdad de $p$ y de $q$ respectivamente.

(5)




## 4.3. COMO SEÑALAR LA ESTRUCTURA CONSTITUTIVA

Tanto en lógica como en lingüística es de gran importancia saber qué estructura tiene una secuencia de símbolos, qué elementos de la secuencia están relacionados entre sí y cuáles no. Hay muchos métodos de representar la estructura lingüística por medio de diagramas. Los más comunes son los diagramas arbóreos, los diagramas cuadrados y los paréntesis. Formalmente son equivalentes, pero difieren en cierta medida en su aplicación práctica. El método habitual, en lógica, de indicar la estructura son los paréntesis.

La razón más importante, en lógica, para señalar la estructura constitutiva es evitar ambigüedades. Sin indicación de cuál es su estructura, la siguiente expresión es, inevitablemente, ambigua.

(1) Que nieva y llueva implica que habrá humedad y hará frío

En expresión simbólica, escribimos

(2) $p \,\&q \rightarrow r \,\&s$

Existen entonces las siguientes posibilidades de entender la implicación

(3) $(p \,\&\, q) \rightarrow (r \,\&\, s)$

(4) $P \,\&\, (q \rightarrow (r \,\&\, s))$

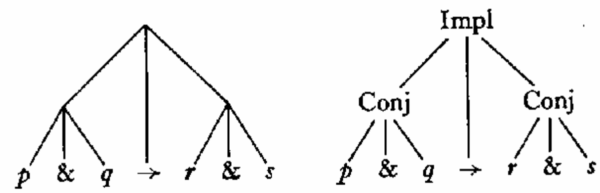
(5) $P \,\&\, ((q \rightarrow r) \,\&\, s)$

(6) $((P \,\&\, q) \rightarrow r) \,\&\, s$

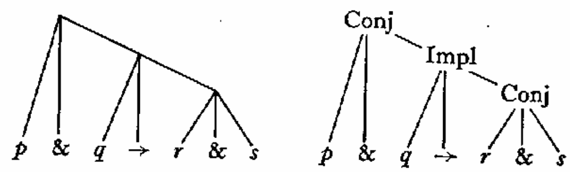
Las diferentes estructuras que hemos indicado con paréntesis en (3)-(6) también pueden ponerse -de manifiesto con diagramas arbóreos y cuadrados.

DIAGRAMAS ARBOREOS. Daremos primero los árboles sin rotular las ramificaciones (una ramificación es una intersección de líneas en un árbol) y luego con ramificaciones rotuladas. Los rótulos de las ramificaciones se abrevian como sigue: Implicación = Impl, Conjunción = Conj. La conectiva que está colocada directamente debajo de la ramificación más alta se llama **conectiva principal** del enunciado. En (3') es la flecha de la implicación.

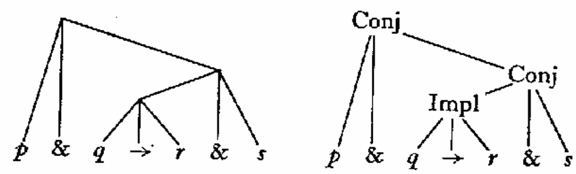
(3')



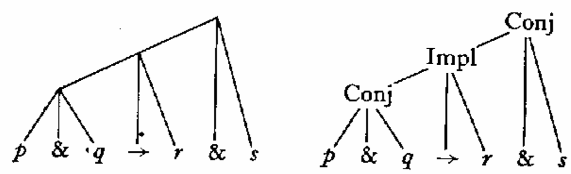

(4')



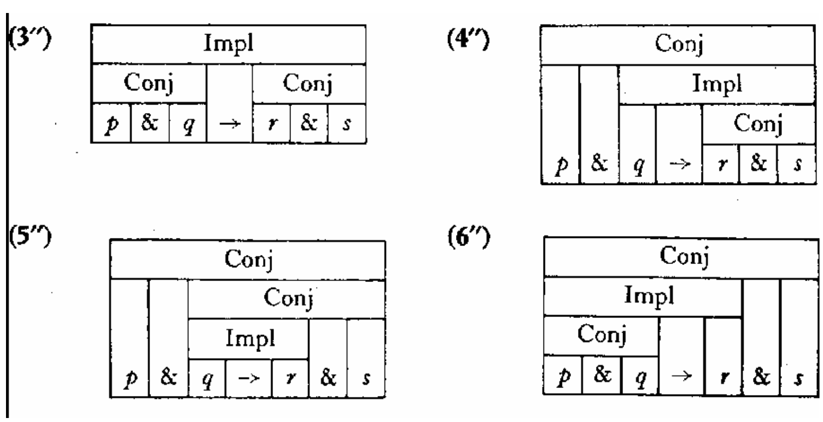

(5')




(6')




DIAGRAMAS CUADRADOS. En este caso ponemos rótulos en el diagrama desde el principio.



Los rótulos pueden usarse también, naturalmente, con paréntesis (tenemos entonces los llamados paréntesis rotulados). Abreviamos el término implicación por I y conjunción por C.

(3"') $(_{\mathrm{I}}(_{\mathrm{C}}p \;\&\; q) \rightarrow (_{c}r \;\&\; _{s})_{\mathrm{C}})_{\mathrm{I}}$

(4''') $(_{\mathrm{C}}p \;\&\; (\mathrm{i}q \rightarrow (_{\mathrm{C}}r \;\&\; _{s})_{\mathrm{C}})_{\mathrm{I}})_{\mathrm{C}}$

(5''') $(_{\mathrm{C}}p \;\&\; (\mathrm{c}(_{\mathrm{I}}q \rightarrow r)_{\mathrm{I}} \;\&\; _{s})_{\mathrm{C}})_{\mathrm{C}}$

(6''') $(_{\mathrm{C}}(_{\mathrm{I}}(_{\mathrm{C}}p \;\&\; q)_{\mathrm{C}} \rightarrow r)_{\mathrm{I}} \;\&\; _{s})_{\mathrm{C}}$

Antes de acabar esta digresión conviene decir que normalmente los paréntesis se usan en lógica sólo en la medida en que son necesarios para lograr claridad. A menudo se utilizan las siguientes convenciones: si un signo de negación es siempre el menor posible, es decir, la negación se aplica al constituyente más pequeño que esté a su derecha. En general, llamamos **alcance** de un operador lógico a las partes de una expresión a las que afecta el operador. El alcance se indica por contigüidad directa, como en el caso de la negación, o por paréntesis, en cuyo caso todo lo que está encerrado dentro de una pareja de paréntesis constituye el alcance.

(7) ~p & q

(8) $\sim (p \;\&\; q) \;\&\; r$

Así, en (7) la negación se aplica sólo a *p* y no a la conjunción completa, mientras que en (8) los paréntesis hacen que se aplique la negación a la conjunción más a la izquierda y no a la expresión entera. De modo semejante, se suele dar un alcance menor a & y a $\vee$ que a $\rightarrow$ y $\equiv$ Si aceptamos estas convenciones, nuestro ejemplo (2)

(2) $p \;\&\; q \rightarrow r \;\&\; s$

deja de ser ambiguo y ha de ser interpretado como $(p \;\&\; q) \rightarrow (r \;\&\; s)$. De todos modos no vamos a seguir estas convenciones excepto en el caso de la negación, y usaremos paréntesis siempre que parezca necesario para evitar ambigüedades.

### 4.4. SINTAXIS Y SEMANTICA DEL CALCULO DE ENUNCIADOS

Hemos alcanzado el punto en el que podemos dar un resumen de los símbolos más simples de la lógica de enunciados. Podemos dar también un conjunto de reglas que nos dicen cómo se pueden combinar para formar unidades mayores. Las reglas tienen la propiedad de decir exactamente qué combinaciones están permitidas y cuáles no.

La enumeración de los símbolos simples pequeños se suele llamar, en lógica, **vocabulario.** Tiene la misma función que un diccionario para el lenguaje natural. Las reglas que definen las combinaciones permitidas de unidades simples -las llamadas **expresiones bien formadas (ebf)-** se suelen llamar **reglas de formación** y pueden compararse con las reglas gramaticales de un lenguaje. Vocabulario y reglas de formación forman la sintaxis de la lógica. La sintaxis no nos dice nada sobre cómo han de interpretarse signos simples y expresiones, es decir, qué significado tienen. Esto último constituiría el tema de la semántica.

Estamos ahora en situación de poder definir qué es un lenguaje formal. Un lenguaje formal es un conjunto de expresiones definido en relación con un vocabulario a partir del cual se forman las expresiones de acuerdo con las reglas de la sintaxis e interpretado por las reglas de la semántica. Ha de hacerse en este punto una importante distinción entre hablar EN un lenguaje de este tipo y hablar ACERCA de él. El lenguaje mismo—el objeto que investigamos- se llama **lenguaje objeto** y el lenguaje que usamos para estudiar el lenguaje objeto se llama **metalenguale.** Así pues, el lenguaje que usamos en gramática o en lógica para hablar acerca de otros lenguajes, se puede caracterizar como metalenguaje.

### 4.5. SINTAXIS

Al dar la sintaxis de la lógica de enunciados comenzamos por su vocabulario.

**(1)** VOCABULARIO

(i) Un número infinito de variables de enunciado: *p, q,* r, s, t, *pl, q,... p2, q2*--

(ii) Las conectivas lógicas: $\sim$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$

(iii) Paréntesis: ( )

(iv) No hay otros signos en las expresiones de la lógica proposicional

En segundo lugar hemos de indicar qué combinaciones de signos están permitidas- qué expresiones están bien formadas-. Damos, pues, las reglas de formación en la lógica de enunciados.

**(2)** REGLAS DE FORMACION

(i) Toda variable de enunciado es una ebf

(ii) Si $\alpha$ y $\beta$ son cualesquiera ebfs., entonces (a) $\sim\alpha$, (b) $(\alpha \;\&\; \beta)$ (c) $(\alpha\vee \beta)$, (d) $(\alpha\rightarrow\beta)$ y (e) $(\alpha\equiv\beta)$

(iii) Una expresión está bien formada sólo si ha sido construida según estas reglas.

En la regla (ii) queremos dejar claro que estamos hablando, acerca de un lenguaje en un metalenguaje y por ello hemos introducido las llamadas **metavariables** (las letras griegas $\alpha$, $\beta$) en vez de las variables de enunciado que cabría esperar. Hacemos esto para indicar que no estamos hablando de enunciados SIMPLES cualesquiera sino de cualquier ebf, es cogida arbitrariamente, de la lógica de enunciados $\alpha$ y $\beta$ pueden ser sustituidas por cualquier ebf. Por lo tanto las reglas de formación pueden aplicarse sobre sus propios resultados. Consideremos, por ejemplo, las ebfs *p* y *q*. De acuerdo con la regla (ii) (b) podemos formar con ellas la ebf (p *& q).* Podemos aplicar la regla (ii) (b) de nuevo y obtenemos *(p & q) & p*. Como vemos, $\alpha$ se sustituye aquí por p & q, que es una ebf. De esta manera, aplicando, paso a paso les reglas, podemos generar expresiones tan largas y complejas como queramos. Las reglas que tienen esta propiedad se llaman **recursivas** y han jugado un gran papel en el desarrollo de la gramática generativa y de muchos lenguajes de computador. A menudo llamamos **inducción** (matemática) a la aplicación de reglas recursivas.

Al ser recursivas las reglas sintácticas, podemos construir un número indefinidamente amplio de expresiones por medio de un conjunto finito de reglas. Dado que todo lenguaje natural contiene un conjunto indefinido de oraciones gramaticalmente correctas, la gramática de un lenguaje natural tiene probablemente que contener reglas recursivas.

Las siguientes expresiones valen como ejemplo de ebfs. No utilizaremos aquí los paréntesis externos de la regla (ii), que fueron introducidos sólo para evitar ambigüedades: $p$, $q$, $p \;\&\; q$, $(p \;\&\; q) \rightarrow q$, $p \vee q$, $(p \;\&\; q) \equiv\equiv (p \vee q)$. Las siguientes expresiones no son ebfs: $\&\; q$, $\vee\, r \rightarrow q$, $q \sim \rightarrow p$.

Las reglas (2) (i) y (2) (ii) pueden formularse, de modo equivalente, como sigue:

(3) (i)

$$S \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sim S \\ (S \,\&\, S) \\ (S \vee S) \\ (S \rightarrow S) \\ (S \equiv S) \end{array} \right\}$$

(ii) $S \rightarrow p, q \ldots p_1, q_1 \ldots p_2, q_2 \ldots$

Escritas de esta manera, las reglas tienen la misma forma que las llamadas **reglas de estructura de frase** en la gramática generativa. Dado que en una gramática generativa la regla (2) (iii) se acepta por una convención implícita, las reglas (3) (i) y (ii) constituyen una descripción alternativa y equivalente de la sintaxis de la lógica proposicional.

## 4.6. SEMANTICA

Al describir la sintaxis de la lógica de enunciados hemos considerado los símbolos lógicos como si estuvieran ‘vacíos’, sin significado. Pero estamos interesados también, naturalmente, en utilizar la lógica para razonar sobre el mundo que nos rodea. Tan pronto como ponemos en relación los signos que hemos estado estudiando con los fenómenos que representan, damos el paso de la sintaxis a la **semántica.** La semántica es el estudio de cómo se relacionan las expresiones sintácticamente correctas con aquello de lo que tratan.

Dado que nuestro interés primordial en lógica está en los enunciados, vamos a estudiar el significado de los enunciados. Uno de los mejores medios para entender el significado de un enunciado es imaginar cómo tendría que ser el mundo para que el enunciado fuera verdadero.

(1) El Barón de Münchhausen se salió del agua estirándose de los pelos

La razón de que (1) sea difícil de entender es que uno no se imagina con facilidad cómo tendría que ser el mundo para que (1) fuera verdadero. El concepto de verdad nos da, pues, un instrumento preciso para captar la relación entre un enunciado y aquello de lo que trata. Podemos caracterizar una importante parte del significado de un enunciado formulando las condiciones que tendría que cumplir el mundo para que el enunciado fuera verdadero (en otras palabras, diciendo en qué mundos sería verdadero). Estas condiciones se **llaman condiciones de verdad** del enunciado. El significado de un enunciado se equipara, en lógica, con sus condiciones de verdad. Naturalmente, esto significa que hay importantes aspectos del significado que la lógica pasa por alto, pero un análisis del tipo indicado satisface ya las necesidades de la lógica, puesto que estamos interesados sólo en aquellos aspectos del significado que afectan a la verdad y a la inferencia lógicas.

La lógica de enunciados trata los enunciados simples como unidades no analizadas y por ello no podernos hablar, dentro de los límites de esa lógica, de las condiciones de verdad de los enunciados simples. Podemos, eso sí, decir bastantes cosas acerca de las relaciones entre las condiciones de verdad de los enunciados compuestos y las condiciones de verdad de los enunciados simples a partir de los cuales aquellos se forman.

Dicho con más precisión, en lógica proposicional estamos interesados en estudiar cómo se determina el valor de verdad de un enunciado compuesto a través del valor de verdad de los enunciados que lo constituyen y de las conectivas que en él aparecen. Así pues, el valor de verdad es aquí la única propiedad relevante de los enunciados simples. Para estudiar qué ocurre en los enunciados compuestos, lo habitual es atribuir arbitrariamente un valor de verdad a cada variable de enunciado. (Desde luego sería posible utilizar auténticos enunciados y comprobar el valor de verdad de cada enunciado, pero este procedimiento tendría un interés muy limitado, puesto que lo que nos interesa es el efecto de la conectiva sobre el valor de verdad del enunciado compuesto, dado, un conjunto cualquiera de valores de verdad de los enunciados constituyentes.)

Vamos a dar ahora las condiciones de verdad de los enunciados compuestos por medio de la información que nos ofrece la tabla de verdad de cada conectiva. Vamos a utilizar de nuevo letras griegas como metavariables para expresiones cualesquiera, lo que significa que nuestras condiciones de verdad serán recursivas. Se pueden aplicar una y otra vez para determinar las condiciones de verdad de expresiones cada vez más complejas. De ‘nuevo establecemos una diferencia entre el lenguaje de la investigación -el metalenguaje- y el lenguaje que investigamos -el lenguaje objeto. Estamos dando las condiciones de verdad del lenguaje objeto y no pretendemos ningún tipo de análisis del metalenguaje, del que simplemente suponemos que se entiende. El símbolo ‘sii’ que utilizamos más abajo pertenece al metalenguaje—es parte de la descripción de las condiciones de verdad del lenguaje objeto- y debe, por lo tanto, diferenciarse de $\equiv$, que es un símbolo del lenguaje objeto, el lenguaje que estudiamos. En (2) se definen, recursivarnente, las condiciones de verdad de los enunciados compuestos de la lógica proposicional.

**(2) SEMANTICA DE LA LOGICA PROPOSICIONAL**

(i) $\sim\alpha$ es verdadero sii $\alpha$ no es verdadero

(ii) $\alpha$ & $\beta$ es verdadero sii tanto $\alpha$ como $\beta$ son verdaderos

(iii) $\alpha \vee \beta$ es verdadero sii al menos una de las expresiones $\alpha$ o $\beta$ son verdaderas

(iv) $\alpha \rightarrow \beta$ es verdadero sii $\alpha$ no es verdadero o $\beta$ es verdadero

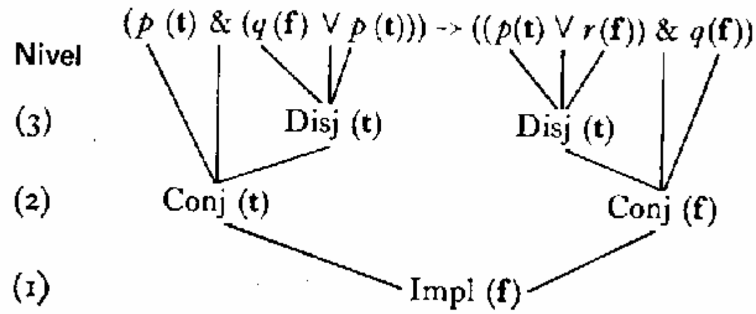
(v) $\alpha \equiv \beta$ es verdero sii $\alpha$ y $\beta$ tienen el mismo valor de verdad

Por medio de estas condiciones de verdad podemos calcular el valor de verdad de una expresión por compleja que sea. Veamos algunos ejemplos.

(3) $(p \ \&\ (q \vee p)) \rightarrow (p \vee r) \ \&\ q)$

Vamos a suponer ahora que se han asignado valores de verdad a las variables, bien por medio de una asignación arbitraria, bien por sustitución de las variables por enunciados declarativos y posterior asignación de sus valores de verdad. Aceptemos que se han asignado a las variables los siguientes valores de verdad: *p* es verdadero, *q* y *r* son falsos. Representemos ahora el ejemplo en forma de diagrama como un árbol invertido, para ver cómo, los valores de verdad de las expresiones simples determinan el valor de verdad de la expresión compuesta. Disyunción, negación y equivalencia están abreviadas como ‘Disj’, ‘Neg’ y ‘Eq’ respectivamente; conjunción e implicación, igual que antes, como ‘Conj’ e ‘Impl’.

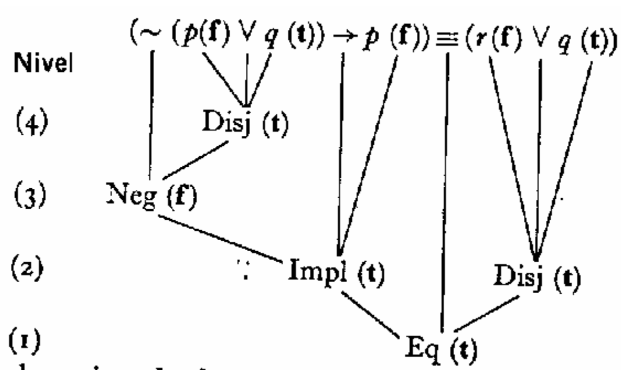
(4)




Las disyunciones de nivel (3) son ambas verdaderas, dado que al menos uno de los enunciados simples lo es. En el nivel (2) sólo la primera conjunción es verdadera, puesto que sus enunciados subordinados (uno de ellos, a su vez, compuesto) son verdaderos. La otra conjunción es falsa, pues uno de los enunciados que la forman es falso.

La implicación en el nivel (1) es falsa, puesto que su antecedente es verdadero y su consecuente falso. El valor de verdad de la expresión compuesta es, por lo tanto, **f**. Vale la pena hacer notar que al calcular el valor de verdad de la expresión compuesta hemos trabajado, por así decir, de dentro hacia fuera. Empezamos con los constituyentes menores, más internos, y terminamos con el mayor. ¡Los paréntesis de más adentro son lo primero! Quienes estén familiarizados con la gramática chomskyana en la versión de (1965) observarán que este principio se cumple también en las reglas cíclicas, en sintaxis y fonología, y en las reglas de proyección, en semántica. El ejemplo final es una equivalencia cuyo análisis dejamos como ejercicio al lector.

(5)




a *p* y *r* se les ha asignado **f**, mientras que a *r* le corresponde **t**.

## 4.7. TAUTOLOGIAS Y CONTRADICCIONES

Hay ciertas expresiones compuestas que siempre reciben el valor de verdad 'verdadero' independientemente de los valores de verdad asignados a los enunciados simples de la expresión. Tales expresiones tienen un interés especial en lógica, puesto que puede decirse que su valor de verdad está determinado totalmente por las propiedades veritativo-funcionales de las conectivas, es decir, por su forma lógica. Llamamos **tautologías** a este tipo de expresiones. Hay otras expresiones que tienen siempre el valor de verdad **f** como valor de verdad de la expresión entera. Son las llamadas **contradicciones.**

Las tautologías, por ser siempre verdaderas, son verdades lógicas. Hay, sin embargo, verdades lógicas que no son tautologías, como veremos luego. Del mismo modo que el concepto de verdad lógica es más amplio que el de tautología, el de verdad analítica es más amplio que el de verdad lógica.

La disyunción de un enunciado con su propia negación vale como ejemplo sencillo de tautología.

(1) $p \vee \sim p$ (Está lloviendo o no está lloviendo)

Sea cual sea el enunciado $p$ y su valor de verdad, el valor de verdad de la expresión compuesta será siempre **t**; es decir, estamos ante una verdad lógica. Otra manera de plantear esta idea consiste en decir: 'Por mucho que el mundo cambie (sea el que sea el mundo que escojamos), la luna *es* un *pedazo de queso verde o* no lo *es'*. En otras palabras, el conjunto-verdad de una tautología es siempre el conjunto de todos los mundos posibles (el conjunto universal): es fácil ver que el conjunto de mundos posibles en que $p \sim\vee p$ es verdadero es la unión del conjunto de mundos en que $p$ es verdadero y del conjunto de mundos en que $\sim p$ es verdadero, o lo que es lo mismo, el conjunto universal. Se puede decir de modo general que el conjunto-verdad de una tautología es el conjunto universal y que el conjunto-verdad de una contradicción es el conjunto vacío.

## 4.8. TABLAS DE VERDAD

Sería bueno tener un procedimiento mecánico para decidir si un enunciado es una tautología o no. En lógica de enunciados existe un procedimiento así. Es el **método de las tablas de verdad.**

Hemos usado este método, de modo parcial, al estudiar las propiedades veritativo-funcionales de las conectivas. Ahora vamos a ver cómo se puede aplicar el método a enunciados compuestos con varias conectivas diferentes.

La finalidad del método es comprobar si un enunciado es tautológico, contradictorio o ninguna de las dos cosas. Por lo tanto, lo que queremos hacer es simplemente estudiar todas las combinaciones posibles de valores de verdad de los enunciados simples y analizar después la tabla de verdad que resulta para la expresión compuesta. En el caso de $p \vee \sim p$ hay dos posibilidades: o $p$ es verdadero o $p$ es falso. Sí $p$ es verdadero su negación es falsa y a la inversa.

Una disyunción de $p$ y su negación ha de ser siempre verdadera, pues en cualquier caso uno de los dos elementos de la disyunción es verdadero. Si lo escribimos en forma de tabla de verdad, tenemos

| (1) | $p$ | $\sim p$ | $p \vee \sim p$ |
|---|---|---|---|
| | **t** | **f** | **t** |
| | **f** | **t** | **t** |

(1) puede también escribirse en la forma (1')

(1') p ~ p
**t t f t**
**f t t f**

Si se tratara de dos variables, tendríamos cuatro posibilidades, si fueran tres las variables, habría ocho posibilidades (y, en general, hay $2^n$ posibilidades, siendo *n* el número de variables de enunciados distintas y 2, la base, el número de valores de verdad).

Estudiemos dos ejemplos más.

(2) $(p \,\&\, q) \rightarrow p$

| *p* | *q* | *p&q* | *p* | *(p & q) →p* |
|---|---|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** | **t** | **t** |
| **t** | **f** | **f** | **t** | **t** |
| **f** | **t** | **f** | **f** | **t** |
| **f** | **f** | **f** | **f** | **t** |

Sean cuales sean los valores de verdad que damos a los enunciados simples, tenemos un enunciado verdadero. Por lo tanto, (2) es una tautología

(3) $(p \,\&\, q) \rightarrow (p \vee r)$

| p | *~p* | r | *p&q* | p∨r | (p *&q)* → (p ∨ r) |
|---|---|---|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** | **t** | **t** | **t** |
| **t** | **t** | **f** | **t** | **t** | **t** |
| **t** | **f** | **t** | **f** | **t** | **t** |
| **t** | **f** | **f** | **f** | **t** | **t** |

| *p* | *q* | *r* | *p&q* | *p∨r* | *(p & q) → (p ∨ r)* |
|---|---|---|---|---|---|
| **f** | **t** | **t** | **f** | **t** | **t** |
| **f** | **t** | **f** | **f** | **f** | **t** |
| **f** | **f** | **t** | **f** | **t** | **t** |
| **f** | **f** | **f** | **f** | **f** | **t** |

De nuevo se trata de una tautología, puesto que para todas las combinaciones posibles de valores de verdad de los constituyentes el valor de la expresión compleja es **t**.

No todos los enunciados en lógica proposicional son, sin embargo, tautologías.

(4) $\sim p \rightarrow (p \vee r)$

| p | q | *~p* | *p ∨ r* | *~p → p ∨ r* |
|---|---|---|---|---|
| **f** | **t** | **t** | **t** | **t** |
| **f** | **t** | **t** | **t** | **t** |
| **t** | **t** | **t** | **t** | **t** |
| **t** | **f** | **f** | **f** | **f** |

(4) no es tautología ni contradicción sino lo que antes hemos llamado un enunciado sintético: un enunciado cuyo valor de verdad depende de cómo sea el mundo. La propiedad característica de un enunciado sintético de **t** y **f** en la columna final bajo la conectiva principal de la expresión. Esto significa que el valor de verdad del enunciado compuesto depende de los valores de verdad de los enunciados constituyentes; y el valor de verdad de los enunciados simples depende, naturalmente, de cómo sea el mundo. Esta es la razón de que digamos 4ue los enunciados que no son ni tautologías ni contradicciones, son

enunciados sintéticos, es -decir, enunciados cuyos valores de verdad están determinados por la configuración del mundo.

(5) $\sim(p \rightarrow (p \vee r))$

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow (p \vee q)$ | $\sim(p \rightarrow (p \vee r))$ |
|---|---|---|---|---|
| **t** | **t** | **t** | **t** | **f** |
| **t** | **f** | **t** | **t** | **f** |
| **f** | **t** | **t** | **t** | **f** |
| **f** | **f** | **f** | **t** | **f** |

(5) es una contradicción. Todas las combinaciones posibles de valores de verdad dan el valor final **f**.

Las contradicciones de] mismo tipo que (5) aclaran la relación entre contradicciones y tautologías. $p \rightarrow (p \vee r)$ es, como se puede comprobar, una tautología, mientras que $\sim(p \rightarrow (p \vee r))$ es una contradicción. Negando una tautología surge una contradicción, al igual que si negamos una contradicción, obtenemos una tautología.

La forma lógica de un enunciado, que en lógica de enunciados está determinada por las propiedades veritativo-funcionales de las conectivas, puede compararse con una máquina en la que si se introducen los valores de verdad de los enunciados simples, el producto son los valores de verdad del enunciado compuesto. Si la máquina da siempre **t**, independientemente del valor de verdad sobre el que ha operado, estamos ante una tautología.

Este operar mecánico de la forma lógica es consecuencia del hecho de que cada conectiva lógica relaciona de manera precisa cada posible combinación de valores de verdad con el valor de verdad del enunciado compuesto. Las relaciones estructurales entre enunciados que se estudian en lógica proposicional pueden, por lo tanto, entenderse como relaciones entre enunciados respecto de su valor de verdad. La función de una conectiva lógica es decidir, para cada combinación posible de valores de verdad, cual es el valor de verdad resultante para esa combinación. El valor de verdad de un enunciado compuesto queda unívocamente determinado por la conectiva lógica y las combinaciones posibles de valores de verdad de los enunciados simples.

Por lo tanto, es natural decir que las conectivas designan funciones que proyectan uno o varios valores de verdad en un valor de verdad y sólo en uno. Llamamos **funciones de verdad** a estas funciones.

Salvo en (3) hemos escogido siempre nuestros ejemplos de cálculo de los valores de verdad de tal modo que tuviéramos que manejar sólo dos variables. La razón es que el número de combinaciones posibles de valores de verdad crece exponencialmente con el número de variables de enunciado distintas; los cálculos se hacen entonces, en el mejor de los casos, aburridos. En expresiones con más de dos variables tenderemos, debido a ello, a usar el llamado **razonamiento indirecto** (llamado también, a menudo, **reductio ad absurdum).**

Para hacer un razonamiento indirecto procedemos como sigue. Suponemos que la expresión que nos interesa es falsa. Si este supuesto no conduce a una contradicción, sabemos que la expresión no es una tautología. La razón es que una tautología es siempre verdadera. Si es de alguna manera posible que la expresión que nos interesa sea falsa, la expresión no puede ser tautológica. Sin embargo, si nuestro supuesto de que la expresión es falsa conduce a una contradicción (es decir, no es posible que la expresión sea falsa), tenemos una tautología.

Una vez que hemos mostrado que el suponer que un cierto enunciado es falso no conduce a contradicciones, todavía queda por determinar si el enunciado es una contradicción o un enunciado sintético. Este problema suele quedarse sin resolver, puesto que, en lógica, lo que nos interesa primordialmente es saber si una expresión es una tautología o no. Si estamos interesados en el problema de determinar si un enunciado es una contradicción, invertimos simplemente el proceso de razonamiento: suponemos que el enunciado es verdadero y comprobamos si este supuesto lleva a una contradicción.

Veamos algunos ejemplos de razonamiento indirecto.

| (6) Nivel | $((p$ | $\vee$ | $q)$ | $\&$ | $r)$ | $\rightarrow$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | | | | | | **f** | |
| (2) | | | | **t** | | | **f** |
| (3) | | **t** | | | **t** | | |
| (4) | **f** | | **t** | | | | |

En el nivel (1) suponemos que el valor de verdad de la expresión entera es **f**. La tabla de verdad de la implicación material nos dice que una implicación sólo puede ser falsa cuando su antecedente es verdadero y su consecuente falso, que es lo que se indica en el nivel (2). Las dos **t** en el nivel (3) son necesarias, según la tabla de verdad, para que la conjunción pueda tener el valor verdad **t** que se le ha atribuido en el nivel (2). Una conjunción es verdadera sólo si los dos enunciados que la forman lo son. El nivel (4) está determinado por el hecho de que antes hayamos asignado **f** a *p*: una variable tiene siempre el mismo valor de verdad en cada asignación. Podemos, entonces, hacer uso del hecho de que la disyunción en el nivel (3) tiene el valor **t**. Según las condiciones de verdad de la disyunción, *q* ha de tener el valor **t**. Dado que no hemos llegado a una contradicción por suponer que (6) era falso, (6) no puede ser una tautología.

| (7) Nivel | $(((\sim$ | $p$ | $\rightarrow$ | $\sim$ | $(q$ | $\vee$ | $r))$ | $\&$ | $(s$ | $\rightarrow$ | $r))$ | $\&$ | $s)$ | $\rightarrow$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2) | | | | | | | | | | | | | | **f** | |
| (3) | | | | | | | | | | | | **t** | | | **f** |
| (4) | | | | | | | | **t** | | | | | **t** | | |
| (5) | **t** | **f**[1] | **t** | | | **f** | | | **t**[2] | | **t*** | | | | |
| (6) | | | | | | **f** | **f*** | | | | | | | | Contradicción |

Los valores asignados a *p* y *s* en el nivel (5) (marcados con los índices (1) y (2) respectivamente) son los que atribuyeron a estas variables en los niveles (2) y (5) respectivamente.

En este ejemplo dejamos que el lector mismo haga el razonamiento, inspirándose en su conocimiento de las propiedades veritativo-funcionales de las conectivas. Sólo diremos que, como es claro, en el ejemplo (7) termina apareciendo una contradicción (véanse las variables marcadas con *****). Nos vemos obligados a suponer que r es falso y verdadero a la vez. Debido a esta contradicción hemos de admitir que (7) no puede ser falso. Por lo tanto es una tautología.

¿Cómo podemos operar con enunciados cuyas conectivas principales no son implicaciones? Si suponemos, por ejemplo, que una conjunción es falsa, hay que estudiar tres posibilidades. El método heroico consiste en analizar cada una de las posibilidades en el modo indicado más arriba. Existe, sin embargo, otra posibilidad. Podemos usar nuestro conocimiento de las equivalencias lógicas para transformar en implicaciones expresiones cuya conectiva principal no es una implicación. A continuación damos una lista de leyes lógicas muy conocidas, algunas de las cuales pueden usarse para pasar de una expresión lógica a una implicación equivalente, haciendo así más fácil la reducción al absurdo.

(8) (i) $p \vee \sim p$

(ii) $\sim (p \;\&\; \sim p)$

(iii) $p \equiv p$

(iv) $(p \vee q) \equiv \sim (\sim p \;\&\; \sim q)$

(v) $(p \;\&\; q) \equiv \sim (\sim p \vee \sim q)$

(vi) $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \;\&\; \sim q)$

(vii) $\sim (p \;\&\; \mathrm{q}) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

(viii) $(p \rightarrow q) \equiv \sim(p \;\&\; \sim q)$

(ix) $(p \;\&\; q) \equiv \sim(p \rightarrow \sim q)$

(x) $(p \rightarrow q) \equiv (p \;\&\; \sim q)$

(xi) $(p \;\&\; q) \equiv (p \rightarrow \sim q)$

(xii) $(p \mathrm{~v~} q) \equiv (\sim p \rightarrow q)$

(xiii) $(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \mathrm{~v~} q)$

(xiv) $\sim \sim p \equiv p$

(xv) $p \equiv p \mathrm{~v~} p$

Por medio de estas tautologías y equivalencias u otras similares' puede el lector modificar con facilidad una expresión de modo que adquiera una forma más fácil de manejar. Considérese

(9) $\sim (((p \;\&\; (q \mathrm{~v} \sim q)) \rightarrow p) \;\&\; \sim p)$

(9) tiene un aspecto realmente complicado, así que la transformamos en (10) usando (8) (xi).

(10) $((p \;\&\; (q \mathrm{~v} \sim q)) \rightarrow p) \rightarrow \sim \sim p$

Finalmente tenemos una implicación sobre la que podemos intentar un razonamiento indirecto. Si transformamos (10) en (11).

(11) $((p \;\&\; (q \mathrm{~v} \sim q)) \rightarrow p) \rightarrow p$

**f f t t f t t f f f**

y hacemos una reductio ad absurdum, vemos que (9) no es una autología.

## EJERCICIOS

1. ¿Cuál de los tres enunciados siguientes no puede formalizarse en lógica de enunciados del mismo modo que los otros dos? ¿Por qué?
   (a) Luis y Ricardo son comuneros
   (b) Luis y Ricardo son parientes
   (c) A Luis y Ricardo les gusta beber

2. Inténtese representar los siguientes enunciados con variables de enunciado y conectivas lógicas.
   (a) Si esto es verano, que venga Dios y lo vea
   (b) Los limones son bonitos pero amargan
   (c) Puedes si quieres
   (d) Vendrá hoy o mañana, pero no más tarde
   (e) Si no existen ni Dios ni el demonio, es difícil ser religioso

(f) Echa al gato o me voy

3. Indique los valores de verdad de las siguientes expresiones compuestas partiendo del supuesto de que $p$ y $q$ son verdaderos y $r$ es falso.

(a) $\sim p$
(b) $\sim (p \;\&\; r)$
(c) $\sim (p \text{ v } q)$
(d) $p \text{ v } (q \;\&\; r)$
(e) $r \rightarrow ((q \;\&\; r) \text{ v } (p \text{ v } q))$
(f) $r \equiv (p \;\&\; r)$

4. ¿Qué expresiones, entre las siguientes, son tautologías?

(a) $\sim (p \;\&\; \sim p)$
(b) $(p \text{ v } q) \rightarrow p$
(c) $\sim (p\&q) \equiv \sim\text{-}p \text{ v } \sim q$
(d) $\sim ((p \equiv q) \equiv (p \equiv \sim q))$
(e) $(p \rightarrow \sim q) \text{ v } (q \rightarrow \sim p)$
(f) $((p \equiv q) \equiv p) \equiv q)$
(g) $(p \;\&\; q) \text{ v } (p \equiv \sim q)$
(h) $(p \text{ v } (q \;\&\; r)) \equiv ((p \text{ v } q) \;\&\; (p \text{ v } r))$

5. ¿Puede considerarse función de verdad la conectiva porque? Razónese la respuesta.

8. Determinar, por razonamiento indirecto, si las siguientes expresiones son tautologías.

(a) $p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow (s \rightarrow (t \rightarrow p))))$
(b) $((\equiv q) \;\&\; (q \equiv r)) \rightarrow (p \equiv r)$
(c) $(p \;\&\; (q \equiv r)) \rightarrow ((p \;\&\; q) \equiv r)$

Allwood, J.; Andersson, L. Y Dahl, Ö. (1981): *Lógica para Lingüistas*. Madrid: Paraninfo. Pp. 70-108

# LÓGICA DE PREDICADOS

## 5.1. AMPLIACION DEL ANALISIS LOGICO

Hemos visto, en el capítulo de lógica de enunciados, que se puede decidir si una inferencia es correcta o un enunciado verdadero (tautológico) por medio del uso de técnicas como la de las tablas de verdad.

Hay sin embargo muchas inferencias en el lenguaje natural que intuitivamente son correctas, pero cuya corrección no puede justificarse en el marco de la lógica de enunciados, por ejemplo (1).

(1) Si todos los, alces son listos y Bruce es un alce, entonces Bruce es listo

Todo el mundo aceptaría como correcto un razonamiento de este tipo y sin embargo su validez no puede justificarse en lógica de enunciados. (1) se analizaría en lógica proposicional como $(p \,\&\, q) \rightarrow r$, expresión que es cualquier cosa menos tautológica como se ve por su tabla de verdad. Por el contrario, la lógica de predicados nos ofrece un instrumento con el que podemos mostrar que el razonamiento (1) es lógicamente correcto. Podemos decir, de un modo general, que la lógica de predicados nos lleva de las relaciones lógicas entre enunciados a las relaciones lógicas que se dan en el interior de los enunciados.

Examinemos ahora con más detalle cómo podemos mostrar la validez de (1). Empecemos con un enunciado simple.

(2) Bruce es un alce

Este enunciado dice algo acerca de un individuo. El individuo es Bruce y se dice de él que tiene la propiedad de ser un alce. Este tipo de enunciado se llama enunciado predicativo (se predica algo, por ejemplo una propiedad, de un individuo).

Las correspondientes estructuras lingüísticas, sintagma nominal y sintagma verbal, pueden ayudarnos en cierta medida a desarrollar las intuiciones pertinentes en este contexto.

Los siguientes enunciados tienen la misma forma lógica que (2), puesto que predican algo de un individuo.

(3) El oso está dormido
El Rey Canuto se rindió
Olaf era un vikingo
El Este es rojo

Simbolizamos los sujetos en los enunciados anteriores por medio de a, b, c, d... Estos símbolos se llaman **constantes de individuo** (letras latinas minúsculas). Los predicados de los enunciados los simbolizamos con *A, B, C, D*... Estos símbolos se llaman **constantes de predicado** o simplemente **predicados** (letras latinas mayúsculas).

Ahora podemos simbolizar (2) en lógica de predicados. Por mor de la brevedad, atribuimos la letra $b$ a Bruce y la letra $M$ a la propiedad de ser un alce. El enunciado se presenta como sigue. Téngase en cuenta que, por convención, el predicado se coloca al principio de la expresión.

(4) $\mathrm{M}(\mathrm{b})$

En (4) hablamos de un cierto individuo, Bruce, y de: una cierta propiedad, la de ser un alce, y decimos que Bruce tiene la propiedad de ser un alce. Podemos también formar la siguiente expresión.

(5) $\mathrm{M}(x)$

En (5) x no es una constante de individuo sino una **variable de individuo.** Esto significa que x no está en lugar de un individuo concreto sino de un individuo cualquiera (o, dicho de otro, en lugar de un individuo arbitrariamente elegido). Tal como está escrito, (5) no expresa ninguna proposición. Esta es la razón de que (5) no sea considerado, en lógica, como enunciado sino como **enunciado abierto**.

Podemos dar un paso más en la escala de abstracción y formar la siguiente, expresión.

(6) $\Phi(x)$

En esta fórmula tenemos no sólo una variable de individuo sino también una **variable de predicado,** $\Phi$ (la mayúscula griega phi). Una variable de predicado nos remite no a una propiedad concreta sino a una propiedad cualquiera (una propiedad indeterminada).

Tal como está escrita, (6) puede considerarse una expresión sin sentido. Indica la posibilidad de predicar una propiedad cualquiera de un individuo cualquiera. No se hace ninguna afirmación de existencia. Sin embargo, como veremos luego, las expresiones del tipo de (6) pueden utilizarse en lógica para ciertos fines.

Constantes y variables de individuos se suelen agrupar bajo el nombre común de **términos de individuo.** Del mismo modo, variables y constantes de predicado se agrupan bajo el nombre de **términos de predicado.**

Se puede decir que los enunciados que aparecen en (2) y (3) tienen la misma estructura o forma lógica. Están formados por un término de predicado seguido de un término de individuo. Tienen, por lo tanto, la forma lógica representada en (7).

(7) $P(t)$

Ni que decir tiene que no todos los enunciados tienen la forma lógica de (7). Los siguientes enunciados, por ejemplo, tienen otra forma lógica.

(8) Thor robó el martillo
Wotan admira a Thor
Dios creó el mundo
Wotan es más sabio que Dios

En estos enunciados aparecen predicados con dos argumentos. **Argumento** es un término que se emplea para referirse, entre otras cosas, a lo que en gramática se llama sujeto u objeto. Los términos de individuo que siguen al predicado en una expresión de la lógica de predicados se llaman argumentos del predicado. Si un predicado lleva un sólo argumento, se llama unario; si dos, binario; si tres, ternario, etc. Ejemplificamos esta terminología en (9).

| | | |
|---|---|---|
| (9) | $P(t)$ | predicado unario (o monádico) |
| | $P(t_1, t_2)$ | predicado binario (o diádico) |
| | $P(t_1, t_2, t_3)$ | predicado ternario |
| | $P(t_1, t_2, t_3, t_4)$ | predicado cuatemario |
| | $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ | predicado n-ario |

Dado que los predicados en (8), *robó, admira, creó y es más sabio que,* llevan cada uno dos argumentos, son predicados binarios. Los enunciados en (8) tienen, por lo tanto, la forma lógica $P(t_1, t_2)$. Los enunciados de (10) pueden formalizarse como $P(t_1, t_2, t_3)$es decir, contienen predicados ternarios. Los argumentos están subrayados.

(10) Juan le dio a Juana la manzana
EL guía mostró Gothenburp al turista
Wotan ofreció cerveza a Thor

No es fácil encontrar enunciados en el lenguaje natural que tengan predicados con más de tres argumentos sin entrar en cuestiones controvertidas. El siguiente enunciado podría considerarse, sin embargo, como un ejemplo de uso de un predicado con cuatro argumentos.

(11) Juan le compró a Juana un reloj por cinco libras esterlinas

En los anteriores enunciados vemos que los predicados en las fórmulas lógicas corresponden con bastante exactitud a los predicados del análisis gramatical. Para un lógico es, sin embargo, una cuestión sin mayor interés la de si un predicado lógico corresponde a una palabra o expresión simple en el lenguaje natural. Desde el punto de vista lógico expresiones muy complejas como *toma el aperitivo los domingos por la manaña entre 11 y 12 o es un lingüista de pelos largos que se interesa por la relación entre la lógica modal y la dialectología* pueden considerarse predicados en una fórmula lógica. Esto implica que un enunciado como *Thor robó el martillo* no tiene necesariamente que analizarse como *F(a, b),* es decir, como un predicado binario, sino que puede analizarse también, en principio, como *F(a),* con un predicado unario, interpretando *F* como el predicado *robó el martillo,* aunque el primer tipo de análisis sea el más natural desde un punto de vista lingüístico.

**5.2. CUANTORES**

Volvamos a la primera parte del primer ejemplo de este capítulo.

(1) Todos los alces son listos

Si analizáramos este enunciado del mismo modo que los otros enunciados del capítulo tendríamos

(2) *C*(todos los alces)

del mismo modo que

(3) *C*(Bruce)

En el caso de (2) el problema es que no podemos sustituir la expresión *todos los alces* por una constante de individuo. *Todos los alces* no se refiere a un individuo y en cambio el nombre

*Bruce,* sí. Lo que afirma (2) en realidad es que si encontramos un alce, podemos esperar que sea listo. Dicho de otro modo: escoja un alce cualquiera y encontrará que es listo.

Introducimos un nuevo tipo de constante lógica con el fin de analizar enunciados del mismo tipo que (1): el **cuantor universal, con** el significado 'todo(s)' 'cada' o 'para todo(s) vale que'. El cuantor universal se representa por el símbolo $\forall$. Un enunciado como el heráclito 'todo fluye' se formaliza de la siguiente manera por medio del cuantor universal.

(4) $\forall x\, F(x)$

(4) se puede leer como 'Para todo *x, x* fluye'. De modo similar, (1) se puede analizar por medio de (5).

(5) $\forall x\, (M(x) \rightarrow C(x))$

Esta expresión puede leerse de cualquiera de los modos siguientes.

(6) (a) Para todo *x*, si *x* es un alce, entonces *x* es listo

(b) Vale decir de todo objeto que si es un alce, entonces es listo
(e) Si algo es un alce, entonces es listo
(d) Todos los alces son listos

Para entender la función de fórmulas como (5), es importante saber qué es una variable. La *x* en $\forall x$ está por cualquier individuo en el universo del discurso. Es una variable que se refiere a los objetos e individuos del universo: su **rango** está constituido por todos los objetos e individuos del universo.

El rango no necesita estar constituido por todos los objetos del universo en que vivimos, aunque este sea el caso en el ejemplo anterior. En un libro de matemáticas el rango puede ser el conjunto de los números y en un libro de sociología, el conjunto de los seres humanos, etc. En este contexto se usa el concepto de **universo del discurso,** es decir, todos los objetos de que se habla en un cierto contexto. Este concepto se introdujo en el capítulo 2.

Para lograr una mejor comprensión de la diferencia entre enunciados simples como *F(b)* (Bruce fluye) y enunciados cuantificados como, $\forall x\, F(x)$, volvemos al concepto de enunciado abierto. Un enunciado abierto es una expresión de la forma (7)

(7) *F(x)* (léase '*x* fluye')

Dado que *x* es una variable que no se refiere a ningún individuo en concreto, no podemos decir con sentido que *F(x)* exprese una proposición o que haga una afirmación. No se puede decir que un enunciado abierto es verdadero o falso. Un enunciado simple como *Bruce fluye*, por el contrario, es siempre verdadero o falso, tiene un valor de verdad. ¿Cómo podría contestarse a la pregunta de si *x* fluye? La única respuesta posible sería 'depende de qué o quién sea *x*'. Si *x* se refiere al Támesis, entonces es verdad, pero si *x* se refiere al Rey Canuto, probablemente es falso que *x* fluya. Decir que el Rey Canuto no satisface el enunciado abierto *F(x)* es equivalente a decir que *F*(*c*), en donde *c* se refiere al Rey Canuto, es enunciado falso.

Un modo de construir un enunciado partiendo de un enunciado abierto es asignar un cierto valor a la variable. Como hemos indicado más arriba, el modo de hacerlo es sustituir la variable en la expresión por una constante de individuo. Los enunciados abiertos se llaman también **funciones enunciativas.** Entendemos a qué se alude con este término si pensamos el enunciado abierto como una función que toma individuos como argumentos y diferentes enunciados como valores de verdad. Otro modo de crear un enunciado, partiendo de un enunciado abierto, es colocar un cuantor seguido de una variable al principio del enunciado abierto. Por este método, partiendo de (7), conseguimos el enunciado del principio.

(8) $\forall x F(x)$ 'Todo fluye'

(8) afirma que todos los objetos en el universo del discurso satisfacen la función enunciativa $F(x)$. Esto es obvio. Si hubiera un objeto en el universo del discurso, pongamos *a*, que no, satisfaciera la función enunciativa, el enunciado 'Todo fluye' sería falso. Por lo tanto, *si* $F(a)$ es un enunciado falso, el enunciado $\forall x F(x)$ es también falso, dado que a es un elemento del rango de $x$ (es decir, dado que a pertenece al universo del discurso).

Es importante tener en cuenta que se cuantifican enunciados abiertos y no enunciados. Cuantificar enunciados produce extraños resultados.

(9) $\forall x\ F(b)$

(9) se leería como sigue 'Para todo x, Bruce fluye', expresión que, claramente, no tiene sentido.

De todos modos este tipo de cuantificación, llamado **cuantificación vacía,** se admite en la mayoría de los libros de lógica, puesto que por un lado no afecta al significado y por otro simplifica las reglas sintácticas. (9) se interpreta entonces como equivalente al enunciado simple $F(b)$. Desde un punto de vista lingüístico, la cuantificación vacía tiene poco o ningún contenido intuitivo y las reglas sintácticas que damos más abajo no la admitirán.

Los enunciados abiertos pueden presentar estructuras más compleja que la de los enunciados predicativos simples. Así en (10), por ejemplo.

(10) $M(x) \rightarrow C(x)$ 'Si x es un alce, entonces x es listo'

Si partimos de (10), le ponemos paréntesis y un cuantificador delante, conseguimos un enunciado.

(11) $\forall x\ (M(x) \rightarrow C(x))$

Hay que tener en cuenta que aunque podemos escoger cualquier individuo como valor de la variable $x$, hay que mantener ese mismo individuo como valor de $x$ en las dos expresiones $M(x)$ *y* $C(x)$, cuando aparecen dentro de los mismos paréntesis, como es el caso en (11). Decimos que el cuantor liga las equis en $M(x)$ *y* $C(x)$.

El alcance de cuantor es la expresión dentro de los paréntesis que le sigue inmediatamente.

Una variable ligada por un cuantor es una **variable ligada.** Las variables que no están ligadas se llaman **variables libres,** como ocurre con la última aparición de $x$ en (12), por ejemplo.

(12) $\forall x\ (F(x) \rightarrow L(x)\ \&\ K(x)))$

En (13), por el contrario, la variable correspondiente está ligada

(13) $\forall x(Fx) \rightarrow (L(x)\ \&\ K(x)))$

Esto significa que el valor de $x$ en $K(x)$ en (12) es independiente del valor de las equis que aparecen dentro de los paréntesis. Este no, es, sin embargo, el caso para la segunda expresión. En (12), $K(x)$ se puede sustituir por $K(y)$ sin cambiar el significado de la expresión. En (13) no se puede hacer una sustitución similar. Las expresiones lógicas que contienen variables libres no constituyen enunciados sino enunciados abiertos.

Dentro del alcance de un cuantor cada una de las variables está siempre por un único individuo.

En (14) aparecen una serie de expresiones lógicas en las que el alcance de cada cuantor está subrayado. No nos interesa aquí que significan esas expresiones ni a qué se refieren los predicados. El fin de las expresiones es familiarizar al lector con los conceptos de ‘alcance’, ‘variable ligada’, ‘variable libre’ y ‘enunciado abierto’.

(14) (*a*) $F(a) \vee \underline{\forall x\, (K(x) \rightarrow G(x, a))} \,\&\, \underline{\forall x\, (G(x, a))}$
(*b*) $\underline{\forall x\, (K(x) \rightarrow F(y) \,\&\, G(x, a))}$
(*c*) $\underline{\forall y}\ \underline{\forall x\, (K(x) \rightarrow (F(y) \,\&\, G(x, a))}$
(*d*) $\underline{\forall x\, ((K(x) \,\&\, F(a)) \rightarrow \underline{\forall y\, (G(x, y) \vee G(y, y)} \,\&\, \underline{\forall z\, (F(z) \rightarrow G(z, y)))}}$

(14) (a) no es un enunciado abierto, puesto que no aparece en él ninguna variable libre. (14) (b) es un enunciado abierto, dado que contiene una variable libre, a saber, la y de *F*(*y*). (14) (e) es un enunciado con dos cuantores cuyo alcance se superpone. (14) (d) muestra una expresión con tres cuantores. El alcance de dos de ellos está dentro del alcance del primero. (14) (d) no es un enunciado sino un enunciado abierto, puesto que la última variable de la expresión no está ligada por ninguno de los cuantores.

En castellano se pueden formar una infinidad de enunciados que no contienen el cuantor *todo* (*cada*) sino, otra palabra que opera como un cuantor: *uno, dos,* tres, *algunos, ninguno, varios, muchos y pocas. To*dos los elementos de la categoría gramatical de los pronombres indefinidos se pueden considerar, en cierto modo, como cuantores.

En lógica, normalmente, basta con aceptar dos cuantores. Estos dos cuantores tienen las dos características siguientes. Son importantes para la formalización de las matemáticas y sus propiedades lógicas son relativamente simples. El primero de ellos es el cuantor universal, que hemos estudiado más arriba.

El segundo es el llamado **cuantor existencial.** Se escribe ∃ y significa, grosso modo, ‘algo/alguien’ o ‘hay algo/alguien’. Los siguientes ejemplos muestran cómo se usa este cuantor.

| | | |
|---|---|---|
| (15) | (a) Alguien es conservador | $\exists x\, C(x)$ |
| | (b) Existe un unicornio | $\exists x\, U(x)$ |
| | (c) Hay alguna chica más simpática que Pepa | $\exists x\, (G(x) \,\&\, S(x, a))$ |

donde C está por ‘conservador’
U ‘ser un unicornio’
S ‘ser más simpático que’
G ‘ser una chica’
*a* Pepa

(15) muestra cómo es posible representar por el cuantor universal expresiones castellanas bastante diferentes. La mejor manera de leer ∃*x* en una expresión lógica es ‘Hay un *x* tal que...’ o, para ser más precisos, ‘Hay por lo menos un *x* tal que...’. El cuantor existencial

indica que al menos un objeto del universo del discurso satisface el enunciado abierto que sigue al cuantor.

Las expresiones lógicas en (15) se leerían del modo siguiente.

(16) (a) Hay al menos un *x* tal que *x* es conservador
(b) Hay al menos un *x* tal que *x* es un unicornio
(c) Hay al menos un *x* tal que *x* es una chica y *x* es más simpático que Pepa

Enunciados como los de (16) son 'traducciones inversas', símbolo a símbolo, de las expresiones en (15) al castellano y por ello suenan más bien torponas.

Los cuantores universal y existencial funcionan, en ciertos aspectos, de manera diferente. Una de las cosas que le parecen extrañas al que comienza a estudiar lógica es el modo en que se representan los dos enunciados castellanos siguientes:

| | | |
|---|---|---|
| (17) | Todas las mozas son guapas | $\forall x\ (M(x) \rightarrow P(x))$ |
| (18) | Alguna moza es guapa | $\exists x\ (M(x)\ \&\ P(x))$ |

La única diferencia entre (17) y (18) parece consistir en que contienen cuantores diferentes. Si miramos, en cambio, las representaciones lógicas de estos enunciados, vemos que no sólo tienen diferentes cuantores sino que también contienen conectivas lógicas diferentes. Al principio esto puede parecer extraño, pero es fácil mostrar que sería imposible cambiar las conectivas lógicas en (17) y (18).

La representación lógica de (17) contiene una implicación. Si se cambia la implicación por una conjunción, tenemos (19).

(19) $\forall x\ (M(x) \rightarrow P(x))$

(19) afirma que todo individuo en el universo del discurso es una moza y es guapa. Así pues, (17) y (19) no son equivalentes. (17) no, excluye la posibilidad de que existan algunos mozos feos en el universo del discurso, como lo hace (19). Esto significa que (19) no es una representación correcta del significado del enunciado (17).

(18) contiene una conjunción. Si se cambia la conjunción por una implicación, tenemos (20).

(20) $\exists x\ (M(x)\ \&\ P(x))$

(20) afirma que hay al menos un *x* en el universo del discurso tal que si *x* fuera una moza, entonces *x* sería guapa. (20) es verdadero si hay algún objeto en el universo del discurso que no sea una moza (esto se debe a la definición de la implicación material en lógica). (18) no es verdadero en tales circunstancias. Además (20) no implica que existan mozas en el universo del discurso, mientras que (18), sí. Es claro, entonces, que (18) y (20) no son equivalentes y que (20) es una representación incorrecta del significado de (18).

Desde un punto de vista lingüístico, tanto la representación lógica de (17) como la de (18) no parecen totalmente intuitivas. (21) y (22) son representaciones lógicas de (17) y (18) más satisfactorias lingüísticamente.

| | | |
|---|---|---|
| (21) | $\underset{x \in M}{\forall x}\quad P(x)$ | 'para toda moza *x*, *x* es guapa' |
| (22) | $\exists x\quad P(x)$ | 'para alguna moza *x*, *x* es guapa' |

$x \in M$

En estas expresiones hemos usado lo que habitualmente se llama **cuantificación restringida.** La expresión que está debajo del cuantor indica el rango de la cuantificación, en este caso, el conjunto de las mozas. *M* está por el conjunto de las mozas *y e* es la relación 'elemento de' de la teoría de conjuntos. (21) y (22) ponen de manifiesto el paralelismo entre los dos enunciados, cosa que no ocurre en las representaciones lógicas de (17) y (18). La única diferencia entre (21) y (22) estriba en la elección del cuantor. Escribiendo el rango de la cuantificación como un suscrito evitamos usar conectivas diferentes en el interior de las expresiones. La cuantificación restringida no se usa habitualmente en lógica, pero se puede incluir a fin de lograr un análisis más adecuado del lenguaje natural.

En una expresión lógica puede haber más de un cuantificador. Así, por ejemplo, (23) es una expresión bien formada de la lógica de predicados.

(23) $\forall x\ \exists \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ R\,(x, y, z)$

Cuando hay más de un cuantor delante de un enunciado, abierto, el orden en que están escritos no es arbitrario, puesto que es ese orden lo que indica el alcance de cada uno respecto de los demás.

Comparemos las dos expresiones siguientes, en donde *F(x, y)* está por 'x es el padre de y'.

(24) $\forall x\ \exists \mathrm{y}\ F(x, y)$ 'para todo *y*, hay un *x* tal que *x* es el padre de *y*'
(25) $\forall x\ \exists \mathrm{y}\ \mathrm{F}(x, y)$ 'hay un *x*, tal que, para todo *y*, *x* es el padre de *y*'

La única diferencia entre estos dos enunciados es que el cuantor existencial está dentro del alcance del cuantor universal en (24), mientras que en (25) ocurre al revés. Esto influye de manera considerable en el significado de los enunciados. En castellano ortodoxo, (24) significa 'Todo el mundo tiene padre', cosa que parece razonable. (25), en cambio, significa 'Alguien es padre de todo el mundo', lo que ya no parece tan razonable.

En (24) se dice que sea cual sea el individuo que consideramos, es siempre posible encontrar algún individuo que es su padre. En (25) se afirma que hay un individuo tal que, dado un individuo cualquiera, el primero es el padre del segundo. Esto puede sonar un poco enrevesado, pero ahora veremos un modo de aclarar estas diferencias.

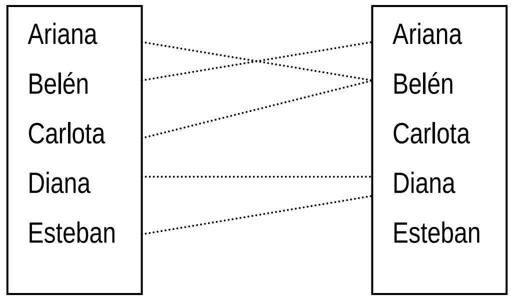
Hay enunciados en castellano, como 'todo el mundo admira a alguien', que son ambiguos precisamente en dependencia del alcance del cuantor. Los diferentes sentidos de estos enunciados corresponden a expresiones diferentes en la lógica de predicados. El enunciado que hemos mencionado antes tiene dos lecturas. A está por 'admira' en las expresiones que siguen.

(26) $\forall x\ \exists y\ \mathrm{A}(x, y)$ 'todo el mundo tiene alguien a quien admira'
(27) $\exists y\ \forall x\ \mathrm{A}(x, y)$ 'hay alguien a quien todo el mundo admira'

Para ver cómo funciona el alcance del cuantor vamos a considerar un universo del discurso pequeño, pongamos, cinco individuos. Supongamos que el universo del discurso contiene los individuos Ariana, Belén, Carlota, Diana, Esteban. El rango de los cuantores es el conjunto de estos cinco individuos.

Estudiaremos primero (26). Debajo de los cuantores ponemos el rango de las variables. Las líneas de puntos indican que el primer individuo admira al segundo.

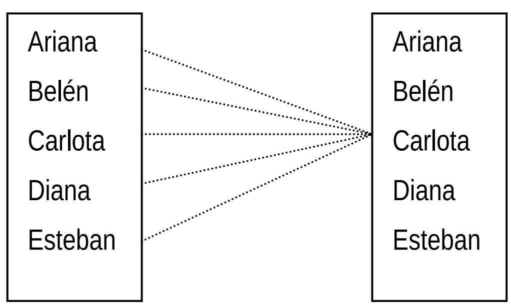
(26’) $\forall x \quad \exists y \qquad A(x, y)$




(26) dice que es posible encontrar, para cada individuo, del primer conjunto, un individuo en el segundo conjunto tal que el primero admira al segundo. Esto es lo que indican las líneas en (26’). Cada uno de los individuos en el universo del discurso admira a alguien del universo del discurso.

(27) ha de entenderse de diferente manera. Este enunciado dice que es posible encontrar a alguien en el universo del discurso que es admirado por todos, tal como se pone de manifiesto en 27’).

(27’) $\exists x \quad \forall y \qquad A(x, y)$




Ahora se ven con claridad las diferencias entre (26) y (27). Lo importante de (26’) es que encontramos que, para cada individuo en el primer conjunto, hay un individuo en el segundo al que aquél admira. Los individuos en el primer conjunto pueden admirar a individuos diferentes en el segundo conjunto, pero cada uno de ellos ha de admirar a alguien en el segundo conjunto. Lo importante de (27) es que todos los individuos del primer conjunto admiran al mismo individuo en el segundo. Como se ve en (27) todos admiran a Carlota.

Todavía hay que apuntar una cosa más. (27) seguiría siendo verdadero si, por ejemplo, Ariana admirara a Belén además de admirar a Carlota. Lo que importa es que todos admiren a Carlota.

El enunciado (27) implica el enunciado (26), pero, (26) no implica (27). Esto se ve a partir del esquema anterior. Si todo el mundo admira al mismo individuo, ha de ser verdad que todo el mundo admira a alguien.

En otras palabras,

$$\forall x \, \exists y \, F(x, y) \rightarrow \forall x \, \exists y \, F(x, y)$$

pero no

$$\forall x \, \exists y \, F(x, y) \rightarrow \exists x \, \forall y \, F(x, y)$$

Las ambigüedades de alcance que se producen en enunciados que contienen dos cuantores son interesantes lingüísticamente. A menudo, sucede que la entonación cambia un enunciado potencialmente ambiguo en uno que no lo es. Un ejemplo de este fenómeno es el siguiente verso de una canción que fue popular hace algunos años: *Everybody loves samebobody sometime* (Todo el mundo ama a alguien alguna vez). Si se conoce la canción, se estará de acuerdo en que el enunciado sólo se puede entender de tal modo que el cuantor universal tenga el alcance más amplio.

Otro rasgo de los cuantores que ha sido ampliamente discutido por los lingüistas es el siguiente. El orden de los cuantores en un enunciado castellano corresponde a menudo al orden que damos a los cuantificadores en la representación lógica del significado de ese enunciado. Comparemos los enunciados siguientes.

(28) (a) Todos los que están en esta habitación hablan dos idiomas.

(b) Hay dos idiomas que son hablados por todos los que están en esta habitación.

(28) (a) favorece claramente una lectura en la que el cuantor universal tenga el alcance más amplio. (28) (b), por el contrario, inclina a la lectura en la que la expresión ‘hay dos lenguajes’ tiene más amplio alcance. Puede ser que ambas expresiones sean ambiguas, pero, es claro que, en cada caso, se prefiere la lectura cuya representación lógica presenta los cuantores en el mismo orden que en castellano. Dado que la transformación pasiva, que se usa para relacionar (28) (a) con (28) (b), se entiende como, transformación que no afecta al significado, los pares de enunciados del mismo tipo que (28) presentan un problema para el lingüista. Pares de enunciados como los de (.28) se mencionan ya en Chomsky (1957).

Un problema similar lo crean pares de enunciados como los siguientes.

(29) (a) Alguien no explicó la situación

(b) La situación no fue explicada por alguien

Lo relevante aquí no es el orden de los cuantores sino la posición de la negación con respecto a los cuantores. Para muchos hispano-hablantes (29) (b) es ambiguo y tiene las dos lecturas siguientes, entendiendo *E* por ‘explicar’ y ‘s’ por situación.

(30) (a) $\sim\exists x \, E(x, s)$ ‘no hay un $x$ tal que $x$ explicara $s$’

(b) $\exists x\sim E(x, s)$ ‘hay algún $x$ tal que $x$ no explicó $s$’

(30) (a) dice que nadie explicó la situación. (30) (b) dice que no todo el mundo explicó la situación: alguien lo hizo y alguien, no. (29) (b) puede entenderse de las dos maneras, pero (29) (a) probablemente sólo puede entenderse en el sentido de (30) (b). Y sin embargo, (29) (b) se relaciona con (29) (a) por medio de la transformación pasiva.

Abandonamos por el momento las ambigüedades del alcance del cuantificador con estos ejemplos, aunque encontraremos de nuevo, ocasión de tratarlas en el capítulo de lógica modal.

**EJERCICIOS**

1. Sean *a*= Alicia A= admirar

b= Bartolo D= desdeñar

f= Francisco

Traducir las siguientes expresiones de la lógica de predicados al castellano

(a) $A(b, f)$
(b) $A(b, f)$ & $D(f, b)$
(c) $\exists x A(x, x)$
(d) $\sim\forall x\, D(x, f)$
(e) $\forall x(A(x, j) \rightarrow D(x, x))$
(f) $\sim \exists x \forall y A(y, x)$
(g) $\forall x\ \forall y(A(x, y) \rightarrow \sim D(x, y))$

2. Formalizar los siguientes enunciados en lógica de predicados
(a) Canuto es Danés
(b) Canuto era liberal pero Olaf era socialista
(c) Luisa no le gusta a ningún chico
(d) Todos los estudiantes leen algún libro
(e) Ningún estudiante contesta todas las
(f) Si todos los estudiantes catean, ninguno se sentirá feliz
(g) Se puede, si se intenta

3. Clasifíquense las siguientes relaciones según la reflexividad, simetría y transitividad.
(a) ‘ganar tanto dinero como’
(b) ‘ganar tanto o más dinero que’
(c) ‘ser el abuelo de’
(d) ‘enamorarse de’
(e) ‘ser el hermano de’

(4) ¿Es una función la relación entre una persona y sus huellas digitales?

(5) Dar ejemplos de

(a) una relación multívoca
(b) una relación unívoca a la derecha
(c) una relación unívoca a la izquierda
(d) una relación biunívoca

(6) Dar un ejemplo de un enunciado en lógica de predicados que sea falso en todo mundo posible.

7. Traducir los dos enunciados siguientes a la lógica de predicados.
(a) Ricardo vio un oso y Juan también lo vio.
(b) Ricardo vio un oso y Juan también vio uno.

(8) Formalizar la ambigüedad del siguiente enunciado por medio de la lógica de predicados.

Todo el mundo odia a alguien

9. Dar dos expresiones castellanas tal que una sea la conversa de la otra.

10. ¿Cómo se interpreta extensionalmente un predicado en lógica de predicado?

11. Formalizar en lógica de predicados el siguiente enunciado:

Existe un poder maligno

12. ¿Qué es un enunciado abierto?

13. ¿Cuál de los siguientes enunciados es equivalente?

(a) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$
(b) $\forall x(F(x) \,\&\, G(x))$
(c) $\sim \exists x(F(x) \,\&\, \sim G(x))$
(d) $\exists x \sim (F(x) \,\&\, G(x))$
(e) $\forall x \sim (F(x) \rightarrow G(x))$
(f) $\sim \exists x \sim (F(x) \,\&\, G(x))$
(g) $\sim\forall x(F(x) \,\&\, G(x))$

14. Dado el siguiente enunciado, donde C está por ‘chica, G por ‘gustar’ y *a* se refiere a Arturo.
$\sim\exists x(G(x) \,\&\, L(a, x))$

(a) Dar una interpretación que haga verdadero al enunciado
(b) Dar una interpretación que haga falso el enunciado

15. Dada la siguiente interpretación
a= Arturo c= Clara
b= Bartolo d= Doris
B ‘chico’: {a, b}
G ‘chica’: {c, d}
L ‘amar’:
¿Qué enunciados de entre los siguientes son verdaderos y cuáles falsos?
(a) $G(a)$
(b) $\forall x\, L(a, b)$
(c) $\sim L(a, d) \vee \sim B(d)$
(d) $\sim \exists x\, G(x)$
(e) $\forall x\, L(x, x)$
(f) $\exists x\, \forall x\, ((B(x) \,\&\, G(y)) \rightarrow L(x, y))$
(g) $\forall x\, \forall y\, ((B(x) \,\&\, G(y)) \rightarrow L(x, y))$
(h) $\forall x\, \forall y \forall z\, ((L(x, y) \,\&\, L(y, z)) \rightarrow L(x, z)$

16. Dada la siguiente interpretación
a= Alberto

b= Bartolo
c= Cecilio
H ‘caballo’: {b, c}
L ‘lugar’: {<a, b> <c, b> <b, b> <b, a>}

(a) Dar un enunciado falso en esta interpretación
(b) Dar un enunciado con una negación que sea verdadero en esta interpretación
(c) Dar un enunciado cuantificado universalmente que sea verdadero en la interpretación
(d) Dar un enunciado cuantificado existencialmente que sea falso en la interpretación
(e) Dar un enunciado con un cuantor existencial y uno universal que sea verdadero en la interpretación

17. Dar una interpretación que haga verdaderos todos los enunciados del ejercicio (1).

## SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS

### Cap. 2. TEORIA DE CONJUNTOS

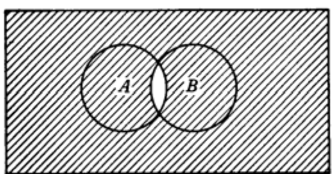
1. (*a*) $b \in C$; (b) $C \subset D$; (c) $A \cup C$; (d) {d, e, g}; (e) $d \notin A \cap B$; (f) **C** $A \subset B \cup C$

2. Los mozos a quienes María ha besado.
   Los daneses que son filósofos (los filósofos daneses).

3. {{Londres}, {Barcelona}, {Sevilla}, {Londres, Barcelona}, {Londres Sevilla}, {Barcelona, Sevilla}, {Londres, Barcelona, Sevilla}}.

4. Verdaderas: (a), (c), (d), (f); falsa: (e).

5.




6. Verdaderas: (a), (b), (d), (e), (g); falsas: (c),

7. Dominio: naciones; codominio: ciudades.
   Dominio: hombres casados; codominio: mujeres.
   Dominio: naciones; codominio: seres humanos.

### Cap. 4. LOGICA DE ENUNCIADOS

1. (b) puesto que no puede interpretarse como p & q. No es sinónimo *de Luis es pariente y Ricardo es pariente.*

2. (a) $p \rightarrow q$; (b) $p$ & $q$; (c) $q \rightarrow p$; (d) $(p \vee q)$ &$\sim r$; (e) $\sim (p \vee q) \rightarrow r$; (f) $\sim p \rightarrow q$ o también $p \vee q$

3. (a) **f**; (b) **t**; (c) **f**; (d) **t**; (e) **t**; (f) **t**

4. (a), (c), (d), (f), (h)

5. No. Un enunciado como *Juan es feliz porque Mari le ama* puede ser verdadera o falsa aún en el caso de que ambos enunciados sean verdaderos. Por lo tanto el valor de verdad de *p porque q* no puede ser una función del valor de verdad de *p* y *q*.

8. (a), (b) y (c) son tautologías.

### Cap. 5. LOGICA DE PREDICADOS

1. (a) Alicia admira a Francisco.

(b) Bartolo admira a Francisco y Francisco desdeña a Bartolo.
(c) Alguien se admira a sí mismo.
(d) No todos desdeñan a Francisco.
(e) Todos los que admiran a Francisco se desdeñan a sí mismos.
(f) No es verdad que haya alguien al que todos admiran.
(g) Todos los que admiran a alguien no desdeñan a esa persona.

2. (a) $D(c)$
   (b) $L(c) \,\&\, S(o)$
   (c) $\sim\exists x(\mathrm{G}(x) \,\&\, \mathrm{L}(x, l))$
   (d) $\forall x(S(x) \rightarrow \exists y(B(y) \,\&\, R(x, y))$
   (e) $\sim \exists x \forall y\ ((S(x) \,\&\, Q(y)) \rightarrow A(x, y))$
   (f) $\forall x(S(x) \rightarrow F(x) \rightarrow \sim\exists x(S(x) \,\&\, G(x))$
   (g) $T(a) \rightarrow C(a)$

3. (a) reflexiva, simétrica, transitiva.
   (b) reflexiva, no-simétrica, transitiva.
   (c) irreflexiva, asimétrica, intransitiva.
   (d) no-reflexiva, no-simétrica, no-transitiva.
   (e) irreflexiva, no-simétrica, transitiva (en el sentido biológico del término, excluyendo hermanastros).

4. La relación entre una persona y sus huellas digitales es una relación biunívoca, probablemente. Por ello es una función.

5. Por ejemplo: (a) admirar; (b) tener como resultado en el examen (cada estudiante tiene un cierto resultado); (c) padre de; (d) ser el marido de (en una sociedad monogámica).

6. Por ejemplo. $P\ (a) \,\&\sim P\ (a)$ o $(\forall\ x\ (M\ (x) \rightarrow C(x)) \,\&\, M(b)) \rightarrow \sim C(b)$

7. (a) $\exists x\ (B(x) \,\&\, S(v, x) \,\&\, S(k, x))$
(b) $\exists x\ (B(x) \,\&\, S(v, x)) \,\&\, \exists y\ (B(y) \,\&\, S(k, x))$, donde $B$ está por 'oso' y $S$ por 'vio', $v$ se refiere a Ricardo y $k$ a Juan.

8. (a) $\exists y\ \forall x\ H(x, y)$
   (b) $\forall x\ \exists y\ H(x, y)$, donde $H$ está por 'odia'.

9. Por ejemplo: 'ser más grande que' y 'ser más pequeño que'.

10. Un predicado binario se interpreta como una clase de pares ordenados.

11. $\exists x\ (P(x) \,\&\, E(x))$, donde $P$ está por 'poder' y $E$ por 'maligno'.

12. Un enunciado abierto es una fórmula lógica con, al menos, una variable libre.

13. Son equivalentes: (a) y (c); (b) y (f); (d) y (g)

14. (a) G: {b, c}
        L: {<a, a> <c, b> <b, c>}
    (b) G: {b, c}
        L: {<a, a> <c, b> <b, c> <a, c>}

15. Enunciados verdaderos. (c) y (f).
Enunciados falsos: (a), (b), (d), (e), (g) y (h).
Ver que (h) es falso es un poco difícil, pero si se estudia la interpretación, se verá que $d$ ama a $a$ y $a$ ama a $d$, pero $d$ no ama a $d$. No hay nada que impida que las dos variables, $x$ y $z$, se refieran a la misma persona, como ocurre en este ejemplo.

16. (a) $H(a)$
(b) $\sim H(a)$
(c) $\sim \forall x\, L(x, a)$
(d) $\exists x\, L(x, c)$
(e) $\exists x \forall y\, L(y, x)$

17. La siguiente interpretación hace verdaderos a todos los enunciados del ejercicio l).
$A$: $\{<b, f> <a, a>\}$
$D$: $\{<f, b> <b, b>\}$