La Ciencia es una creación humana de tan variada multiplicidad que ocupa cada vez un mayor y más privilegiado espacio en el pensamiento y en la vida actuales. El protagonismo de todas y cada una de las disciplinas que forman el tronco del pensamiento científico es producto de un largo proceso evolutivo que surge de la mera curiosidad y que se ha ido desarrollando por la vía de la necesidad. La ciencia es una actividad viva porque sus teorías nacen, crecen, se reproducen y mueren dando lugar a cuerpos de doctrina más ambiciosos y veraces. Por eso la ciencia más que ninguna otra actividad intelectual humana es una inevitable confrontación de pasado y futuro.

Claude Brezinski ofrece en *El oficio de investigador* una serie de consejos y de técnicas para la investigación que han de ser de utilidad para las personas que aspiran a pasar de la categoría de estudiosas a la de creadoras.
La obra consta de tres partes. En la primera, se atienden aspectos concretos de la formación del investigador y se esbozan las técnicas documentales adecuadas para iniciar la actividad. La segunda parte aborda las cuestiones metodológicas pertinentes, respaldadas por una atinada antología de testimonios de eminentes científicos que permiten conocer la génesis de ciertas creaciones y descubrimientos. La última parte está dedicada a explicar las técnicas que facilitan la comunicación de los hallazgos mediante la expresión oral o escrita. Numerosas citas jalonan estas páginas, alentadoras todas ellas para quienes se inician en un camino tan apasionante como dificultoso —lo es el de la investigación científica—, y vertebradas por una persistente invitación cursada a los hombres de ciencia para que adquieran un mínimo de cultura sobre la historia de su disciplina y la de las disciplinas vecinas.

Claude Brezinski, nacido en 1941, es Profesor de la Universidad de las Ciencias y de las Técnicas de Lille desde 1973, donde dirige el Laboratorio de Análisis Numérico y Optimización. Miembro de los comités de redacción de varias revistas matemáticas y fundador y redactor jefe de *Numerical Algorithms* y *Annals of Numerical Mathematics,* es autor de nueve libros y de un centenar de artículos. Fue premio especial en el concurso Semour Cray, en 1988, por el conjunto de sus trabajos de investigación.

ISBN 84-323-0805-6
9 788432 308055 00001

Claude Brezinski

EL OFICIO DE INVESTIGADOR

Versión castellana de Mariano Hormigón, Mª Angeles Velamazán y Mª Dolores Ugarte

Siglo XXI de España Editores, S.A.

Colección dirigida por Mariano Hormigón

Claude Brezinski

EL OFICIO DE INVESTIGADOR

Versión castellana de Mariano Hormigón
Mª Angeles Velamazán y Mª Dolores Ugarte

siglo veintiuno editores
MÉXICO
ESPAÑA

siglo veintiuno editores, sa
CERRO DEL AGUA, 248. 04310 MEXICO, D.F.

siglo veintiuno de españa editores, sa
C/ PLAZA, 5. 28043 MADRID. ESPAÑA

Primera edición en español, agosto de 1993

Impreso y hecho en España
Printed and made in Spain

ISBN: 84-323-0805-6
Depósito legal: M. 23.577-1993

Composición de Textos: FotoKopias, S. L.
Calle Corona de Aragón, 22-24. 50009 Zaragoza

Impreso en Closas-Orcoyen, S. L. Polígono Igarsa
Paracuellos de Jarama (Madrid)

ÍNDICE

PROLOGO

Me interesé muy pronto por la historia del pensamiento científico y por la metodología de la investigación. Mi primera lectura en este terreno fue *Le monde vu par la physique* de Carl Friedrich von Weisacker [Flammarion, París, 1956] mucho antes de haber comenzado mis estudios universitarios. Después, siendo investigador, posteriormente dirigiendo a otros por los caminos del descubrimiento, y también continuando siempre mis lecturas sobre la historia y la epistemología de las ciencias, mi experiencia y mi reflexión se fueron enriqueciendo poco a poco.

Así, me di cuenta del mucho tiempo que el joven investigador pierde al principio de su tesis, al intentar adquirir por sí solo unas ciertas técnicas que no se enseñan prácticamente nunca y de lo fácil que era poner remedio a esta carencia. Igualmente advertí que era posible enseñar a los estudiantes a estructurar una exposición, redactar un artículo o presentar de forma legible y atractiva unas transparencias.

El joven investigador tampoco sabe *a priori* si existen métodos o recetas para investigar. A menudo no sabe siquiera en qué consiste la investigación y cuáles son sus recompensas y sus dificultades. No conoce nada de la vida científica internacional, de los contactos y colaboraciones entre colegas, de las sociedades científicas, de los congresos, de las revistas especializadas...

Por tanto, podía ser necesario escribir un libro para explicar todo esto a quienes se comprometen con la investigación científica. Además quería también presentar aquí mis lecturas y experiencias personales, contar cómo se han efectuado algunos inventos y descubrimientos para ilustrar mi propósito y plantear algunas reflexiones personales para ayudar a abordar la cuestión. Quizás resulte por ello un libro apretado y desordenado, pero es el fruto de unos cuantos años dedicados a la ciencia y es la imagen de la propia investigación. Podrá interesar también -eso espero- al gran público culto en un momento en que el lector ha estado privado durante mucho tiempo de libros sobre la ciencia y las ciencias y está ahora en vías de poder paliar este retraso. Siendo matemático y, en concreto, efectuando investigaciones en análisis numérico (que es la rama de las matemáticas donde se estudian los métodos que permiten resolver numéricamente en ordenador los problemas que las matemáticas llamadas puras no permiten tratar) este libro está algo sesgado en esta dirección. Sin embargo, he intentado que lo esté lo menos posible para llegar al mayor número de personas y espero haberlo conseguido gracias a mi formación inicial en la cual la física ocupó un lugar importante.

La investigación es una actividad apasionante; pero es difícil, ata y es exigente. Como Empédocles, diría yo al joven investigador: *Ten valor y lánzate hasta las cimas de la ciencia.*

INTRODUCCION

No creo que existan recetas para investigar, para encontrar resultados nuevos, para tener ideas originales, ya sea en matemáticas, en física o en cualquier otra disciplina. Sin embargo, existen ciertas técnicas que un joven investigador debe conocer, siendo, en mi opinión, las más importantes las relativas a los métodos bibliográficos. Es, en efecto, fundamental saber, antes de emprender cualquier trabajo de investigación, si el tema ya ha sido tratado y qué resultados se han obtenido. Es preciso aprender a utilizar las bibliotecas con sus diferentes ficheros, conocer las diferentes revistas especializadas, manejar las diversas fuentes que permiten elaborar una bibliografía sobre un tema determinado. En este aspecto el joven investigador ha estado habitualmente desatendido y no ha recibido más que escasas indicaciones de otros investigadores algo más adelantados. Esta práctica ha hecho perder mucho tiempo dificultando alcanzar un resultado exhaustivo. Por ello era deseable intentar sistematizar este trabajo bibliográfico o por lo menos ofrecer sus principales reglas.

Al mismo tiempo el joven investigador se dará cuenta de que no trabaja él solo en su campo y deberá tomar conciencia rápidamente de la importancia de los contactos personales con colegas de la misma nacionalidad y extranjeros. Así se traban amistades, que a menudo duran toda la vida. Basadas en la mutua consideración que une a dos investigadores, permiten no sólo el progreso científico por medio de correspondencia y fructíferas discusiones, que llevan a clarificar ideas, sino que tienen también consecuencias nada despreciables de colaboración internacional, organización de congresos, invitaciones a jóvenes investigadores, etcétera.

Las matemáticas, como todas las ciencias naturales, son una tarea cooperativa y social. Requieren un trabajo individual intensivo aunque ocasionalmente requieren numerosas interacciones con los compañeros de profesión. Los matemáticos deben contrastar sus ideas con colegas. Necesitan aplicar los conocimientos y las técnicas de otros a sus propios problemas. Por ello las publicaciones periódicas, la correspondencia, los seminarios y las conferencias internacionales juegan un papel crucial en el desarrollo de las matemáticas. [Ann Hibner Koblitz, *A convergence of lives,* Birkhaüser-Verlag, Basilea, 1983].

Evidentemente esto se puede extrapolar a otras disciplinas científicas.

Naturalmente, para llegar hasta aquí, el investigador deberá iniciarse en la vida científica, en el conocimiento de otros laboratorios y de los temas que allí se tratan, de otros investigadores, de revistas y boletines de información que anuncian congresos, seminarios, tesis y de las diversas sociedades profesionales, de sus fines y sus actividades. La lista se podría alargar. Habitualmente el joven investigador es puesto al corriente por su director de investigación, pero es mejor, si quiere hacerse conocer, que aprenda cuanto antes a orientarse por sí mismo, a trabar contactos personales, lo que en mi opinión es uno de los componentes más importantes de la investigación tal y como se desarrolla en la actualidad.

Una vez terminado su trabajo, el joven investigador deberá darlo a conocer. Esta primera toma de contacto suele efectuarse mediante un seminario con los colegas del mismo laboratorio. No creo que se pueda aprender a hacer una exposición. Algunas personas son excelentes investigadores, pero incapaces de hacer un seminario claro. Se necesita sin duda un cierto don de partida como también se necesita para investigar. Se pueden aprender, sin embargo, algunas reglas que permiten estructurar bien una exposición, desarrollar las ideas esenciales y no perderse en detalles técnicos que cansan al auditorio y le hacen perder el hilo conductor. Es preciso aprender a utilizar el soporte material elegido: pizarra, hojas blancas o transparencias.

Tras el aprendizaje de las técnicas de expresión oral viene el de las técnicas de expresión escrita. El joven investigador tendrá que redactar en muchas ocasiones un informe, una tesis o un artículo para una revista especializada. Tampoco creo que se pueda aprender a redactar correctamente del mismo modo que no se puede aprender a ser escritor. Sin embargo, observando algunas reglas se pueden mejorar la calidad y claridad de un texto. Estas reglas no son forzosamente las mismas si se redacta una tesis, donde el número de páginas no está imperativamente limitado, o un artículo, donde se está obligado a ser mucho más conciso.

Una vez terminado el artículo habrá que presentarlo a una revista para su publicación. Es por tanto necesario conocer el procedimiento a seguir, las reglas que hay que respetar, el funcionamiento del sistema de arbitraje, las tendencias dominantes en las diferentes revistas, las personas que componen sus comités de redacción... En general el primer artículo de un investigador joven se somete a una revista por intermedio de su director

de investigación que conoce el dédalo del procedimiento. Sin embargo, es fundamental que todo investigador conozca este tipo de procesos lo más rápidamente posible a fin de realizarlos él mismo sin ayuda.

Por último, cuando el joven investigador haya conseguido seguridad -y ya no será entonces tan joven- deberá guiar a otros en el camino de la investigación.

Pero ante todo el joven investigador desea saber qué hacer para encontrar resultados nuevos para así pasar del estadio de *buscador* al de *encontrador*. Como ya he dicho anteriormente, no creo en recetas milagrosas, creo más bien en la buena estrella, en el hada buena y en su varita mágica. Sin embargo, como demuestra la experiencia, la creatividad existe y las ideas nuevas aparecen. Por eso este libro incluye numerosas citas de científicos, así como muestras del camino que han seguido sus pensamientos hasta llegar al descubrimiento. Del mismo modo es posible describir el método científico (o su ausencia). Así podemos llegar poco a poco, si no a comprender todo, al menos a entender cómo se construye el conocimiento científico, cómo se elabora lo que François Jacob llama la ciencia *nocturna* en contraposición de la ciencia *diurna*, que figura en los manuales y artículos. Para los jóvenes investigadores es importante conocer esta cara de la ciencia que al principio permanece oculta para ellos y en la que pronto tendrán que moverse. Así,

[...] el mayor error que se puede cometer con los descubrimientos científicos es arrancarlos de sus orígenes y ver en ellos la única verdad. [E. Rabier, Discurso pronunciado en la Sorbona en la entrega de premios del *Concours Général,* 1886].

Este libro se dirige prioritariamente a quienes se orientan hacia la investigación al igual que -espero- a aquellos que están ya comprometidos en este camino desde hace algún tiempo.

La investigación es una actividad formadora para el mismo espíritu humano aunque uno no desee dedicarse a ella durante toda su vida. A aquellos que la han practicado durante algún tiempo les queda una manera específica de abordar los problemas.

Emile Boutroux ha dicho:

Nada más justo que la afirmación, muy repetida entre nosotros, del valor educativo de las ciencias, con tal que sean correctamente comprendidas la naturaleza y el papel de la ciencia [...]

Por ello, la ciencia verdaderamente educativa no es la que se da como algo ya hecho, acabado, infalible en su simplicidad y uniformidad lógica, sino la que

> trabaja, busca, vacila, se autocritica, se corrige, se siente eternamente provisional y se trata a sí misma como tal; la ciencia no es lo establecido que se presenta en la enseñanza y los exámenes: la ciencia es algo vivo, en continua creación en los laboratorios [...]

> Al contrario, la ciencia viva, sujeta a la realidad, en lugar de imponerse a ella, enseña al espíritu a librarse continuamente de la tiranía de la costumbre, que no es otra cosa que la abdicación del espíritu ante la ley de la inercia propia de la materia. No está formada sólo por la facultad de observación externa y de deducción lógica, sino que agudiza el juicio, distingue la conveniencia de los métodos para los problemas, la importancia y el valor de los resultados. [*La nature et l´esprit,* J. Vrin, París, 1926, pp. 140-141].

También por esto he escrito este libro.

APRENDER A INVESTIGAR

CAPITULO I

LA FORMACION DEL INVESTIGADOR

Finalizados los estudios clásicos en la Universidad o en una Escuela de Ingenieros y antes de afrontar un trabajo personal de investigación, el estudiante debe seguir cursos más especializados para alcanzar el nivel en que se encuentra internacionalmente el tema elegido. Es el periodo de preparación para la investigación. En Francia se denomina *Diplôme d'Etudes Approfondies* (DEA) y, aunque el sistema pueda diferir algo de un país a otro, utilizaré estas siglas en lo sucesivo. El DEA es la preparación habitual antes de iniciar la investigación. Es la vía seguida por la mayoría de los estudiantes -aunque por supuesto es posible investigar sin haber seguido estas enseñanzas. Por ello los cursos son de nivel elevado y deben evolucionar cada año para aportar los últimos resultados obtenidos. La enseñanza del DEA requiere para el estudiante mucho trabajo a tiempo completo (a los estudiantes que lo compatibilizan con otras actividades profesionales se les permite en general hacerlo en dos años). También el estudiante deberá aprender poco a poco a trabajar solo. Es decir, él solo deberá rehacer los razonamientos explicados, con objeto de asimilar bien la técnica y el espíritu de los mismos. Cuando se haya familiarizado con este trabajo, el curso deberá evolucionar hacia niveles superiores que hagan comprender a los estudiantes el proceso intelectual -sin perderse en los detalles técnicos y demostraciones- que el estudiante deberá aprender a hacer solo casi enteramente. Es preciso proporcionar a los estudiantes una visión de conjunto sobre la materia enseñada y plantearles cuestiones sobre ella. Sería enormemente deseable, pero es difícil de obtener, y el resultado depende incluso de la personalidad de los estudiantes que siguen el curso, que se estableciera un verdadero diálogo entre el enseñante y los estudiantes. Que se logre este diálogo es muy gratificante para el profesor y pienso que ayuda a los estudiantes a comprender el curso en profundidad. Se evoluciona así, poco a poco, hacia un tipo de curso ya no de clases magistrales -que resulta, en mi opinión, demasiado escolar en el nivel DEA- y que tampoco es una conferencia de un congreso. Es algo intermedio entre el curso clásico y el seminario. Una buena forma de conseguir esto, al menos la única que he encontrado, aunque no siempre funcione, es la de reemplazar poco a poco el curso sobre pizarra por un curso donde se utilice el retroproyector. Otra condición para el éxito es que los estudiantes no estén obligados a copiar muy rápidamente y sin comprender las transparencias que se proyectan sino que puedan escuchar el curso para intentar comprenderlo y extraer de él lo más importante. Esto sólo es posible si los estudiantes disponen de un soporte escrito del curso, notas manuscritas, fotocopias o libro.

Los estudiantes franceses son mucho más inhibidos que sus compañeros americanos por ejemplo, vacilan en plantear cuestiones por miedo a parecer ignorantes a los ojos del enseñante y de los propios alumnos. Esta actitud procede de las relaciones sociales que en Francia son, con mucho, más rígidas que en Estados Unidos donde las barreras sociales son diferentes. La enseñanza secundaria tiene que ver con esta inhibición, ¿cuántos alumnos han tenido que sufrir las burlas descaradas de sus profesores cuando mostraban por sus preguntas que no habían entendido algo? Es ésta una grave actitud antipedagógica. Es absolutamente preciso que los estudiantes de enseñanza superior, y sobre todo los que están en un nivel de investigación, consigan desembarazarse de esta actitud pasiva. Para ayudarles, Pierre Aigrain [*Simples propos d'un homme de Science,* Hermann, París, 1983, p. 167] ha realizado una experiencia interesante. Pidió a sus colaboradores, a quienes los estudiantes no conocían todavía, que siguieran su curso y le plantearan preguntas tontas. El respondía amablemente para dar confianza a los demás estudiantes. Al cabo de dos o tres clases manipuladas de esta forma, la atmósfera se había distendido y los verdaderos estudiantes comenzaron a preguntar. Después de haber aprendido a intervenir libremente durante un curso, será preciso habituarse a hacerlo durante un seminario, luego en los congresos. Así se establecerá el verdadero diálogo científico. Como dijo Bachelard:

> Sería más fácil enseñar sólo el resultado, pero la enseñanza de los resultados de la ciencia nunca ha sido una enseñanza científica. [*La formation de l'esprit scientifique,* p. 234].

Posteriormente J. Coste en *L'air et les songes* afirmó algo que puede ser mucho más grave:

> Los conceptos aprendidos en los libros, vigilados y criticados por los profesores bloquean la imaginación. [1943, p. 9].

Como dijo el químico sueco J. J. Berzelius hay que *provocar la curiosidad en el espíritu [del estudiante] antes de satisfacerla.*

H. Poincaré insiste también sobre ese desarrollo de la imaginación creadora en *La science et l'hypothèse:*

> Ya he tenido ocasión de insistir sobre el lugar que debe ocupar la intuición en la enseñanza de las matemáticas. Sin ella, los jóvenes espíritus no sabrían iniciarse en la comprensión de las matemáticas. No aprenderían a amarlas y no verían en ellas más que una vana logomaquia; es más, sin ella nunca podrían llegar a ser capaces de aplicarlas.

Si el docente sabe realmente formar a sus alumnos en la investigación ello supondrá para aquél y para éstos una experiencia enriquecedora. François Jacob recuerda algunos de sus cursos:

> Al mismo tiempo descubrí hasta qué punto una enseñanza puede llegar a ser apasionante, hasta provocativa, cuando no se trata con conocimientos adquiridos hace mucho tiempo y ya fosilizados, sino sobre una ciencia todavía incierta, incompleta, en crecimiento. A menudo un curso no llegaba a ser excitante, no incitaba a saber más, ni incluso a trabajar en ese tema, salvo cuando el profesor estaba entregado personalmente a la investigación. Aquello que contaba era su vida, su pasión, su lucha de todos los días, situación quizás demasiado rara. [*La statue intérieure,* Editions Odile Jacob, París, 1987, p. 267].

En el transcurso del DEA los estudiantes deben integrarse poco a poco en un equipo de investigación y tener relaciones mucho más personales y estrechas con los enseñantes que las que hayan podido tener en la licenciatura o en el magisterio. Ahora deben estar en situación de discutir libremente con los enseñantes fuera de los cursos.

En muchas ocasiones se ha dicho que las ciencias, y en particular las matemáticas, son un tema árido; máxime en un curso de DEA, en el que el nivel es, necesariamente, de alta especialización. Ya he señalado en la introducción la importancia del factor humano en la investigación. Por esto y también porque no hay que despreciar una cultura general que cada vez hace más falta en nuestros días, es, en mi opinión, deseable que los estudiantes adquieran nociones sobre la historia de la disciplina en que trabajan, lo cual también es de primordial interés para comprender en profundidad los resultados más recientes. El bioquímico Erwing Chargaff, que recibió en Viena una educación clásica en el más puro estilo europeo, va más lejos, considera que para llegar a ser alguien, incluso en materias científicas, hay que ser en primer lugar un hombre culto. Mark Kac, aunque sin considerar que para ello sea necesario el conocimiento del latín y griego, tiene la misma opinión.

Se puede establecer un nivel mínimo de conocimientos históricos sobre la propia disciplina pero sin caer en extremos, pues el exceso de preparación humanística podría impedir que se realizara el trabajo de investigación.

Citemos a Emilio Segré, físico de origen italiano que obtuvo el premio Nobel en 1959 por el descubrimiento del antiprotón:

> No debemos olvidar que muchos de los progresos científicos se han obtenido gracias a la contribución de un gran número de investigadores que prepararon el terreno y realizaron el desbroce necesario. Estas gentes son a menudo desconocidas u olvidadas en tanto que individuos, aunque han sido indispensables colectivamente. Por otra parte, los hechos científicos están relacionados entre ellos y se pueden solapar en el tiempo y en el espacio. [*Les physiciens modernes et leurs découvertes,* Fayard, París, 1984].

Igualmente Auguste Comte ha dicho que para comprender una ciencia era necesario conocer su historia. Citaré a Paul Langevin, aunque se podrían multiplicar citas similares:

> [...] para contribuir a la cultura general y extraer de la enseñanza de las ciencias todo cuanto puede aportar a la formación del espíritu, nada podría reemplazar a la historia de los esfuerzos anteriores, hecha viva por el contacto con la vida de grandes científicos y la lenta evolución de las ideas.
>
> Sólo así se puede preparar a los que continuarán la obra de la ciencia, transmitirles el sentido de su movimiento perpetuo y de su valor humano [...]
>
> [...] no hay nada como ir a las fuentes, ponerse en contacto tan frecuentemente como sea posible con quienes han hecho ciencia y han representado de la mejor manera su aspecto vivo [...]
>
> [...] Los ejemplos anteriores muestran que tanto desde el punto de la enseñanza como del de la investigación es indispensable no olvidar la historia de las ideas -y por tanto la de los hombres- ya que han sido quienes han aclarado las ideas. Nada mejor que leer las obras de los científicos de otros tiempos y vivir con nuestros contemporáneos para penetrar en el pensamiento de unos y otros.

¡Recuerdo muy bien que cuando estudiaba nadie me dijo jamás en qué siglo vivieron Euler o Cauchy! Creo que es una pena. No se pueden olvidar tampoco las ventajas de la interdisciplinariedad y por ello aconsejaría a los estudiantes de matemáticas que adquirieran algunas

nociones sobre historia de la física, que tan importante papel ha desempeñado en el desarrollo de las matemáticas y viceversa. Los matemáticos podrán leer, por ejemplo, el libro de Segré ya citado que describe de manera magistral esta historia desde 1895. Allí se verá cuál es el camino del pensamiento científico, cómo los resultados de unos se refieren a los de los otros, cómo una idea toma cuerpo poco a poco y cómo evoluciona hasta su forma final; cómo teorías inicialmente separadas, como la teoría cuántica y la relatividad, se reúnen y más tarde se complementan de manera armoniosa. Los físicos podrán acudir a la obra de S. Bochner, *The role of mathematics in the rise of science* [Princeton University Press, Princeton, 1981].

Para empezar a formarse en la investigación, y en las técnicas de expresión oral que le acompañan, los estudiantes deben, si ello es posible, seguir un seminario. Allí verán cómo estructurar una exposición y cómo utilizar correctamente un retroproyector. Aprenderán igualmente los últimos resultados obtenidos y serán testigos habituales de las discusiones que pueden mantener los investigadores más avanzados. Los seminarios son en general un acontecimiento mayor en la vida de un laboratorio, así como las tesis que se defienden en él y a las que los estudiantes de DEA es deseable que asistan.

Se constata a menudo un fuerte absentismo de los estudiantes de DEA al seminario, bien por pereza bien por falta de interés. Es cierto que un seminario es la mayor parte de las veces difícil de comprender para un estudiante de DEA. Sin embargo, es esencial para su formación. Como es imposible suministrar un tema de tesis a todos los estudiantes que deseen hacerla y que son aptos para investigar, se podrá, por ejemplo, no proponerla más que a aquellos que tengan alguna idea *a priori* de las cuestiones que pretenden estudiar. Como este género de ideas viene a menudo en el curso de un seminario, cuando uno se da cuenta de los problemas que quedan por tratar o cuando el mismo conferenciante presenta una lista de problemas abiertos, esta actitud animaría mucho a los estudiantes a asistir regularmente.

Cuando en un laboratorio varios investigadores trabajan en un mismo tema, se podrá organizar igualmente un grupo de trabajo. Las reuniones, para ser productivas, deberán ser mucho menos formales que las de un seminario, donde se presenta un trabajo terminado o casi terminado. Deben ser informativas, cada investigador expondrá en ellas el tema sobre el que trabaja, lo que ya se conoce e incluso lo que está haciendo, sobre todo si los resultados están todavía en curso de elaboración y si las ideas no son todavía muy precisas. La propia exposición ayudará a precisarlas. Si hay cohesión entre los miembros del grupo y confianza mutua, se desarrollará una gran discusión general en la que cada uno aportará su grano de arena. Ante todo no hay que tener miedo en este género de discusión a decir trivialidades, cosas falsas o a veces sin sentido. Es lo que los anglosajones llaman de manera muy imaginativa *brain storming* (tormenta de ideas). En ocasiones he visto salir de ellas ideas nuevas que terminaron más tarde en la redacción de un artículo en común. La ebullición de hombres e ideas es siempre interesante, evita la esclerosis. Emile Picard decía al respecto:

Es muy deseable que distintos investigadores, alumnos o colaboradores trabajen bajo su dirección y desarrollen sus propias ideas. Así, los temas de estudio son explorados en todos los sentidos y el esfuerzo de esos trabajadores pacientes aumenta considerablemente el rendimiento científico. [*Discours et mélanges,* Gauthier, París, 1922, pp. 145-146].

Por ello también es bueno viajar y recibir invitados extranjeros en un laboratorio.

Laurence Young, cuyos padres, Grace Emily Chisholm (1868-1944) y William Henry Young (1863-1942), eran matemáticos conocidos que recibían a numerosos colegas, entre los que se encontraban los más eminentes, escribe a este propósito en su libro *Mathematicians and their times*:

Los contactos con una generación anterior y más experimentada son de gran valor. El estímulo de partida y el aliento de las personas famosas más mayores puede ser bueno durante toda la vida para el trabajo de una generación más joven [...] Personalmente he obtenido ventajas inestimables de mis numerosos contactos con grandes hombres; y supongo que toda persona creativa debe sentir en todo momento que se sostiene en hombros de gigantes. [North-Holland, Amsterdam, 1981].

En una intervención televisada sobre teatro (5 de febrero 1985), Jack Lang dijo: *es preciso ser provocado por los pensamientos de los demás.* Esta frase puede aplicarse a toda actividad creadora y sin lugar a dudas a la investigación científica. A menudo se tiene la costumbre en las instancias de la administración de juzgar la calidad y la intensidad de una colaboración científica entre investigadores de diferentes laboratorios por el número de publicaciones firmadas en común. Ello puede ser cierto en alguna medida para las ciencias experimentales, pero es sin duda menos cierto -si no falso- para las matemáticas donde los investigadores publican poco en común (en física se ha visto un artículo cofirmado por 136 autores). De ninguna manera quiere esto decir que los contactos entre matemáticos no sean fructuosos. El método de trabajo es diferente. Más que trabajar verdaderamente en común, uno se sirve de ideas análogas a

las de otros. Se sube sobre los hombros de los demás para ver el paisaje y alcanzar lo alto del muro.

Citemos a Emile Boutroux:

Si una persona ha trabajado largo tiempo y de manera inteligente en una ciencia, ha adquirido no sólo conocimientos sino también una cierta disposición intelectual que no puede ser expresada por ninguna fórmula, pero no por ello deja de ser menos real y eficaz. Gracias a esta disposición, el científico progresa de manera segura y con paso firme en la ciencia. Ha asimilado el espíritu de la misma, de manera que se encuentra como en su casa.

Es una propiedad de la naturaleza humana que, cuando varias personas han tenido estrechas relaciones, no se comuniquen sólo desde afuera ciertos conocimientos o métodos determinados, sino que, por una especie de contagio interior, se influyen mutuamente sobre la mente y el alma.

Y esta influencia mutua de los espíritus es mucho más segura y eficaz cuando, al mismo tiempo que las inteligencias se comunican, los corazones están al unísono. ¿Quién sabe si esta condición no es indispensable? «Es imposible, escribía Jenofonte, aprender algo de un maestro al que no se le ama». [*La nature et l'esprit,* J. Vrin, París, 1926, pp. 146-147].

Es igualmente posible mostrar a los estudiantes cómo se investiga. Se pueden contar naturalmente las experiencias y el camino de las propias ideas hacia la solución de un problema que uno haya resuelto. Se puede también hacer investigación con ellos. Contaré a este respecto una experiencia personal.

En 1984, G. M. Phillips publicó [*American Mathematical Monthly, 91* (1984) 354-357] un artículo en el que utilizaba el procedimiento Δ^2 de Aitken iterado para acelerar la convergencia de la sucesión $x_{n+1}=1+1/x_n$ con $x_0=1$. La primera aplicación del procedimiento suministraba, a partir de un cierto rango, los términos de la sucesión inicial de dos en dos. La segunda aplicación los daba de cuatro a partir de un cierto rango y así sucesivamente.

Leí este artículo y me vino la idea de probar si la transformación de Shanks (método de aceleración de la convergencia generalizando el procedimiento Δ^2 de Aitken) poseía una propiedad similar. No volví a pensar en ello hasta el día en que recibí de *Mathematical Reviews* el artículo de Phillips para analizar, que coincidió con el de mi curso de DEA y para el que yo acababa de programar la transformación de Shanks en mi ordenador para mostrar una aplicación numérica a los estudiantes. Bajé, pues, con el ordenador y un monitor de vídeo, expliqué el artículo de Phillips, ya que aplicábamos la transformación de Shanks a su sucesión (x_n) y encontramos la propiedad buscada. Los resultados teóricos correspondientes quedaron demostrados la semana siguiente. Enseguida uno de mis alumnos extendió la demostración al conjunto de las fracciones continuas periódicas. Creo que esta experiencia fue beneficiosa para los estudiantes: les ha mostrado cómo se puede, en ciertas circunstancias, obtener resultados nuevos, utilizar el ordenador para ver si la intuición es buena y por último pasar a las demostraciones. Además me fue posible repetir esta experiencia los años siguientes sin que perdiera nada de su interés. Bastaba con no desvelar demasiado pronto el final de la historia.

Este ejemplo muestra igualmente que en algunas ocasiones cuando se lee un artículo que acaba de aparecer se puede saber, en ese mismo instante, que uno es capaz de ampliarlo, de extender los resultados porque se tiene conocimiento de algún algoritmo o teorema ignorado por su autor.

Otra manera de formarse en la investigación es leer algunos artículos publicados en revistas especializadas y directamente relacionados con los cursos seguidos. Así se iniciarán tanto en las técnicas de expresión escrita como en el inglés científico, indispensable actualmente. Por la fuerza de los hechos incluso los científicos franceses deben publicar en inglés si quieren ser leídos. Es algo que se puede deplorar, pero es un hecho cierto ante el que -pienso- no se puede hacer nada. En el siglo XVIII, el francés era el idioma del mundo culto; ahora, bajo la presión de numerosos descubrimientos efectuados principalmente en los Estados Unidos, el inglés se ha convertido en la lengua científica cuasi oficial. Cuando se visitan las bibliotecas en los Estados Unidos, raras son las que están suscritas a revistas publicadas enteramente en francés. Los europeos se han acostumbrado desde hace tiempo a aprender una lengua extranjera durante sus estudios secundarios. Ello tiene que ver con la estructura geográfica de Europa donde se cambia de lengua en cuanto uno se desplaza ciento cincuenta kilómetros. En América del Norte se pueden recorrer miles de kilómetros sin cambiar de idioma y raros son los norteamericanos que conocen una lengua extranjera. Si conocen alguna, la mayor parte de las veces es el español. No estamos ya desgraciadamente ni en el siglo XIX ni a comienzos del XX donde la ciencia se elaboraba principalmente en Europa y donde los anglosajones estaban obligados a hacer el esfuezo de comprender a un Poincaré, a un Einstein o a un Planck.

En mi opinión es preferible publicar en inglés y ser comprendido y apreciado, que escribir en francés y no ser siquiera leído. La defensa de la lengua francesa es un problema cultural importante, aunque en mi opinión debe principalmente efectuarse mediante materias no científicas

y, en primer lugar, por la literatura. Hay que señalar al respecto que, desde hace algún tiempo, se puede publicar en inglés en los *Compte Rendus de l'Académie des Sciences* de París.

Durante el DEA, los estudiantes han adquirido ciertos conocimientos, pero eso no significa que estén completamente preparados para hacer investigación. No son exactamente las mismas aptitudes las que están en juego. Se pueden tener muchos conocimientos y sin embargo ser incapaces de utilizarlos para producir resultados nuevos. Recíprocamente se pueden tener menos conocimientos (aunque es necesario tener al menos algunos) y poseer un gran espíritu creativo. Naturalmente lo mejor es tener ambas cosas. H. Pagels dijo:

> No sabríamos infravalorar el papel de la intuición e imaginación en las ciencias. Los estudiantes que superan brillantemente todos los exámenes no son necesariamente los investigadores más creativos. Cuando se efectúa un examen, hay que resolver un problema concreto. Sin embargo, en el mundo de la investigación teórica el verdadero problema consiste en descubrir cuál es el problema. Sólo entonces puede ser formulado de manera precisa y resuelto mediante técnicas matemáticas adecuadas. Plantear la pregunta idónea requiere una gran dosis de imaginación.
>
> A los teóricos no les faltan ideas, pero ¿a cuál deben dedicarse? Einstein dijo: «Si un investigador abordara su trabajo sin una idea preconcebida, sería incapaz de elegir entre la extraordinaria abundancia y la complejidad de los hechos experimentales, aquellos que son bastante simples y en los que se manifiestan las relaciones justificadas». La opinión preconcebida desempeña un papel primordial en el trabajo científico -es necesaria una cierta parcialidad para canalizar la imaginación hacia los hechos realmente importantes [...] Y el deseo, el instinto que impulsa a interesarse por verdaderos problemas, eso no se enseña [...] Las reglas de la creatividad científica no se han escrito nunca. Es imposible aprenderlas en un libro. El trabajo científico se transmite, más bien de generación en generación; es una especie de cadena carismática, que se transmite por medio de la enseñanza directa, no de forma libresca [*L'Univers quantique,* InterEditions, París, 1985, pp. 333-335].

Como escribió Hipócrates en *La Ley:*

> Sobre todo se necesitan disposiciones naturales. Todo es vano cuando se pretende forzar lo natural; pero cuando se le lleva por el buen camino, entonces se inicia la enseñanza del arte, y el alumno debe dedicarse a reflexionar [...] Debe consagrarse de lleno al trabajo durante mucho tiempo, con el fin de que la enseñanza, echando raíces profundas, aporte frutos felices y abundantes.

CAPITULO II

LOS INVESTIGADORES Y LA INVESTIGACION

Según Jean Dieudonné en matemáticas hay tres categorías de investigadores. En primer lugar los que:

> se limitan a sacar consecuencias fáciles de principios bien conocidos. Frecuentemente, la tesis de esos matemáticos no es ni siquiera publicada. Está inspirada por un «patrón» y refleja más las ideas de éste que las suyas. Así pues, una vez dedicados a ellos mismos, quizás publiquen de tarde en tarde algún artículo en relación directa con su tesis, después terminarán muy pronto toda producción original. Su importancia es sin embargo indudable [...] En un nivel más elevado se sitúa una categoría mucho menos numerosa [...] la de los matemáticos capaces de adelantar su trabajo de tesis, hasta de entrar en caminos totalmente distintos; permanecen con frecuencia activos en la investigación durante una treintena de años y publican varias decenas de memorias originales. Solo ellos pueden encargarse con éxito de las enseñanzas del tipo «tercer ciclo», donde se difunden las ideas nuevas y aconsejan eficazmente a los jóvenes matemáticos que se introducen en la investigación. Existen, finalmente, los grandes innovadores, cuyas ideas impactan en toda la ciencia de su tiempo y repercuten a veces durante más de un siglo. [*Pour l'honneur de l'esprit humain,* Hachette, París, 1987, pp. 23-24].

En la segunda categoría definida por Dieudonné existen, en mi opinión, dos clases de investigadores. Aquéllos muy útiles, que, sin manifestar un gran ingenio, hacen funcionar máquinas ya rodadas y resuelven problemas a veces importantes y difíciles. Después están los que, perteneciendo a la tercera categoría y sin ser grandes innovadores, aportan ideas nuevas y además posibilitan el que otros hagan funcionar la máquina y exploten las ideas más a fondo.

Como ejemplo de gran innovador podemos citar a H. Lebesgue. Dejemos hablar a Jean Leray:

Cuando a todos parecía que el decano Darboux había concluido la geometría diferencial, un joven alumno de la Ecole Normale, H. Lebesgue, sacó de su bolsillo un pañuelo arrugado y afirmó que ese pañuelo contradecía las más simples propiedades que la geometría diferencial atribuye a las superficies desarrollables sobre el plano: esas propiedades valen para los plastrones estirados, para superficies regulares y sólo para aquéllas; H. Lebesgue supo decirlo en términos matemáticos; después consiguió estudiar superficies y funciones totalmente irregulares; las grandes autoridades matemáticas de la época juzgaron vanos esos juegos del espíritu, murmuraron que ésas no eran «verdaderas» matemáticas, pero tuvieron la sabia indulgencia de publicarlas. H. Lebesgue, empleando esas funciones, dio a la teoría de la integración una agilidad y un dominio que fueron para los matemáticos y técnicos extraordinariamente cómodos; y las nociones introducidas por H. Lebesgue se convirtieron en las nuevas bases del análisis matemático. Este ejemplo no fue aislado: una falta de elegancia turbadora, una oscuridad en apariencia superficial no pueden ser en muchas ocasiones elucidadas si no es revisando nociones fundamentales. Tal revisión exige un duro y largo trabajo, cuya utilidad es demasiado remota e imprevisible como para motivarlo. [J. Leray, "L'invention en Matematiques", en *Logique et connaissance scientifique*, bajo la dirección de J. Piaget, Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard, París, 1969, p. 466].

La clasificación de Dieudonné contiene la que propone Mark Kac en su autobiografía:

En ciencias, al igual que en otros terrenos de la actividad humana, hay dos clases de genios: los ordinarios y los mágicos. Un genio ordinario es alguien al que usted y yo habríamos podido igualar si hubiéramos sido varias veces mejores. No hay ningún misterio sobre la manera de trabajar de su intelecto. Una vez comprendido lo que ha hecho, nosotros seríamos capaces de hacerlo. Es diferente con los mágicos. Están, utilizando la jerga matemática, en nuestro complementario ortogonal y la forma en que su espíritu trabaja es a todas luces incomprensible. Incluso después de haber comprendido lo que han hecho, el procedimiento por el que lo han realizado queda completamente oculto. Raras veces o nunca tienen alumnos porque no pueden tener émulos y debe ser terriblemente frustrante para un espíritu joven y brillante medirse con los caminos misteriosos por los que atraviesa el cerebro de un mago. [*Enigmas of chance,* University of California Press, Berkeley, 1987, p. XXV].

Freeman J. Dyson considera que hay dos tipos de investigadores: los creadores de ideas y los que resuelven problemas. Es lo mismo que dice M. Kac:

A grandes rasgos, hay dos clases de creatividad matemática. La primera, parecida a la conquista de un pico montañoso, consiste en resolver un problema que ha permanecido abierto durante mucho tiempo y que ha atraído la atención de numerosos matemáticos. La otra es la exploración de un nuevo territorio. [P. 39].

Volvemos a encontrar tales clasificaciones en la pluma de numerosos científicos.

Emile Borel [*Revue du Mois, 7* (enero 1909), 360-362] distingue entre los matemáticos conquistadores que llegan hasta extremos osados en las regiones inexploradas y los colonizadores que organizan las conquistas.

El matemático Georges Polya ha estudiado detenidamente el desarrollo de la imaginación e invención matemáticas, y ha escrito:

El genio, el experto y el debutante. El genio actúa según las reglas sin saber que éstas existen. El experto actúa según las reglas sin pensar en ellas, pero, si es necesario, puede decir cuál es la regla aplicable en el caso tratado. El debutante, al intentar actuar según las reglas, aprenderá el verdadero sentido de éstas a partir del éxito o del fracaso.

Naturalmente estas notas no son nuevas. San Agustín cuando hablaba de los oradores y de las reglas de la retórica, afirmaba: *Siguen las reglas porque son elocuentes, no son elocuentes porque sigan las reglas.* [G. Polya, *Mathematical discovery,* J. Wiley, Nueva York, 1965, tomo II, p. 97].

Elogiando a Fourier, François Arago decía: *Tal es el privilegio del genio que se da cuenta y encuentra relaciones allí donde ojos vulgares no ven más que hechos aislados.*

Cada tipo de investigador aporta su contribución a la obra común. Pierre Lecomte du Noüy dijo:

Es fácil comprender que para hacer avanzar la ciencia no se pueda contar eternamente con los escasos hombres geniales que la humanidad nos suministra lentamente. Por el contrario interesa suscitar simplemente la aparición de hombres dotados, inteligentes y trabajadores que situados en un medio adecuado produzcan cuando no descubrimientos sensacionales, sí al menos trabajos útiles. Un día, el gran hombre aparece y puede sacar partido de los documentos acumulados. El laboratorio de investigación persigue un doble fin: el descubrimiento de los hechos y el descubrimiento de los hombres. Estos últimos, hay que decirlo, son infinitamente más escasos que los primeros. ["Réflexions sur l'organisation du laboratoire de recherche", *Chimie et Industrie, 36* (2), agosto, 1936; cita de M. Lecomte du Noüy, *Lecomte du Noüy,* La Colombe, París, 1955, p. 136].

Al igual que existen diversos tipos de investigadores, también existen distintos métodos de trabajo para llegar al descubrimiento científico. Así se suele distinguir entre espíritus lógicos y espíritus intuitivos.

Alexis Carrel (1873-1944), que obtuvo en 1912 el premio Nobel de Medicina en reconocimiento a sus trabajos sobre la sutura de vasos y el trasplante de vasos y órganos, ha escrito:

Por sí sola la inteligencia no es capaz de engendrar ciencia, pero es un elemento indispensable para su creación. La ciencia fortifica la inteligencia de la cual ésta no es sino un aspecto. Ha aportado a la humanidad una nueva actitud intelectual, la certeza que da la experiencia y el razonamiento. Esta certeza es muy diferente a la de la fe. Esta última es más profunda. No puede debilitarse por medio de argumentos. Se aproxima un poco a la certeza de los clarividentes. Y, cosa rara, no es ajena a la construcción de la ciencia. Es cierto que los grandes descubrimientos científicos no son obra únicamente de la inteligencia. Los científicos de talento, además de poder observar y comprender, poseen otras cualidades: la intuición y la imaginación creadora. Por la intuición se apoderan de lo que está oculto a otros hombres, perciben relaciones entre fenómenos aparentemente aislados, adivinan la existencia del tesoro ignorado. Todos los grandes hombres están dotados de intuición. Saben sin razonamiento, sin análisis, lo que les interesa saber [...] Un gran hombre de ciencia se orienta espontáneamente en la dirección donde hay un descubrimiento por hacer. Este fenómeno en otro tiempo se conocía con el nombre de inspiración.

Entre los científicos encontramos dos clases de espíritus: lógicos e intuitivos. La ciencia debe su progreso tanto a unos como a otros. Las matemáticas, aunque de estructura puramente lógica, emplean no obstante la intuición. Entre los matemáticos, hay intuitivos y lógicos, analistas y geómetras. Hermite y Weierstrass eran intuitivos; Riemann y Bertrand, lógicos. Los descubrimientos de la intuición deben ser siempre utilizados por la lógica. En la vida ordinaria, al igual que en la ciencia, la intuición es un medio de conocimiento poderoso, pero peligroso. Es difícil a veces distinguirla de la ilusión. Quienes se dejan guiar únicamente por ella están expuestos a equivocarse. No siempre es fiable. Sólo los grandes hombres, o los sencillos de corazón puro, pueden ser impulsados por ella hasta las altas cimas de la vida mental y espiritual. [Alexis Carrel, *L'homme, cet inconnu*, Librairie Plon, París, 1935, pp. 142-144].

Cada investigador aporta su piedra a la construcción del edificio; así, como dijo Renan:

Ningún trabajador es inútil en la ciencia. [*L'avenir de la science,* 8ª edición, Calmann Lévy, París, 1894, p. 223].

Esas diferencias de temperamento entre los investigadores condicionan el estilo de los trabajos de cada uno.

Algunos de ellos sienten mayor atracción por temas experimentales y otros se interesan más por la teoría. Si una teoría es nueva, puede ser capaz de propiciar descubrimientos reales, basta en general comprenderla y utilizarla casi tan bien como lo hará un estudiante cuando unos años más tarde se haya convertido en clásica y sea enseñada a un nivel más elemental. Esto no quiere decir que la tesis sea más fácil de hacer pues al comienzo no es cómodo dominar ni siquiera los elementos de una teoría todavía fluctuante. Enseguida, tras un desarrollo tumultuoso en todas direcciones, puede plantearse la necesidad urgente de sistematización y conducir a tesis de esta naturaleza. Así es como se ha construido poco a poco la mecánica cuántica. J. B. J. Delambre escribió en 1810:

Cuando una ciencia comienza a desarrollarse, los espíritus, arrastrados de pronto por la rapidez con que se suceden resultados nuevos [...] temerían con razón pasar a examinar a fondo los principios, tiempo que puede ser empleado más útilmente en aumentar la masa de proposiciones; pero cuando la velocidad con que aparecen nuevos conocimientos se modera, la actividad del pensamiento al no tener objetos nuevos con los que nutrirse, mira hacia atrás para pasar revista, hasta en los más pequeños detalles, de todos los materiales que han servido para levantar el edificio. [*Rapport historique sur le progrès des sciencies mathématiques depuis 1789 et sur leur état actuel,* Imprimerie impériale, 1810; reimpresión, B. M. Israël, Amsterdam, 1966, pp. 98-99].

Para Poincaré existen varias categorías de matemáticos:

A algunos matemáticos sólo les gustan las grandes generalizaciones; ante un resultado nuevo sueñan inmediatamente con generalizarlo, buscan su relación con resultados próximos para construir la base de una pirámide más alta desde la que podrán ver más lejos. Otros aborrecen vistas tan amplias porque, si bien ofrecen un vasto paisaje, los horizontes lejanos siempre son algo vagos; prefieren concentrarse para ver mejor los detalles y llevarlos a la perfección; trabajan como el escultor, son más artistas que poetas (p.VIII) [...]

Los matemáticos se dividen entre dos tendencias opuestas.

Mientras que unos, preocupados por extender siempre más lejos las fronteras de la ciencia, se aventuran para ir hacia nuevas conquistas, dejando un problema que están seguros de poder resolver, otros se preocupan de encontrar la solución y no lo abandonan sin haber extraído todas las consecuencias. Los primeros se parecen a los viajeros que creen concocer un país por haberlo atravesado rápidamente, los otros prefieren recorrerlo paso a paso sin dejar ninguna parte sin explorar. [H. Poincaré, *Savants et écrivains,* Flammarion, París, 1910, p. 135].

Para S. Ulam también hay diferentes tipos de matemáticos: los que prefieren atacar problemas existentes y construir sobre lo existente y quienes prefieren imaginar nuevos esquemas y nuevas posibilidades. Ulam pertenecía a esta segunda categoría. Para Hilbert (que pertenecía al primer grupo y forjó su reputación resolviendo problemas que otros habían abandonado) un buen tema debe ser claro y fácil de comprender, difícil pero no inaccesible, e importante. En el desarrollo de una teoría matemática, Hilbert distinguía tres etapas: el estadio ingenuo, el estadio formal y el estadio crítico. Que se oriente hacia una u otra vía una buena formulación de un problema es ya la mitad de su solución.

Hay por tanto dos actitudes: la primera consiste en sacar de los teoremas y de los métodos existentes todo lo posible mientras que la segunda, que es evidentemente la más fructífera, es la de encontrar nuevos conceptos y métodos de los que se desprenderán resultados originales. Pero,

la verdadera creatividad es con frecuencia menos fácilmente reconocida que la utilización hábil de una técnica. [L. Young, ob. cit., p. 260].

Una opinión muy similar tiene Emile Picard:

Se han distinguido dos tipos de espíritus matemáticos distintos. Unos se preocupan sobre todo por ampliar el campo de nociones conocidas, sin preocuparse por las dificultades que dejan tras ellos; buscan nuevos temas de estudio. Otros prefieren quedarse, para profundizar en el terreno de las nociones mejor elaboradas, quieren agotar las consecuencias y se esfuerzan por poner en cuestión en cada tema los elementos en los que se basa.

En ocasiones les basta a los primeros con estar seguros de que un problema puede ser resuelto, y dejan a otros la resolución del mismo. Se diría, aplicando una expresión de Fontenelle sobre Leibniz, que se contentan con ver crecer en los jardines ajenos las plantas que ellos han sembrado, como si el arte de descubrir fuera más precioso que la mayoría de las cosas que se descubren. Los segundos se interesan menos por las generalidades y piensan que sólo tienen recompensa las soluciones llevadas hasta sus últimas consecuencias.

No se puede establecer ninguna jerarquía, el espíritu sopla por donde quiere. [*Notice sur Gaston Darboux,* Académie des Sciences, 10 de diciembre de 1917].

Richard Dedekind ha escrito:

Los mayores y más fructíferos progresos en matemáticas y en otras ciencias han sido el resultado de la creación y de la introducción de conceptos nuevos,

después de que el retorno frecuente de complejos fenómenos que explicaban mal las antiguas ideas haya presionado al sabio. [*Was sind und was sollen die Zahlen,* 1887, Werke, Tomo III, p. 335. Traduccion al francés de Jean Cavaillès].

Citemos finalmente a I. Ekeland:

En la investigación científica como en otras actividades, son numerosos los técnicos, pero escasos los creadores, los verdaderamente capaces de innovar, de salir de senderos ya pisados. Es demasiado fácil y tentador juzgar un problema interesante porque las tres cuartas partes de los colegas trabajen sobre él. Mientras que los problemas verdaderamente profundos y difíciles, con pocas probabilidades de éxito inmediato, no atraen a los profesionales de la publicación. Poincaré distinguía los problemas que se plantean de los problemas que uno se plantea. [*Le calcul, l'imprévu,* Editions du Seuil, París, 1984, p. 39].

No hay que creer que las bellas clasificaciones sólo son válidas para las matemáticas. En las ciencias experimentales, se ha dividido a menudo a los investigadores en dos categorías según las cuales se les podría llamar los experimentadores y los teóricos, o siguiendo a W.D. Bancroft, los acumuladores y los adivinadores, entendiendo que la palabra adivinador no designa a alguien que obtiene un resultado por pura casualidad, como arrojando un dado, sino alguien que está en principio guiado por una hipótesis de trabajo o una teoría, que intenta establecer o invalidar. El experimentador acumula los datos hasta el punto en que la teoría subyacente llega a ser evidente, mientras que el teórico emite una hipótesis y después acumula las experiencias para comprobarlas. Hay naturalmente un vaivén constante entre teoría y experiencia como lo ha mostrado Ampère en la introducción de sus *Mémoires sur la théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques, uniquement déduite de l'expérience:*

Observar primero los hechos, variar las circunstancias tanto como sea posible, acompañar ese primer trabajo con medidas precisas para deducir leyes generales, basadas únicamente en la experiencia y deducir de esas leyes, independientemente de toda hipótesis sobre la naturaleza de las fuerzas que producen los fenómenos, el valor matemático de esas fuerzas, es decir la fórmula que las representa, éste es la camino que ha seguido Newton [...] y ha servido de guía en todas mis investigaciones sobre los fenómenos electrodinámicos.

Pero, como dice R. Pictet en *La physique expérimentale,* Ampère no parece haber seguido sus propios preceptos:

Ampère ha encontrado la fórmula fundamental de la electrodinámica por una especie de adivinación: las experiencias que invoca han sido imaginadas después. Había afirmado *a priori* la identidad de los solenoides y de los imanes. Después de haber desarrollado su idea en una conferencia, intenta probarla experimentalmente, pero la experiencia falla. Al salir de la conferencia, su asistente, D. Colladon, tiene la idea de examinar los solenoides, encuentra defectuoso su modo de suspensión y consigue corregirlo. A las once de la noche, verifica la ley, y va a despertar a Ampère el cual muestra, ante el mismo auditorio, reunido precipitadamente en el Colegio de Francia, la prueba experimental de su intuición. Al salir de la sesión, Laplace detiene a Colladon y le dice: *Joven, ¿no ha sido usted quien le ha dado el retoque final?*

Incluso entre los grandes científicos, hay diferencias de comportamiento, de estilo. Algunos permanecen solitarios, como Einstein, raras veces se rodean de asistentes, nunca de un verdadero equipo. Otros fundan un laboratorio, una escuela. Esto es lo que André Lwoff y Agnés Ullmann dicen de Jacques Monod:

En ocasiones la carrera de un sabio está marcada por un descubrimiento importante. Y si es muy raro que esté jalonada por una serie ininterrumpida de grandes descubrimientos, todavía es más raro que cada descubrimiento dé nacimiento a nuevos conceptos y abra nuevas perspectivas.

Ocurre que un científico influye en sus contemporáneos por sus trabajos o su personalidad, pero es excepcional que cree una escuela. El fundador de una escuela debe dominar una disciplina. Debe poseer bastante intuición para prever la dirección que tomará la investigación para alcanzar su meta. Debe ser capaz de juzgar las potencialidades de jóvenes científicos, de entender los diversos aspectos de su personalidad con el fin de asignar a cada uno tarea en consonancia con sus gustos y su talento. Debe proponer problemas que puedan tener solución o bien estar orientados en una dirección productiva. Debe ser amable con sus alumnos y colaboradores y mostrarse generoso. Jacques Monod poseía todas esas cualidades y fue, en consecuencia, no sólo un sabio eminente sino también el fundador de una escuela célebre. [A. Lwoff, A. Ullmann (eds.), *Les origines de la biologie moléculaire,* Etudes Vivantes, París, 1980].

Se le puede considerar, en efecto, como el creador de la biología molecular. Pertenecía a la escuela de Pasteur, su maestro. Esta aventura científica ha sido descrita magistralmente por sus participantes en la obra colectiva en homenaje a Jacques Monod anteriormente citada. Aunque el profano no comprenda algunos pasos, siente pasar la inspiración de la creación científica, el entusiasmo y la excitación de la investigación, ve

la vida de un laboratorio con sus amistades y sus fricciones. Es una lectura totalmente apasionante.

Pienso que las diferencias de comportamiento entre grandes científicos (por ejemplo, Einstein y Monod) radican no sólo en la personalidad de cada uno sino también en el ámbito científico en el que trabajan. En matemáticas y en física teórica, donde las experiencias están ausentes o son escasas, el investigador puede estar solo. Pero en las ciencias de la naturaleza que exigen numerosas y variadas experiencias o un gran conjunto de aparatos (como en la física de las altas energías) no es posible trabajar solo, aislado. Es en otros terrenos donde puede trabajar un equipo limitado.

Esas diferencias entre las personalidades de los sabios hacen que cada trabajo sea personal y que lleve el sello de su creador. Lo ha explicado muy bien François Jacob quien ha incidido varias veces sobre esta cuestión. Ha dicho, por ejemplo:

Hay un estilo científico. Me parece que desempeña un papel tan importante como en el arte. Cuando se comparan arte y ciencia, es a menudo para subrayar diferencias evidentes. Se habla de uno desde un punto de vista materialista y de la otra bajo la óptica idealista. Lo que permite oponer la naturaleza misma de los procesos que son considerados como funcionales aquí o allí. La ciencia es considerada como la que describe el mundo exterior donde objetos y acontecimientos se supone que tienen una existencia independiente del espíritu humano. Los objetos y leyes que las rigen están ahí. El científico se limita a ponerlos en evidencia, a recogerlos como las manzanas de un árbol, a descubrirlos como una estatua el día de su inauguración. El artista, en cambio, está destinado a describir un mundo interior donde objetos y acontecimientos no son reales pero aparecen como construcciones del espíritu humano. El papel del artista es, pues, crear objetos nuevos, como si cortara vestidos a su medida en una tela. *En busca del tiempo perdido* es por tanto una creación. La estructura del ADN, un descubrimiento. Es ésta una diferencia que se desea subrayar en el papel del individuo. El autor de una obra es único, irreemplazable. El de un descubrimiento, intercambiable. Sin Flaubert no existiría *Madame Bovary.* Sin Mozart tampoco *La Flauta Mágica.* Por el contrario, si un descubrimiento no hubiera sido hecho por el profesor A, lo hubiera sido por el doctor B. Hasta por C o incluso por D. Sin Newton, se habría hallado algún otro físico que descubriera la gravitación. Sin Darwin, estaría Wallace para proponer la teoría de la evolución. Pero las cosas no son tan simples [...]

En ciencia hay un estilo, una manera de obrar con respecto a la naturaleza y de hablar de ella. De elaborar experiencias, de realizarlas, de sacar conclusiones, de formular teorías. De traducirlas para obtener una historia que contar o que escribir. De convencer a sus colegas de la solidez de los resultados o de la novedad de una teoría. De buscar las posibles aplicaciones. De ponerlas en práctica o por el contrario de desinteresarse de ellas. En resumen, hay una forma personal de tratar la ciencia y de hablar de ella. Sin Einstein o sin Darwin existiría algo refiriéndose a la teoría de la relatividad o a la de la evolución. Pero no serían las mismas teorías. No habrían sido escritas del mismo modo, ni presentadas de igual forma ni con el mismo rigor, ni con la misma fuerza de persuasión. No tendrían la misma influencia, ni las mismas consecuencias. En ciencia cada obra también es única. Como en arte, volviendo a la fórmula de George Orwell, entre todas esas obras únicas, algunas son todavía más únicas. [François Jacob, *Centenaire de l'Institut Pasteur,* Académie des Sciences, 12 de octubre de 1987].

François Jacob volvió sobre ese tema en *La statue intérieure*:

Hay un estilo en ciencia, así como en arte, literatura o pintura. No sólo una forma de mirar el mundo sino también de interrogarlo. Una forma de obrar con respecto a la naturaleza y de hablar de ella. De concretar experiencias, de realizarlas, de sacar conclusiones, de formular teorías [...] De ponerlas en orden para obtener una historia que contar o que escribir. Hay una variedad infinita de estilos. Estilo directo o alambicado. Estilo conciso o en facetas. Estilo de destajista o de húsar. De águila o de topo. De visionario o de prosélito. De gran señor o de ganapán. De paranoico o de melancólico. [Ediciones Odile Jacob, París, 1987, p. 323].

Cualquiera que sea la actitud y el estilo del investigador, su cualidad principal deberá ser la apertura de espíritu. El astrónomo inglés John Herschel (1792-1871) escribió:

La primera norma del que empieza a estudiar una ciencia debe ser preparar su espíritu para recibir la verdad y abandonar todas las nociones imperfectas y adoptadas precipitadamente, relativas a los objetos de los cuales va a emprender el examen, nociones que no tenderían más que a entorpecer o perturbar su marcha. Debe realizar también una especie de esfuerzo para decidirse por adoptar, a pesar de los prejuicios contrarios, conclusiones que se le manifiestan basadas en una observación exacta y en una deducción lógica, aun cuando fuera a derribar todas las nociones que tenía anteriormente o que había admitido sin examen, basadas en otras. Un esfuerzo tal debe ser mirado como el comienzo de esta disciplina intelectual que supone uno de los fines más importantes de toda ciencia. [Citado en F. Prevet, *Morale et métier, la recherche scientifique,* Sirey, París, p. 297].

CAPITULO III

EL COMIENZO DEL TRABAJO

Tras el DEA los estudiantes desarrollan un trabajo de investigación para la elaboración de una tesis; que sea una tesis de tercer ciclo de tipo antiguo o la nueva tesis no cambia absolutamente nada el fondo del problema ni los métodos de trabajo. La investigación puede hacerse en un laboratorio universitario o industrial.

La tesis es un trabajo personal que debe aportar resultados nuevos al tema tratado. Se pueden concebir diferentes tipos de tesis según el fin que se persiga. Puede ser bien la obtención de resultados téoricos hasta ahora ignorados, bien resultados experimentales nuevos en las ciencias que se prestan a este tipo de trabajo, bien una síntesis que reúna ideas dispersas de diferentes autores y que se presentan en un contexto y con un lenguaje unificados, bien la realización de un programa numérico en ordenador extraído de experiencias numéricas para verificar una teoría física o comprobar la validez del método considerado, o bien la aplicación de métodos numéricos a la resolución de un problema práctico con discusión de la elección del método, análisis de un error y de los errores debidos al ordenador. El tema puede ser aplicado o teórico según que el estudiante se oriente a una carrera industrial o universitaria.

Antes, la elección de un tema de tesis de tercer ciclo era responsabilidad del director de investigación mientras que el de una tesis de estado incumbía más al candidato. De todas maneras, pienso que la elección debe efectuarse como consecuencia de una discusión profunda entre el investigador y su director de tesis. En efecto sólo se hará buena investigación en la medida en que guste el tema, que debe convertirse en el objeto, la propiedad del investigador. Es difícil pensar que pueda imponerse un tema de investigación a alguien.

Paul Lévy ha dicho: *No se realiza un buen trabajo intentando forzar la mente.*

El espíritu necesario para investigar es diferente del que se necesita para estudiar, por muy brillante que sea. Algunas personas, en efecto, poseen conocimientos enciclopédicos pero son incapaces de investigar porque no saben utilizarlos para sacar algo nuevo de ellos. Otras personas que poseen menos conocimientos pueden, por el contrario, tener numerosas ideas interesantes y fructíferas. A buen seguro, para hacer investigación en buenas condiciones, y con cierto éxito, es preciso poseer un mínimo de conocimientos para no atascarse continuamente por dificultades técnicas. No es, sin embargo, una meta insuperable como lo muestra el ejemplo de Einstein que tenía a menudo necesidad de que se le aportara una ayuda en el terreno matemático o como Hilbert que contaba con asistentes físicos para traducir los problemas de física al lenguaje de las matemáticas.

La ventaja de un buen investigador es, principalmente, tener un espíritu creativo y tener intuición de los resultados a demostrar para convertirse así en un encontrador y no quedarse perpetuamente en buscador. Este verdadero espíritu innovador es difícil de detectar en los estudiantes en el transcurso de los estudios y cuando nos decidimos a elegir alguno para una tesis ocurre a menudo que nos equivocamos sobre sus capacidades para la investigación. Alguno que habría aprobado brillantemente sus exámenes no era más que un mediocre investigador, mientras que su compañero, menos sobresaliente en sus resultados académicos por tener menos conocimientos, era un excelente investigador. Tales ejemplos son corrientes.

No pienso que sea posible desarrollar las facultades creadoras de un individuo. También es muy difícil juzgarlas *a priori*, antes de haber visto al individuo en el trabajo, enfrentándose a un problema científico. Según Florence Vidal [*L'instant créatif,* Flammarion, París, 1984, p. 253], los estudiantes americanos se entregan a menudo a los juegos de Eleusis. Dos personas convienen entre ellas una cierta regla para jugar a las cartas. Juegan, según esta regla, ante espectadores que deben adivinarla. Pienso que este juego es como los tests que se hacen pasar a los que buscan empleo: no prueban más que la aptitud para pasar este género de tests.

La creatividad es una facultad innata lo mismo que el talento de un cantante, de un músico, de un escritor, de un pintor, de un artista. No se aprende, no se puede explicar, solamente se puede cultivar. El punto sobre esta cuestión primordial lo ha puesto A. L. Orborn en *Créativité, l'imagination constructive* [Dunod, París, 1988] donde están descritas un cierto número de técnicas para mejorar su creatividad.

El papel del director de investigación en el momento crucial de la elección de un tema es más un papel de árbitro que de estricto dirigismo. Con una experiencia y una cultura científica mayor está en condiciones de juzgar *a priori* si una cuestión puede constituir un buen tema de investigación. Este es un papel capital pues debe impedir al investigador

comprometerse en temas sin porvenir. Todas las opiniones concuerdan en este punto. Según Alain: *La verdadera dificultad está en saber qué es lo que se quiere probar.* Herman Hollerith, uno de los pioneros de la informática, dijo casi lo mismo:

> Lo más difícil en materia de invención es imaginar lo que está por inventar. [Citado por R. Ligonnière, p. 130].

Igualmente un astrónomo, G. Greenstein, escribió:

> No sólo se trata de resolver ecuaciones o de hacer experiencias. Ni de encontrar respuestas a preguntas. Se trata más bien de plantear las buenas preguntas, de distinguir los factores importantes de los que no lo son. [P. 108].

El biólogo François Jacob volvió varias veces sobre ese problema:

> El gran hombre en ciencia, es en primer lugar el que sabe discernir los buenos problemas en el momento adecuado, cuando hay una posibilidad de aportarle alguna solución. Es también el que se sabe rodear de buenos colaboradores, encontrar entre sus alumnos los elementos capaces de transformarse en sus sucesores y de desarrollar las teorías que ha emitido, las disciplinas que ha constituido. [*La statue intérieure,* p. 270].

El director de la investigación, el *patrón,* debe asimismo saber si el tema ha sido ya tratado y cuáles son los resultados ya obtenidos aunque actualmente sea cada vez más difícil, debido a la enorme inflación de publicaciones científicas. En 1970, S. Ulam estimaba en doscientos mil el número de teoremas nuevos demostrados cada año en matemáticas ¡y la producción se dobla cada diez años! La experiencia del director de investigación evitará igualmente al candidato llegar a un callejón sin salida. Deberá también indicarle las referencias a estudiar antes de comenzar realmente su propia investigación.

Dejemos hablar a Claude Bernard:

> Creo que el papel del profesor en la enseñanza científica es mostrar experimentalmente al estudiante el objetivo que el científico se propone y el de indicarle todos los medios que puede tener a su disposición para alcanzarlo. El profesor debe dejar enseguida al alumno libre para que se mueva a su manera, siguiendo su naturaleza para llegar a la meta que le ha mostrado, salvo para ir en su ayuda si ve que se pierde. Creo, en fin, que el verdadero método científico es el que contiene el espíritu, sin agobiarlo, el que deja en la medida de lo posible al espíritu solo, frente a sí mismo, y le dirige siempre respetando sus más preciosas cualidades, como son la originalidad creativa y

su espontaneidad científica. En efecto, las ciencias sólo avanzan con ideas nuevas y gracias a la potencia creativa u original del pensamiento. Por lo tanto hay que tener cuidado durante la formación científica que los conocimientos que debe adquirir la inteligencia no la aplasten por su propio peso, y que las reglas destinadas a sostener los puntos débiles del espíritu no atrofien ni asfixien las facetas potentes y fecundas. ["Du progrès dans les sciences physiologiques", en *La Science expérimentale,* J. B. Baillière, (ed.)].

Quienes nunca han hecho investigación piensan que antes de comenzar a trabajar sobre un tema es absolutamente necesario haber leído todo sobre el mismo, que es preciso saber todo sobre él. Naturalmente hace falta saber un mínimo de cosas aunque no sea más que para no tratar una cuestión ya resuelta, pero esto es competencia del director de tesis quien, por tener una cultura más vasta que la del investigador debutante, deberá orientarlo hacia un tema nuevo donde tendrá oportunidades de obtener resultados originales e interesantes.

Para realizar un trabajo creativo es preciso dar pruebas de originalidad, hay que tener un pensamiento independiente, libre de prejuicios y de toma de posiciones preestablecidas. Pienso, y es una opinión comúnmente admitida, que demasiadas lecturas orientan inconscientemente las ideas. Quizás sea preferible ser menos erudito y conservar un espíritu libre. G. Lichtenberg, físico alemán del siglo XVIII, decía que las gentes atiborradas de lecturas raramente hacían grandes descubrimientos. W. R. Hamilton, creador de los cuaternios, tenía la costumbre de, antes de abordar la solución de un problema, leer con cuidado todas las referencias de las que pudiera disponer, y copiar largos extractos de ellas. Al final, era aplastado por la masa de documentos y no le quedaba ni tiempo ni coraje para un trabajo personal. Uno de sus biógrafos ha dicho que con menos lecturas su obra habría sido más importante.

En su autobiografía P. Lévy escribe:

> Estoy demasiado polarizado hacia los problemas en los que trabajo como para estar abierto a las ideas de los demás; leo muy poco y me puede llegar a suceder que subestime el interés de un trabajo si no está relacionado con algún tema que me haya interesado alguna vez. [*Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien,* Librairie Scientifique et Technique, A. Blanchard, París, 1970, p. 57].

Igualmente Chebyshev,

> no prestaba importancia a la lectura de la literatura matemática del momento, afirmando que el exceso de celo en estudiar los trabajos de los demás perjudicaba la originalidad de sus propios trabajos [C.A. Possé, «Nota biográfica», *Obras de Chebyshev,* Tomo II, Chelsea, Nueva York].

Para Pierre Lecomte du Noüy, acumulación de conocimientos e imaginación son, en cierta medida, contradictorios [*L'homme devant la Science,* Flammarion, París, 1939, p. 80].

Para limitar las influencias externas que podrían orientar el espíritu del joven investigador, algunos directores incluso han prohibido toda lectura antes de que éste se haya formado una opinión personal sobre el tema, pues, como dice A. Clarck, científico inglés contemporáneo y autor de ciencia ficción: *las ruedas de la imaginación se hunden en la arena de un conocimiento excesivo.*

Esta idea es comunmente admitida y expresada por la pluma de numerosos autores. Ya en el siglo XVI Rético decía: *Quien quiera comprender, que sea libre de espíritu.* Igualmente Einstein escribió *la imaginación es más importante que el conocimiento.* A continuación otras dos citas que desarrollan ese punto de vista:

> Las memorias demasiado desarrolladas y precisas pueden perjudicar la función creadora del espíritu. Lo suman bajo la rutina de los recuerdos demasiado indeformables. [Rey, "L'invention artistique, scientifique, pratique", en *Traité de Psychologie* de Dumas, Alcan, París, 1924, Tomo II, p. 440].

> La erudición perjudica su pensamiento (la del verdadero científico), dirigiéndola por caminos ya seguidos y de los cuales no sabrá evadirse. Autor o lector, hay que elegir. [A. Denjoy, *Hommes, formes et le nombre,* Librairie Scientifique A. Blanchard, París, 1964, p. 17].

Algunos investigadores -autoridades en un tema- son llevados a escribir artículos de revisión *(review)* que muestran la situación del tema en un momento dado. Este tipo de artículos es de gran interés para quienes quieren informarse lo más completamente posible sobre el tema elegido de investigación. Esto les evitará una pérdida de tiempo importante para saber exactamente lo que ya es conocido y cuáles son los resultados interesantes que quedan por encontrar. Naturalmente cada autor tiene un punto de vista particular del tema en el que trabaja. Este punto de vista se ha forjado, evidentemente, poco a poco, a partir de sus propios resultados, introduciendo así un cierto sesgo en los artículos de revisión. Sin embargo, los autores de estos artículos son en general investigadores con una cierta madurez científica y aunque Alexis Carrel (1873-1944) haya dicho que *el prestigio de un especialista le hace más peligroso,* el riesgo de leer un artículo excesivamente orientado es escaso y el inconveniente es, con mucho, inferior al beneficio que se extraerá de su lectura. Este tipo de artículos contiene a veces cierto número de problemas abiertos que pueden servir de punto de partida para el trabajo de jóvenes investigadores.

Como he dicho antes, una tesis es un trabajo personal y el joven investigador debe poco a poco aprender a trabajar solo y a asumir las decisiones que toma. Si continúa en la vía de la investigación, sea universitaria o industrial, tarde o temprano tendrá que dirigir otros trabajos y deberá asumir sus responsabilidades. Sin embargo, es evidente que, al comienzo de todo trabajo de investigación, el papel del director es guiar al estudiante, especialmente en la elección de las cuestiones a plantearse. El papel del director de investigación no es en modo alguno hacer las demostraciones en lugar del candidato y normalmente no debería hacer más que corregir los posibles errores. Es preciso que el estudiante comprenda bien que no debe tener ya la actitud, que todo el mundo ha tenido, que consiste en escribir cualquier cosa en un problema de examen cuando no se sabe qué responder a la pregunta planteada esperando conseguir por lo menos algún punto. El estudiante no debe escribir más que aquello de lo que esté absolutamente seguro. Cuando tenga dudas sobre una idea o sobre una demostración deberá discutirla con su director de investigación .

No es preciso querer ir demasiado deprisa y hay que poner mucha atención en lo que se escribe. Esta actitud minimizará la aparición de fallos en las demostraciones pero permitirá también, espero, eliminar los resultados correctos pero sin interés, o sea, vanos. He visto recientemente, por ejemplo, a un estudiante demostrar un teorema del estilo: Si $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$, y si (otras condiciones) entonces $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. ¡Es preciso leer y reflexionar sobre lo que se escribe!

Veremos más tarde que el error puede ser beneficioso en algunos casos. Todos los matemáticos, incluso los más famosos, los han cometido. Las únicas personas que no cometen errores son las que no publican nunca. A propósito de esto L. Young nos cuenta:

> Wiener fue un pionero dentro de numerosos temas que ha transformado completamente [...] Sin embargo los detalles de sus trabajos eran invariablemente de lo más inexacto y en él se justificaba más que en ninguna otra persona que yo conozca la afirmación de Besicovitch: *la fama de los matemáticos descansa sobre un cierto número de demostraciones falsas* [...] Como ejemplo de las inexactitudes de Wiener uno de los teoremas principales de su libro sobre la integral de Fourier depende de una serie de lemas, entre los cuales hay uno cuya demostración supone el teorema principal. [Ob. cit., p. 326].

Igualmente hay que preguntarse si lo que se hace, si los resultados que se han obtenido, son verdaderamente interesantes, si tienen algún alcance, si pueden ser útiles, si pueden servir para algo. Si se demuestra un teorema con condiciones demasiado complicadas y difíciles de verificar en la práctica es preciso dar casos particulares donde se satisfaga con objeto de mostrar el interés de lo que se ha obtenido. Citemos a propósito a Greenstein:

> Es éste un aspecto del problema, con el que cada científico se ha enfrentado en su vida y no sólo una vez: ¿la investigación a la que se entrega le aporta alguna contribución? [...] La decisión de empezar una investigación equivale, muchas veces, a hacer una apuesta. Numerosos proyectos simplemente fracasan y son abandonados, al atascarse en alguna dificultad demasiado difícil de superar. Son numerosos también los que se llevan a cabo al descubrir que merece la pena que el resultado sea conocido. Lo peor es que pasen años y que, por casualidad o por desgracia, no se plantee la pregunta clave que abra el camino a un descubrimiento importante. La investigación es frecuentemente una cuestión de casualidad y hay muchos científicos cualificados que no han tenido nunca la suerte de cruzarse con un hada buena para fundar su reputación. Recíprocamente, un buen número de premios Nobel se han visto recompensados por haber tenido suerte [...] [G. Greenstein, *Le destin des étoiles,* Seuil, París, 1987, pp. 253-254].

En resumen, el papel del director de investigación es el de guía para evitar al estudiante que se adentre en caminos sin salida y, al menos al principio, darle ideas. Pero no es su trabajo sustituir al estudiante y hacer las demostraciones en su lugar. Si tal fuera el caso, lo que es posible puesto que existen diferentes maneras de dirigir investigaciones y diferentes estilos de directores, esto debería conducir, en mi opinión, a una publicación redactada y firmada en común, si los resultados obtenidos lo justifican.

De nuevo opiniones de las más diversas procedencias concuerdan sobre ese papel del *patrón.* He aquí algunas:

> Para enseñar a los alumnos a inventar es bueno darles la opinión de lo que hubieran podido descubrir [...]. [G. Bachelard, *La formation...,* p. 247].

> Lo esencial es lo que no se encuentra en los libros sino lo que se descubre junto a un maestro, la justa proporción de las cosas, la opinión de lo que se puede creer y de aquello de lo que hay que dudar, de lo que es sólido y de los andamiajes frágiles, de lo que es importante y de lo que es solamente accesorio. [L. Leprince-Ringuet, *Des atomes et des hommes,* Fayard, París, 1957, p. 61].

El maestro que quiero ser para mis alumnos y que yo he tenido de modelo, es el que, habiéndose hecho una idea clara del mecanismo que debe desarrollar, tiene presente todavía el camino que ha recorrido él mismo para llegar allí, que, colocándose en el lugar en el que ha encontrado al alumno, que no deja de ser el mismo que en el que él se encontraba antes, vuelve a comenzar con él el viaje por el mismo camino que ha seguido y le enseña, salvando los obstáculos que ha vencido, los falsos caminos y los escollos que él mismo ha sufrido o evitado. [Le Cat, *Suite du prémier discours préliminaire de la physique du corps humain,* 1744-1749, p. 2].

He citado ejemplos de investigación pero me guardaré de dar explicaciones superfluas o de trazar una regla única y absoluta, pues creo que el papel del profesor se limita a mostrar experimentalmente al estudiante el objetivo que el científico se propone y el de indicarle todos los medios que puede tener a su disposición para alcanzarlo. El profesor debe dejar enseguida al alumno libre para que se mueva a su aire, siguiendo su naturaleza para llegar a la meta que le ha mostrado, salvo para ir en su ayuda si ve que se pierde. Creo, en fin, que el verdadero método científico es el que contiene el espíritu, sin agobiarlo, el que deja en la medida de lo posible al espíritu solo frente a sí mismo, y lo dirige respetando siempre sus más preciosas cualidades, como son la originalidad creativa y su espontaneidad científica. En efecto, las ciencias sólo avanzan con ideas nuevas y gracias a la potencia creativa u original del pensamiento. Por lo tanto durante la formación científica hay que tener cuidado que los conocimientos que deba adquirir la inteligencia no la aplasten por su propio peso, y que las reglas destinadas a sostener los puntos débiles del espíritu no atrofien o no asfixien las facetas potentes y fecundas. [Cl. Bernard, *Introduction...*, pp. 311-312].

Un director de investigación debe, si vale realmente la pena, animar a los investigadores que dirige. Según R. Courant, a Hilbert le gustaba que los jóvenes estuvieran llenos de esperanza. Si alguien se revela incapaz de investigar, en ese caso no hay que ser duro y humillante con él, pero es preciso hacerle comprender que la investigación no es quizás su camino y reorientarlo hacia una carrera más técnica y menos fundamental.

Citemos lo que escribió el matemático francés Jules Tannery [Nantes, 24 de marzo 1848; París, 11 de noviembre 1910] en su libro *Science et Philosophie* que recopila diversos artículos aparecidos separadamente:

[Quienes dirigen un centro de investigación, y son dignos de ello] continúan estando al día de la parte de la ciencia que cultivan, en la medida en que les es posible: a este precio conocen los problemas que se plantean y los métodos con que podrán resolverlos, al menos parcialmente. El poseer amplios y variados conocimientos les hace capaces de caer en la cuenta de aquellos enfoques de los que se dice que surgen los descubrimientos esenciales, pero evitarán, con toda razón, que los jóvenes colaboradores busquen una erudición

imposible. Saben muy bien por experiencia propia, que no se puede haber leído ni seguir leyéndolo todo, y que muchas de sus lecturas son inútiles. Por supueso, por su propio trabajo es el descubrimiento lo que les atrae: lo que es conocido, en tanto que conocido, pierde gran parte de su interés; están concentrados sobre lo que se sabrá mañana y hacia esta ciencia del mañana orientan a quienes les piden consejos. Les indican los temas de investigación; a unos a los que hay que agudizar primero su habilidad técnica, problemas concretos que deberán ser resueltos mediante métodos de probada efectividad; a otros les propondrán cuestiones poco definidas, donde lo que hay que investigar se determinará por el propio estudio, quizás tras muchos esfuerzos que parecían inútiles. A veces dejarán a sus alumnos libres, otras les indicarán la razón del fracaso que podría llevar a la desmoralización y, en una palabra, les colocarán en el buen camino.

Buscan desarrollar la iniciativa de todos y a veces exageran el mérito de las iniciativas que ellos han hecho nacer. Algunos de sus alumnos son agradecidos y no olvidarán lo que deben a una conversación con su maestro, a una palabra, a una sugerencia; estos mismos quizás se den cuenta de lo que les falta en las investigaciones que han emprendido o que les atraen, de los conocimientos teóricos que necesitan adquirir y que adquieren poco a poco, de modo que uno llama a otro, conocimientos que se acumulan en su mente y que acabarán ordenándose. Conversan entre ellos, discuten las teorías, ordenan y vuelven a cambiar de posición los sistemas; cada uno opera la mente al otro, fecunda y es fecundado. Quizás ellos a su vez lleguen a ser maestros.

Otros permanecerán como colaboradores que convenientemente guiados pueden rendir excelentes servicios [...]

Otros no tienen el sentido de las ideas generales; pero ayudados por un dichoso azar que siempre recompensa a la paciencia tenaz, encontrarán un hecho interesante. [Librairie F. Alcan, París, 1912].

Algunas ideas de J. Tannery coinciden con las de G. H. Hardy quien dijo:

Uno de los primeros deberes de un profesor es exagerar un poco la importancia de su tema junto con su propia importancia dentro del mismo [Citado por L. Young, p. 288].

Naturalmente un investigador principiante no debe apoyarse totalmente en su director de tesis. Debe trabajar por sí solo, emanciparse poco a poco para volar finalmente con sus propias alas. Ivan Pavlov resumió sus concepciones en una carta escrita a la juventud de su país en 1936:

¿Qué me gustaría desear para la juventud de mi país que se consagra a la ciencia?

Ante todo, perseverancia. No podría hablar nunca sin emoción de esta condición primordial para una fecunda actividad científica. Perseverancia, más perseverancia, siempre perseverancia. Desde el principio de vuestro trabajo acostumbraos a una perseverancia rigurosa en la acumulación de conocimientos. Estudiad el abecé de la ciencia antes de intentar alcanzar la cima. No emprendáis lo que sigue antes de haber asimilado lo que precede. No intentéis ocultar nunca las lagunas en vuestros conocimientos ni siquiera mediante las hipótesis más osadas. Por muy atractivos que sean los reflejos tornasolados de esa pompa de jabón, puede romperse y no os quedará más que un penoso sentimiento de confusión.

Cultivaos en la moderación y la paciencia. Aprended a realizar los trabajos fatigosos de la ciencia. Estudiad, comparad, acumulad hechos. Cualquiera que sea la perfección del ala de un pájaro, no podría nunca elevarla sin apoyarse en el aire. Los hechos están en el aire del científico. Sin ellos, vuestras teorías quedarán en vanos esfuerzos.

Intentad por medio del estudio, experimentación y observación no quedaros en la superficie de los hechos. No os transforméis en archiveros de éstos. Tratad de penetrar en el misterio de su aparición. Buscad obstinadamente las leyes que los rigen.

En segundo lugar os deseo modestia. No creáis que lo sabéis todo ya. Y cualquiera que sea la estima que se tenga por vosotros, tened siempre el valor de decir: soy un ignorante.

No dejéis que el orgullo se apodere de vosotros, si no os obstinaréis allá donde hay que ponerse de acuerdo, rehusaréis un consejo y una ayuda amistosa, perderéis el sentido de la objetividad [...]

En tercer lugar, os deseo pasión. Recordad que la ciencia exige de un hombre su vida entera [...] exige grandes esfuerzos y una pasión ardiente. Sed apasionados en vuestro trabajo y en vuestras investigaciones. [Citado por E. Saparina, *Ivan Pavlov*, Ediciones Mir, Moscú, 1987, pp. 220-221].

Cuando se investiga, ocurre a veces que dos científicos llegan a la vez al mismo resultado. Esto se produce frecuentemente cuando una idea está en el aire. En general quien ha publicado primero conserva el beneficio del descubrimiento. En nuestros días, cuando algunos temas son muy atrayentes, muy de moda, y atraen los esfuerzos de mucha gente, conduce sin duda a la carrera de las publicaciones. Es preciso, en cuanto se ha obtenido un resultado, por pequeño que sea, darse prisa en publicarlo por

miedo a que algún otro aparezca y lo publique antes. Es una nefasta actitud y frecuentemente se publican artículos que contienen poco de nuevo e interesante. Sería mejor que el autor esperara a tener resultados más completos para publicar. Pero la misma publicación de artículos forma parte del juego en el que son juzgados los investigadores, más por el número que por la calidad de sus publicaciones. El sistema de árbitros está felizmente aquí para evitar la aparición de artículos huecos, sin interés o con resultados demasiado escasos.

Esta costumbre no es nueva. Ya en 1912, Emile Picard (1856-1941) escribía:

Cualquiera que sea nuestra especialidad, estamos desbordados por el número de trabajos que se publican sólo en el campo en el que nos esforzamos por aportar nuestro grano de arena. El ilustre Gauss solía decir *pauca sed matura*, esta divisa apenas si cuenta ahora con adeptos [...] Las razones de la prisa con la que vemos publicar tantos trabajos son evidentes. La ciencia se ha convertido en una carrera; publicando una memoria se espera aumentar las posibilidades de obtener una plaza o un ascenso, y esto es muy legítimo [...] pero esta prisa no es necesariamente perjudicial para la ciencia. Apenas si ha surgido una idea en un cerebro, se comunica a alguna sociedad científica. Entonces pasa al dominio público, y otros investigadores pueden, si vale la pena, intentar explotarlas, en ocasiones en perjuicio de quien la ha publicado demasiado pronto. La ciencia avanza así más rápidamente que en otros tiempos, pero también más todavía que en el pasado, tiende a convertirse en obra colectiva y casi impersonal. [*Revue Scientifique*, 9 de noviembre de 1912].

Evidentemente cuando un investigador ve que otro ha publicado los mismos resultados antes que él, puede desanimarse y abandonar su trabajo. Sin duda no debería hacerlo. La historia está repleta de ejemplos de este tipo y esto casi forma parte de las reglas del juego, aunque tampoco sea un consuelo para quien ha llegado tarde. Más vale elegir un campo de investigación donde trabajen pocos: las posibilidades de coincidir son menores.

A la inversa, ocurre también, cuando se acaba de tener una idea particularmente simple, que hace preguntarse ¿cómo puede ser que no se le haya ocurrido antes a nadie, cuando parece tan simple e infantil? El espíritu del hombre es así y una idea no parece simple hasta que ha sido expresada claramente. Esto no quiere decir que sea intrínsecamente simple, solamente hacía falta pensar en ella.

J. Tannery por otra parte ha dicho:

En una exposición muy clara todo parece fácil, pero resume y esconde múltiples y continuados esfuerzos, no se entretiene detallando los esfuerzos que exigen la consecución de cada nueva verdad.

El físico japonés H. Yukawa ha explicado también este fenómeno en su autobiografía:

> Al enunciar el problema de esta manera puede parecer que la respuesta estaba al alcance de la mano, pero mi cerebro no funciona tan rápido. Hacía falta ante todo que me equivocase antes de llegar a mi destino.
>
> Los que exploran un mundo desconocido son viajeros sin mapa, el mapa es el resultado de la exploración. Ignoran dónde se encuentra su destino y el camino directo hasta allí es un punto todavía no trazado. Hay, a veces, pistas dejadas por exploradores que les han precedido. Si las seguimos ¿alcanzaremos nuestro destino o bien deberemos abrir una vía totalmente diferente? «Sólo después de haber llegado decimos: verdaderamente hemos tomado el camino más difícil para llegar hasta aquí». Después no es tan difícil encontrar el camino bueno; pero cuando se encuentra una vía nueva, puede hacerse partiendo en mala dirección, no es posible saber dónde conduce. [Belin, París, 1985, p. 100].

Contemos dos historias para ilustrar este propósito. Las dos se remontan a hace dos mil años.

Según la tradición, el problema de la cuadratura del círculo fue formulado por Anaxágoras de Clazomene (*c.* 500 a.C. - *c.* 428 a.C.). Se trata de construir con regla y compás un cuadrado que tenga la misma superficie que un círculo dado o calcular directamente el lado del cuadrado. Este problema, que está unido al valor de π, ha apasionado a los investigadores matemáticos profesionales o aficionados, desde hace dos milenios. Es equivalente al problema de la trascendencia de π. Existen ahora demostraciones sencillas de que π es un número trascendente pero la resolución del problema ha exigido 2.000 años de esfuerzos. Un primer paso hacia la solución de la imposibilidad de la cuadratura del círculo fue llevada a cabo por J.H. Lambert (1728-1777) que demostró, en 1761, que π era un número irracional. Había en esta época tantas soluciones -sin duda falsas- al problema, que la Academia de Ciencias de París declaraba que no quería examinar los trabajos recibidos sobre éste. En 1873, C. Hermite demostró, utilizando una generalización de la teoría de fracciones continuas, que el número *e* era trascendente. Su demostración, sujeta por otra parte a reservas, era de tal manera complicada, que escribió a un amigo: *No me dedicaré a buscar una demostración sobre la trascendencia del número π. Que otros acometan la empresa; pero, créame, querido amigo, no dejará de costarle algún esfuerzo.*

Retomando la demostración de Hermite, C.L.F. Lindemann probó la trascendencia de π en 1882, terminando así -demostrando que no tiene solución- un problema abierto desde hacía 2.000 años. La demostración de Lindemann fue simplificada pronto por D. Hilbert, F. Klein, P. Gordan y O. Veblen. Existen actualmente otras relativamente sencillas (de 2 a 3 páginas) que ya no tienen relación con la demostración original de Lindemann.

El segundo ejemplo que tomaría es el de la constitución del átomo. El problema nos parecería hoy trivial pues todo el mundo sabe que un átomo está constituido por un núcleo central, formado de neutrones y protones a cuyo alrededor gravitan los electrones. Aunque la constitución atómica de la materia haya sido formulada hace más de dos mil años por Demócrito y Lucrecio, había aún en el siglo XIX muchos científicos que no creían en la realidad atómica. Tres descubrimientos vinieron entonces a trastornar la física: los rayos catódicos, los rayos X y la radioactividad. La explicación de estos fenómenos condujeron a los físicos al descubrimiento del electrón efectuado en 1892 y 1897 como consecuencia de los trabajos de J. J. Thomson, J. Perrin, P. Zeeman y H. A. Lorentz. Para Thomson el átomo era una esfera que contenía cargas eléctricas pero esta teoría no permitía comprender el comportamiento de las partículas *a* emitidas por substancias radioactivas. Jean Perrin propuso en 1900 una primera teoría planetaria del átomo; sin embargo, hasta aproximadamente el año 1911, los físicos representaban el átomo como una esfera con una distribución uniforme de carga positiva y que contenía en el interior electrones cargados negativamente. Aquel año, para explicar ciertos resultados experimentales sobre las desviaciones de las partículas *a*, E. Rutherford señaló que el átomo debía estar constituido por un núcleo positivo y los electrones distribuidos en el conjunto del volumen del átomo.

En 1913, Niels Bohr, apoyándose en los resultados de Rutherford y en lo que se conocía sobre los rayos X, propuso una teoría planetaria del átomo en el que los electrones giraban en torno al núcleo en órbitas bien definidas. Se cuantificaban el movimiento y la energía de los electrones. En 1925 se descubrió que el electrón giraba sobre sí mismo: el spin del electrón. En 1932, Bothe y Becker mostraron que el boro y el berilio bombardeados por rayos *a* originaban una radiación muy penetrante. Irène y Frédéric Joliot descubrieron que esta radiación era capaz de expulsar protones de gran energía de las materias hidrogenadas que atravesaba. J. Chadwick interpretó estos fenómenos mostrando que la radiación contenía partículas neutras de masa parecida a la del protón, los neutrones, hipótesis que ya había sido planteada desde 1920 por

Rutherford. De esta forma se necesitaron 35 años de esfuerzos para establecer algunos hechos simples sobre la estructura atómica.

Se sabe que esta imagen planetaria y determinista del átomo fue pronto abandonada para considerar la dualidad onda-corpúsculo introducida por Louis de Broglie en su mecánica ondulatoria de 1923. Se concibe ahora el átomo como un núcleo rodeado por una nube de electrones. No se sabe ni dónde se encuentra cada electrón considerado separadamente ni cuál es exactamente su trayectoria. No se conocen más que probabilidades. Ya no se tiene una imagen del átomo; en el momento actual no es más que una entidad matemática. De esta forma, la mecánica cuántica ha desembocado poco a poco en cuestiones filosóficas mayores: ¿existe la realidad objetiva fuera de la observación? Se originó un profundo desacuerdo entre Bohr y Einstein (para quien la mecánica cuántica no era más que una aproximación de la realidad debida a la debilidad de nuestros medios de observación). Debía haber en ella *variables escondidas*. Esta querella terminaría en 1935 con la paradoja EPR formulada por Einstein, Podolsky y Rosen (iniciales EPR), que planteó una duda sobre la física cuántica. Experiencias realizadas recientemente por Alain Aspect parecen mostrar que hay que cortar en favor de Bohr. Aconsejo al lector interesado en estas cuestiones un libro muy bien escrito y lleno de analogías fáciles de comprender: S. Ortoli, J. P. Pharabod, *Le cantique des quantiques*, La Découverte, París, 1985.

A menudo son las ideas más sencillas, y por tanto las estéticamente más bellas, las portadoras de los resultados más interesantes.

Muchos investigadores han puesto el acento en esta noción de belleza de un resultado matemático. G. H. Hardy ha dicho: *La belleza es la primera prueba, no hay lugar fijo en el mundo para matemáticas feas*.

Dejemos hablar a Hadamard:

Siempre he confiado sin reserva al sentimiento de belleza que me daba mi enunciado, y este sentimiento no me ha engañado.

Es así en todos los momentos de la investigación. También es así en un estado del que no hemos hablado aquí, que tiene igualmente su importancia, y una importancia capital: quiero hablar de la elección de la cuestión. Es claro que esto es más esencial que el resto; por mi parte no es el criterio que más pesa en mi espíritu que éste cuando se trata de apreciar la valía de un científico o, sobre todo, de uno que se inicia en la investigación. Debo decir que si acojo gustosamente estudiantes que vienen a pedirme temas de tesis, tengo una inconfesable preferencia por quienes me aportan su propia idea, sobre todo si concuerda con mi gusto científico, pues espero hacerle comprender que existe un gusto científico, como hay un gusto literario o artístico. [J. Hadamard, "L'invention scientifique: la mathématique" en *L'invention*, novena semana internacional de síntesis, F. Alcan, París, 1938, p. 100].

En general, belleza y simplicidad van emparejadas y para mí uno de los modelos de este género es la demostración por los matemáticos de la Grecia antigua de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

La sencillez (muchas veces, sólo aparente) de un resultado no quita nada de la importancia de éste. Es lo que escribió Hermite a Stieltjes el 25 de febrero de 1892:

Las cosas fáciles y sencillas tienen frecuentemente más mérito que los resultados complicados, obtenidos tras grandes esfuerzos.

Cuando se investiga a largo plazo en un tema aunque sea relativamente especializado, es preciso trabajar sucesivamente en diferentes problemas; esto favorece la asociación de ideas creadoras. No hay que vaciar siempre a fondo un mismo y único problema. No hay que atarse a una única cuestión con todas las fuerzas para explotarla al máximo y, sobre todo, no es absolutamente preciso, como por desgracia se ve algunas veces, publicar artículos o dar conferencias casi iguales entre sí cuando solamente hay algún resultado nuevo entre una veintena de páginas ya publicadas en alguna parte. Es una actitud a erradicar.

Citemos a L. Young:

Naturalmente, no estoy en contra de la especialización como tal. Sin ella no puede haber profundidad. Solamente estoy en contra del cierre de la mente a lo que tiene lugar fuera en el transcurso del tiempo. Quizás, en algunos años, lo que era un tópico especializado puede llegar a alterar el conjunto de la matemática, o incluso otros temas cercanos. Esta forma natural de desarrollo es muy deseable para las matemáticas pero no resulta factible si todo el mundo cierra su espíritu a otras cosas. En este caso, la consecuencia más probable sería la desaparición del tópico especializado dejando al investigador dos alternativas: la de romper su propia prisión o la de morir matemáticamente en ella. Es uno de los numerosos argumentos en favor de los viajes. [P. 332].

Si es bueno introducir variaciones en los temas de los que uno se ocupa, puede ser nefasto cambiar constantemente. P. Boutroux ha dicho (ob. cit.):

Los eclécticos a los que nos referimos no se proponen construir amplias teorías, persiguen resultados de detalle, investigando en todos los terrenos aquello que es elegante, fácil, pintoresco, aquello que pueda ser de alguna utilidad para las aplicaciones prácticas de la ciencia [...] Hojeemos la obra de algunos matemáticos de hace cuarenta años [...] Han compuesto un bonito ramo, pero su obra no tiene continuación; este defecto es bastante grave.

Hay que llamarse Hilbert para permitirse esta gimnasia con éxito.
Según S. Ulam:

Pienso que cambiar de tema de trabajo alguna vez es rejuvenecedor. Si alguien permanece demasiado en la misma subespecialidad o en la misma estrechez de problemas le produce una especie de auto-envenenamiento que le impide la adquisición de nuevos puntos de vista y puede conducirle a un estancamiento. Desgraciadamente, esto no es raro en la creatividad matemática. [*Adventures of a mathematician*, Schribners, Nueva York, 1976, p. 290].

Alexis Carrel tiene una opinión todavía más radical:

Hasta ahora, se ha favorecido siempre a los trabajadores científicos que se aíslan en un campo estrecho y se consagran al estudio prolongado de un detalle a menudo insignificante. Un trabajo original sin importancia se considera de mayor valor que el conocimiento profundo de toda una ciencia. Los rectores de Universidades y sus decanos no comprenden que los espíritus sintéticos son tan indispensables como los analíticos [...] Parece que la exageración de la especialización, el aumento del número de trabajadores científicos y su segregación en sociedades limitadas para estudiar un pequeño asunto hayan ocasionado una disminución de la inteligencia. Es cierto que la calidad de un grupo de gente disminuye cuando aumenta su volumen más allá de ciertos límites [...] El mejor medio de aumentar la inteligencia de los científicos sería disminuir su número, bastaría con un pequeño grupo de hombres para desarrollar los conocimientos que necesitamos, si esos hombres estuvieran dotados de imaginación y dispusieran de poderosos medios de trabajo. [A. Carrel, *L'homme*.. pp. 54-55].

En cambio, Louis Leprince-Ringuet escribió:

Para estar en condiciones de descubrir, hay que elegir una dirección, conservarla durante largo tiempo con tenacidad y no abandonarla si no es por razones graves: toda elección es limitativa, la limitación hace que conozcamos en ocasiones bastante mal otras ramas de la ciencia. [*Les rayons cosmiques*, Albin Michel, París, 1945, p. 367].

Hay momentos, en la investigación, en que no se siente el resultado. Por ejemplo cuando se busca la demostración a un teorema. No se tienen ganas de hacerla, no os inspira. Pienso que en ese caso no hay que esforzarse; en primer lugar no se hace una buena investigación esforzándose y además una actitud así quizás oculte algún sentimiento confuso o alguna intuición que nos diga que nuestra idea no es

necesariamente la buena. Eso ya me ha ocurrido y el teorema que intentaba demostrar era un caso particular de un resultado mucho más general y cuya demostración finalmente no chocó con ninguna reticencia psicológica.

Pasemos ahora a la defensa de la tesis misma. El candidato que quiera defender su tesis en la fecha X debe respetar aproximadamente el calendario siguiente:

1) X - 3 meses 1/2: Dar el manuscrito al director de la tesis y a los otros miembros del tribunal. Estos leen el trabajo, lo critican y plantean las modificaciones correspondientes al candidato. Estas pueden llevar más o menos tiempo. Si el tribunal acepta el texto, se puede pasar entonces al siguiente paso del programa.
2) X - 2 meses 1/2: Mecanografiar el manuscrito .
3) X - 1 mes 1/2: Efectuar las correcciones de mecanografía.
4) X - 1 mes: Dar la tesis y los informes a la administración y hacer imprimir la tesis.

Evidentemente estas fases pueden alargarse según el trabajo de los miembros del tribunal y las modificaciones planteadas (fase 1), la carga del secretariado (fases 2 y 3) y la de la imprenta (fase 4).

Digamos algo sobre la defensa de la tesis, cuando un candidato ha sido admitido para defender su tesis es, *a priori*, prácticamente seguro que será aprobado puesto que todos los miembros del jurado han tenido conocimiento de su trabajo y lo han estudiado. Por consiguiente el candidato deberá estar distendido y seguro de sí mismo. Sin embargo, y yo diría que es normal, el candidato está casi siempre nervioso, al menos al comienzo de su exposición, mejorando las cosas conforme se va desarrollando. La tensión es por tanto completamente normal, aunque la familia y amigos del candidato estén en la sala, porque una defensa de tesis está rodeada de un cierto protocolo que es preciso, en mi opinión, conservar. Una tesis es, y debe permanecer como, un acontecimiento importante en la vida de un investigador y de un laboratorio. Su defensa debe estar rodeada de una cierta solemnidad; por ejemplo es costumbre que el público se levante cuando el tribunal vuelve de su deliberación y que el presidente pronuncie el discurso usual para elogiar los méritos del candidato antes de declararlo aprobado. Hay, felizmente, a continuación la tradicional comida de tesis para distender la atmósfera.

Hay otra tradición que es bueno respetar: una página de agradecimientos al comienzo de la tesis. Es una buena tradición porque nadie trabaja solo: el director de la tesis ha trabajado a menudo paralelamente a su doctorando y el resto de los miembros del tribunal han empleado horas o días en leer el trabajo, comprenderlo y, quizás, comentarlo. Es preciso saber agradecérselo y no copiar pura y simplemente los agradecimientos contenidos en otra tesis cambiando apenas algunas palabras. Agradecimientos sinceros y bien reflexionados gustan siempre a los que se les dirigen.

En lo que precede he hablado incidentalmente de investigación universitaria y de investigación industrial. Aunque en algunas grandes empresas hay a veces centros de investigación industrial muy desarrollados, tanto en lo que respecta al número de investigadores como a su calidad, el fin de los laboratorios industriales no es, salvo raras excepciones, hacer investigación básica puramente teórica.

El investigador matemático que trabaja allí, antes o después de su tesis, tendrá que hacer trabajo aplicado. Deberá, en general, resolver numéricamente un problema que provenga de la física o de la química. Deberá utilizar para ello métodos de análisis numérico. Podrá acudir entonces a una biblioteca de programas ya constituida y, en ese caso, su trabajo se limitará a la interpretación de resultados numéricos que es una fase del trabajo de la que no hay que menospreciar su importancia ni, algunas veces, su dificultad. En otros casos, si la biblioteca no contiene el programa adecuado o si éste se revela inoperante, el investigador deberá encontrar en la literatura el método que mejor se adapte a su problema particular. Es un trabajo que exige muchos conocimientos y que deberá ser seguido, a buen seguro, por la programación del método, su puesta a punto, que puede necesitar de un verdadero trabajo de investigación y de análisis de resultados. Por fin, si no existe método alguno en la literatura, el investigador deberá encontrar uno. Si el tiempo del que dispone es suficiente podrá entregarse entonces al estudio teórico del método obtenido, lo que podrá dar lugar a la publicación de un artículo.

Para realizar este género de trabajo pluridisciplinar el matemático deberá tener algunas nociones de física, pues raramente los físicos dan al matemático un problema directamente explotable. Es necesario, en general, discutir largo y tendido con el físico para llegar a aislar el problema matemático que desarrolle el concepto y a continuación formalizarlo en lenguaje matemático con hipótesis precisas. Este diálogo con el físico es a menudo la parte más importante y difícil del trabajo y, por esta razón, son indispensables los conocimientos de física, y que los estudios de análisis numérico deban comportar siempre la enseñanza de física y de modelización de problemas.

A menudo es difícil que el físico y el matemático se comprendan. Félix Bloch, que recibió el premio Nobel de física en 1952 con Edward Purcell por la medida del magnetismo nuclear, decía:

Lleváis vuestro problema a un amigo matemático. Os explica que el enunciado es incorrecto y lo reformula para vosotros. Lo estudia y os demuestra que vuestro problema no tiene solución y se sorprende de que no estéis contentos. [A. Abragam, *Reflexions d'un physicien*, Herman, París, 1983, p. 107].

Evidentemente éste es un hecho sin mayor trascendencia, pero ilustra bastante bien las dificultades de la comunicación.

Sin embargo, si el investigador se compromete en esta vía hará un verdadero trabajo aplicado y no ya solamente de análisis numérico.

Desgraciadamente en numerosos centros industriales falta tiempo para dedicarse a estudios teóricos y se pedirá al investigador un método que funcione. Se probará con un cierto número de ejemplos de los que se conoce la respuesta y luego se lanzará a la resolución de problemas nuevos sin cuestionarse el estudio de la teoría. He visto personas que en algunos casos han utilizado un método de resolución sin saber si convenía a su problema particular sino únicamente ¡porque los americanos lo hacen así! Obviamente es un caso extremo, pero existe y es bastante difícil adivinar hasta dónde puede conducir en ocasiones.

Pienso que un investigador universitario, aunque no se dedique más que a trabajos teóricos, no debe separarse de las aplicaciones. En efecto, pueden suministrarle temas de estudio en los que nunca hubiera pensado. Además es siempre interesante para un investigador de análisis numérico saber que sus trabajos son útiles para alguien.

Después de su tesis, algunos estudiantes se orientan hacia una carrera industrial, aunque no sea más que porque las Universidades son incapaces de convencerles y de ofrecerles posteriormente un desarrollo normal de su carrera. Su tesis sirve entonces para mostrar a los empresarios que son capaces de reflexionar y de llevar bien, casi solos, un trabajo de calidad.

Otros estudiantes continuarán haciendo investigación. Entonces no es preciso que su tesis sea una terminación sino un punto de partida.

Citemos a propósito de esto a N. Wiener:

Se admite en muchas ocasiones que la tesis doctoral de alguien debe ser una de las mejores cosas que haga nunca y que debe estar en su justa medida. No estoy de acuerdo. Una tesis doctoral no es más que una parte de trabajo específico mediante el cual se califica a un compañero para llegar a ser un maestro de su profesión, y si no sobrepasa ese nivel una docena de veces a lo largo de su carrera, verdaderamente es un pobre maestro. Sé que muchos creen que su tesis debería destacarse durante años por encima de los trabajos ulteriores del candidato, pero esta exigencia es a menudo ignorada en la práctica. Sólo cuando un hombre tiene su tesis tras él y no está atormentado por la perspectiva de las exigencias futuras que debe ampliar, puede efectuar sus mejores trabajos como hombre libre, únicamente con su tarea como meta y no la meta equivocada de conseguir una posición académica y social. La tesis puede ser buena, pero si el trabajo del intelectual no sobrepasa rápidamente el nivel de la tesis, el candidato está de lleno en vías de convertirse en uno de esos renacuajos desecados que encontráis en las reuniones universitarias de nuestros colegas de tercera categoría. [*Ex-Prodigy,* The MIT Press, Cambridge, Mass., 1953, p. 174].

Este texto es, en mi opinión, fundamental. Algunos investigadores, tras la defensa de su tesis, hacen una pausa en su actividad bajo pretexto de disfrutar de un bien merecido reposo. Está bien y es normal; pero cuántos no vuelven nunca al trabajo y bloquean así posiciones que investigadores más motivados y más dinámicos querrían ocupar con gusto.

CAPITULO IV

TECNICAS DOCUMENTALES

Cuando se desea información sobre los libros y artículos que se han escrito sobre un tema determinado, el primer paso es consultar en una biblioteca.

Existen distintos tipos de bibliotecas, de la más general a la más especializada. Las bibliotecas generales son las bibliotecas centrales de las Universidades o las grandes bibliotecas nacionales, como la *Bibliothèque National* o la del Centro *George Pompidou* en París, o la *Library of Congress* en Washington, sin duda la biblioteca más grande del mundo (80 millones de documentos de los cuales 20 millones son libros).

Las bibliotecas especializadas son las que se encuentran en los departamentos de las Universidades.

Evidentemente no se encuentra el mismo tipo de documentos en una biblioteca general que en una especializada, a pesar de que ciertos reagrupamientos sean deseables. Una biblioteca general contiene, como su nombre indica, los documentos de naturaleza más general como las enciclopedias, diccionarios, repertorios de bibliografía, es decir, lo que se llama los manuales. Igualmente tiene libros generales, pero sólo los más corrientes y los de nivel más elemental, así como las colecciones antiguas de libros y revistas. La visita a una biblioteca general se impone cuando se comienza una búsqueda bibliográfica y no se tiene una idea precisa sobre el lugar donde se encuentra lo que se busca.

Toda biblioteca posee generalmente dos catálogos. El primero es el catálogo alfabético de autores en el cual están reflejados los libros (y las tesis) de la biblioteca. Sólo se puede, evidentemente, utilizar este catálogo si se conoce al menos el nombre del autor de un libro o una tesis sobre el tema que se desea estudiar. Si el documento se encuentra en la biblioteca se obtendrá inmediatamente, al consultar la bibliografía del mismo (en general al final en las obras modernas o en notas a pie de página en las más antiguas), se obtendrá una primera elección de otras referencias que se podrá confrontar a su vez para obtener datos, y así sucesivamente. Difícilmente se podrá conseguir así una bibliografía exhaustiva. Una estimación, debida al historiador de las matemáticas Kenneth O. May, avanzaba la cifra de 15.000 nuevas publicaciones matemáticas cada año en 1973 ¡Para 1985 la estimación era de 48.000!

Veamos ahora cómo proceder si no se conoce nada sobre un tema o si la biblioteca no posee los libros que se precisan. Puede, en primer lugar, que ya exista una bibliografía sobre el tema deseado. El problema es saber de su existencia y después localizarla. La primera regla es preguntar al personal cualificado de la biblioteca. Las bibliotecas importantes utilizan los servicios de bibliotecarios (en inglés *librarian*), parte de cuyo trabajo consiste en guiar y aconsejar a los lectores. Si uno se dirige a un bibliotecario (algunos son especialistas en algún tema particular) es fundamental realizar su pregunta de la manera más clara posible con el fin de que comprenda bien qué es lo que se quiere y pueda dar una orientación rápidamente y con la mayor precisión posible. Por ejemplo, no hace falta preguntar por un libro sobre ecuaciones en derivadas parciales si lo que se desea es un libro sobre los métodos numéricos para resolver las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico, pues entonces uno se arriesga bien a ser orientado hacia un libro únicamente teórico o demasiado general en el que el tema que interesa estará muy poco tratado bien a quedar desbordado por el número de libros propuestos.

Las palabras importantes a destacar en este ejemplo concreto son: método numérico, ecuación en derivadas parciales, elíptica. Estas palabras se llaman palabras-clave y nos conducen al segundo catálogo que posee la mayoría de las bibliotecas al lado del catálogo alfabético de autores.

Este segundo catálogo es un catálogo por materias que para cada materia da una lista de referencias. Tal catálogo puede ser más o menos útil según la profundidad con la que se investiga en los diferentes temas. Un catálogo que no tenga como palabras-clave matemáticas, física y química no será evidentemente de ninguna utilidad. Un catálogo que contenga únicamente como palabras-clave de matemáticas: aritmética, álgebra, geometría y trigonometría sería un poco más útil y así sucesivamente

Para reunir una bibliografía sobre un tema, el primer trabajo a realizar es consultar el catálogo por materias y comprobar si las palabra-clave correspondientes figuran. En tal caso, se podrá consultar la bibliografía y después seguir la investigación de las referencias al consultar las obras así encontradas como he explicado ya antes. En algunas bibliotecas los ficheros de autores y materias están reunidos en un solo fichero

clasificado alfabéticamente; en otras, pueden existir varios ficheros por autores y varios por materias según la fecha de entrada del documento a la biblioteca.

En ciertas bibliotecas el fichero por materias puede estar reemplazado por un índice *KWIC* presentado bajo la forma de listado de ordenador o de microfilm (en cuyo caso hay que utilizar un lector de microfilms). *KWIC* significa *Key Word Index Context*. Cada documento de la biblioteca está clasificado por una serie de palabras-clave, por ejemplo: cálculo valor propio. En la lista alfabética del *KWIC* se encontrará en la letra *c* cálculo valor propio donde la *c* de cálculo estará impresa en el centro de la página, en la letra *p* se tendrá de nuevo cálculo valor propio donde la *p* de propio se encontrará impresa en el centro de la página. Por último, en la letra *v* figurará cálculo valor propio con la *v* de valor en el centro. La presentación será pues la siguiente:

		CALCULO	VALOR	PROPIO
CALCULO	VALOR	PROPIO		
	CALCULO	VALOR	PROPIO	

A la izquierda (o a la derecha) de cada línea se encontrará un margen que permite localizar el documento correspondiente.

En general, los índices *KWIC* contienen tanto libros como artículos publicados en revistas especializadas.

En la mayoría de los casos estos índices están en inglés.

Por último, algunas bibliotecas poseen métodos informatizados de búsqueda documental. Como para la búsqueda en un índice *KWIC*, el tema está definido por un conjunto de palabras-clave, se puede centrar poco a poco la búsqueda introduciendo nuevas palabras-clave con el fin de tener sólo las referencias más pertinentes. Si se da al ordenador únicamente la palabra-clave *aproximante Padé* corremos el riesgo de que responda que conoce 300 referencias sobre el tema. Pero si se añade a continuación la palabra-clave *convergencia* se eliminarán ya muchas referencias, en particular todas las que tratan de la teoría algebraica de los aproximantes de Padé. Se puede introducir posteriormente, por ejemplo, la palabra-clave *serie de Stieltjes* para centrar la búsqueda, y así sucesivamente.

Es necesario comprender, sin embargo, que las posibilidades de un ordenador están limitadas a las referencias que han sido introducidas en su memoria. Eso sólo puede hacerse muy paulatinamente, debido al número absolutamente enorme de referencias publicadas sobre cada tema y que crece actualmente de manera exponencial. Por ejemplo, ¡yo he reunido 2.500 referencias sobre las fracciones continuas y los aproximantes de

Padé publicados antes de 1940! En general, los bancos de datos bibliográficos sólo contienen los libros y artículos de los últimos años (es decir, publicados desde 1970, aproximadamente), y todavía no los contienen sistemáticamente todos. Por ejemplo, un banco de datos consultado recientemente sólo me ha suministrado 160 documentos sobre los aproximantes de Padé. La información blbliográfica está mucho más desarrollada en Estados Unidos que en Francia donde el CNRS ha establecido recientemente un sistema que puede ser usado en las Universidades.

Voy ahora a hablar de otro método de búsqueda bibliográfica. Existen algunas revistas que publican análisis o resúmenes de los artículos aparecidos. Los resúmenes son en general los que cada autor debe obligatoriamente añadir a cada artículo; en cuanto a los análisis, están escritos por especialistas del tema, los *reviewers*. En matemáticas hay tres revistas de este tipo: *Mathematical Reviews*, *Zentralblatt der Mathematik* y el *Bulletin Signalétique* del CNRS. En estas revistas los artículos no están clasificados alfabéticamente sino, y esto es primordial para la búsqueda documental, según una clasificación por temas. *Math. Rev.* y *Zentralblatt* tienen la misma clasificación. ¡La lista de temas ocupa 34 páginas!

El plazo que transcurre entre la publicación de un artículo y su análisis en *Math. Rev.* es variable, pero en general va de 6 meses a 1 año. Con el fin de que los investigadores puedan estar informados más rápidamente de los nuevos artículos aparecidos, la revista *Current Mathematical Publications* publica su lista (sin resumen ni análisis) según la misma clasificación que *Math. Rev.* Todos los artículos citados en *Current Math. Publ.* son analizados en *Math. Rev.* sucesivamente.

Hay que señalar que para *Math. Rev.* y el *Bulletin* del CNRS se puede estar abonado únicamente a algunas secciones sin estar obligado a subscribirse al conjunto de la revista. *Zentralblatt* publica esencialmente resúmenes de autores. *Math. Rev.* se publica desde 1940, *Zentralblatt* desde 1930 y el *Bulletin Signalétique* del CNRS es más reciente.

En los años anteriores existieron revistas análogas pero con una clasificación por materias mucho menos precisa: *Revue Semestrielle des Publications Mathématiques* (1893-1932) y *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (1868-1940).

Cuando se desea efectuar una búsqueda bibliográfica utilizando, por ejemplo, *Math. Rev.* se podrá proceder de la manera siguiente. Se busca en el índice de cada volumen el número de la clasificación del tema que interesa. Se encontrarán entonces unos números que nos remiten a los análisis de los artículos correspondientes en los diferentes fascículos del volumen. Hay un fascículo todos los meses y un volumen compuesto

por 12 fascículos. Se puede igualmente buscar el tema que nos interesa directamente en cada fascículo. Después de haber leído el análisis de los diferentes artículos publicados puede interesar leer alguno. Conviene saber que si la revista o el libro correspondiente se encuentra o no en la biblioteca propia para, en su caso, pedir prestado a otra biblioteca por medio del préstamo interbibliotecario solicitando una fotocopia al CNRS.

Si el joven investigador va a trabajar varios años sobre un tema, tendrá interés en formar su propia documentación. Se puede proceder de diferentes formas: sólo guardar (sobre fichas de cartulina, por ejemplo, lo que permite una clasificación alfabética) las referencias de los artículos con (o sin) palabras-clave, un pequeño resumen o una opinión personal conservando unas fotocopias de los artículos. De todas maneras es preferible sistematizar desde el comienzo la forma que se desea dar a las informaciones bibliográficas. Esta precaución evitará en concreto el volver a empezar el trabajo varias veces para cambiar la presentación de los datos. Normalmente una referencia se presenta bajo la forma siguiente: nombre del (o de los) autor(es), título del artículo, nombre de la revista, número del volumen, año, páginas. Para el título de las diferentes revistas se utilizarán abreviaturas que son codificadas de manera universal (ver por ejemplo la lista de abreviaturas en *Math. Rev.*). A continuación, después de una coma, se indicará el número del volumen, después, entre paréntesis el año y al final las páginas del principio y del fin separadas por un guión. He aquí un ejemplo:

> C. BREZINSKI
> Some new convergence acceleration methods
> *Math. Comp.*, 39 (1982), 133-145.

En el caso de un libro, después del nombre del autor y el título, se indicará, si es necesario, el nombre de la serie, el número del volumen en la serie, después el nombre del editor, la ciudad donde se encuentra este editor y el año. Por ejemplo :

> C. BREZINSKI
> *Acélération de la convergence en analyse numérique*
> Lecture notes in Math., vol. 584, Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.

Los apellidos de los autores se escriben habitualmente en mayúscula. Se indican igualmente las iniciales de los nombres a causa de la homonimia (¡o incluso en algunos casos las dos primeras letras del nombre!).

Si se tiene la posibilidad, interesa informatizar el conjunto de estas informaciones desde el principio (hacerlo después es un trabajo demasiado largo). Si se dispone de un buen programa se podrán introducir palabras-clave con el fin de poder realizar su propia búsqueda documental. De todas maneras la utilización de un ordenador simplificará mucho la formación de listas alfabéticas u otras de referencias.

Es aconsejable conocer los libros fundamentales de la propia disciplina que forman la base de la cultura general. Incluso aunque no se van a utilizar directamente, conviene haberlos examinado al menos una vez para tener idea de su contenido y poder acudir a ellos cuando sea necesario.

Para investigadores avanzados existe una herramienta de trabajo de gran importancia, es el *Science Citation Index* que da, para cada autor, la lista de los artículos donde sus trabajos son citados. Esto permite constituir a cada uno su bibliografía de citas y saber para qué y dónde son utilizados sus resultados y cuáles son los desarrollos a que han dado lugar.

El *SCI* aparece cada dos meses y, al final de cada año, es reeemplazado por un conjunto de volúmenes anuales. Comprende tres partes. El *Citation Index* propiamente dicho que indica para cada autor qué artículos suyos han sido citados, por quién y dónde. Si se desea encontrar el título del artículo deberemos mirar el nombre del autor en el *Source Index*. De esta manera se puede contactar con el autor ya que su dirección, que figura obligatoriamente en su artículo, está recogida allí.

El *SCI* puede servir para constituirse una bibliografía sobre un tema ya que su tercera parte es un índice de palabras-clave que remite al *Source Index*. La tercera parte es el *Permuterm Subject Index*.

Cada año se publica la *List of Source Publication* que recoge el título completo de las revistas que aparecen bajo forma abreviada en otras partes del *SCI*, así como los títulos de los libros vaciados.

Desgraciadamente existen pocas bibliotecas que posean el *SCI*. ¡El precio de suscripción anual es de 5.200 $! Evidentemente es muy caro, pero es necesario darse cuenta del trabajo enorme que se emplea en su redacción. Por otra parte es una herramienta de búsqueda irremplazable. Actualmente la mayoría de las bibliotecas universitarias, incluso la del CNRS, que edita el *Bulletin Signalétique* del que he hablado antes, están obligadas a reducir de manera absolutamente dramática sus suscripciones a las revistas especializadas, por falta de recursos suficientes. Ello supone un enorme peligro para la calidad de la investigación francesa y es una actitud incomprensible en el momento en que se nos dice que se hace todo para el desarrollo de la investigación. Además cuando se piensa en las tasas de utilización de las bibliotecas, ¡qué son 5.200 $ comparados

con cualquier instrumento de física un poco sofisticado que no será utilizado más que por algunos investigadores! Francia no puede evidentemente compararse a los Estados Unidos, pero hay que haber visitado una biblioteca universitaria del otro lado del Atlántico y haber visto a los estudiantes en los pupitres efectuando investigaciones bibliográficas para comprender la diferencia y lamentarla.

Este capítulo se ha centrado en la búsqueda documental en matemáticas. Para otras ciencias el procedimiento es análogo, basta cambiar los títulos de las revistas utilizadas:

INVESTIGAR Y DESCUBRIR

CAPITULO V

EL METODO CIENTIFICO

Antes de hablar del método (o de la ausencia de método) científico, digamos algo sobre la verdad científica. Las matemáticas son una creación del espíritu humano que se parece a un rompecabezas. Se parte de unas piezas y unas reglas para ensamblarlas y se buscan los fragmentos que pueden ir juntos. Si se cambian las piezas o las reglas se obtendrá otra configuración. Esto es lo que ocurre por ejemplo con los axiomas de la geometría. Para las matemáticas el problema de la verdad científica ni siquiera se plantea. Se dan cartas y reglas, y con ello se juega. En tanto se respeten las reglas de juego y éstas no se cambien, todas las partes que entran en juego son válidas y verdaderas.

No ocurre lo mismo en las ciencias de la naturaleza, las cuales están sometidas a la observación y experimentación, ya que intervienen nuestros sentidos y nuestro cerebro. ¿En qué medida podemos estar seguros de que esta intervención nos hace *ver* el fenómeno tal como es realmente? En su libro *L'homme et sa destinée*:

> Mientras ignoremos qué relaciones existen entre un fenómeno físico-químico y los fenómenos relativos a la vida y a la psicología que pueden acompañarlo, nos encontraremos ante la imposibilidad de decir que conocemos el significado completo [de la verdad científica] [...]
>
> Sin la presencia del hombre -el receptor, el registrador y el coordinador-, los fenómenos que constituyen su ciencia nó existen más que como fenómenos aislados. En el universo hay ondas de todas las longitudes, de las cuales un número muy pequeño son transformadas por nuestros sentidos en luz, calor, sonido, etc. Hay átomos y moléculas, es decir, materia cuyo contacto con nuestras terminaciones nerviosas se traduce en nuestro cerebro en *cualidades:* dureza, blandura, sabor, olor, etc. que no existen en los objetos, y son el resultado subjetivo de la reacción de nuestro sistema nervioso hacia la naturaleza. Si suprimimos al hombre, quedan las causas de nuestras sensaciones que no son de ningún modo idénticas a esas sensaciones. Para establecer una comparación: suprimamos los receptores de radio, pero

dejemos emitir a las estaciones transmisoras, las más bellas melodías del mundo podrían ser radiadas sin que nadie se diera cuenta. Estaremos rodeados sin saberlo de ondas silenciosas. Es necesario un instrumento de una gran complejidad que detecte las ondas electromagnéticas, cambie la longitud y las transforme en ondas sonoras transmisibles por el aire, para hacerlas audibles en los cuatro puntos cardinales de la Tierra. La causa es muy diferente al efecto.

Ocurre lo mismo en la naturaleza. El hombre desempeña el papel de receptor y transforma las propiedades de las cosas en propiedades perceptibles a nuestra escala de observación, bien directa o bien indirectamente por medio de aparatos admirablemente ingeniosos creados por el cerebro. Los fenómenos así transformados, *humanizados*, constituyen los objetos de nuestra ciencia que es, por tanto, esencialmente humana, y podemos decir que la gran mayoría de los fenómenos estudiados -si no todos- son en realidad derivados de esta combinación: experimentador (el hombre) más fenómeno objetivo. Esta observación es de la mayor importancia en lo que concierne a las conclusiones filosóficas que estamos autorizados de sacar a nuestras experiencias y de nuestras teorías científicas. [La Colombe, París, 1948, Pierre Lecomte du Noüy ha planteado esta cuestión, pp. 28-29].

Vemos que las ideas de Lecomte du Noüy se relacionan con el principio de incertidumbre de Heisenberg basado en la interacción entre el observador y el fenómeno observado, pero que van más allá del plano psicológico. Langevin se opuso furiosamente a toda interpretación extracientífica del principio de incertidumbre, lo que cerró las puertas del Collège de France a Lecomte du Noüy.

El desarrollo de un trabajo de investigación se realiza siguiendo el método inductivo, que consta de cuatro fases:

1.- Análisis de los hechos conocidos
2.- Elaboración de un modelo Conjetura
3.- Verificación del modelo
4.- Si es necesario, modificación del modelo y vuelta a la tercera fase.

Demos un ejemplo para ilustrar dicho método. El análisis espectral fue fundado alrededor de 1850 por Robert Wilhem von Bunsen (1811-1899) y Gustav Robert Kirchhoff (1825-1887). Estos se encontraron por vez primera en Breslau (la actual Wroclaw). Después, cuando Bunsen partió hacia Heidelberg, logró obtener un puesto para su amigo Kirchhoff. Introduciendo sales en la llama de un mechero de gas (el mechero Bunsen) y observando la luz a través de un prisma se ven aparecer rayos que son característicos de la sal utilizada. Esa forma de análisis, llamada análisis espectral, permite reconocer por ejemplo la presencia de ciertos elementos químicos en el Sol y las estrellas. También permite descubrir nuevos elementos. En 1868 apareció el tratado *Recherches sur le spectre solaire* de Anders Jonas Angström (1814-1874) en el que la longitud de onda de los cuatro primeros rayos de emisión del hidrógeno se expresaba en diezmillonésimas de milímetro, unidad que ahora se llama angström. ¿Existía una fórmula matemática que reuniera esos valores? Esa era la pregunta que se planteaban los físicos. En 1885, Johann Jakob Balmer (1825-1898), un profesor bastante desconocido que enseñaba en un Instituto y en la Universidad de Basilea, demostró que la fórmula $\lambda = R\, n^2/(n^2-2^2)$ donde R es una constante cuyo valor determinó empíricamente, daba los cuatro rayos de Angströn cuando se tomaba $n = 3, 4, 5$ y 6. Para verificar la validez de ese modelo había que asegurarse de que tomando en la fórmula de Balmer $n = 7, 8, 9$... se volvían a encontrar otras líneas del átomo de hidrógeno. Esta verificación se hizo más tarde y actualmente la fórmula de Balmer concuerda con los valores observados para 35 líneas consecutivas. La única modificación que debía hacerse en esta fórmula fue el valor de la constante R que Balmer no había determinado de una forma suficientemente exacta. Más tarde se dieron cuenta de que sustituyendo en la fórmula de Balmer 2^2 por 1^2 se advertían perfectamente las líneas del espectro ultravioleta del hidrógeno y que con 3^2 y 4^2 se reproducían las dos series de líneas observadas en el infrarrojo. El físico experimental se detiene ahí, ha explicado los fenómenos experimentales porque posee una fórmula que los explica. El físico teórico quiere explicar la procedencia de la fórmula, quiere deducirla lógicamente de una teoría, la cual servirá de verificación del modelo teórico al igual que las nuevas líneas habían servido de verificación de la fórmula. En 1912, Niels Bohr (1885-1962) acabó su modelo del átomo de hidrógeno basado en las primeras ideas de la mecánica cuántica. Estaba muy entusiasmado con su modelo pero necesitaba la confirmación de su validez. En 1913 uno de sus estudiantes, Hans Magnus Hansen, le preguntó si su modelo permitía decir cualquier cosa sobre los espectros. Bohr respondió negativamente, Hansen le sugirió echar un vistazo a la fórmula de Balmer. Algunos años más tarde, Bohr debía decir: *Cuando vi la fórmula de Balmer, todo quedó claro para mí.* La teoría de Bohr permite incluso explicar la constante R para la que propone una expresión matemática. Dicha teoría proporcionó, por tanto, una validación del modelo propuesto por Bohr para el átomo de hidrógeno y por consiguiente una validación suplementaria de la incipiente teoría cuántica.

En matemáticas, la creación de resultados o métodos nuevos sigue igualmente el mismo esquema. En efecto, después de analizar un cierto número de resultados conocidos y de haber incorporado sus propias notas, el investigador matemático se dispone a formular una idea: piensa que un cierto resultado, un cierto teorema, debe ser verdadero; es lo que se llama una conjetura. Es la segunda etapa de nuestro esquema. Intenta a continuación demostrar esta conjetura; ésta es la tercera etapa. Al intentar hacer esta demostración, mediante un método deductivo, puede darse cuenta de que es necesario añadir de nuevo algunas hipótesis; es la cuarta etapa, el modelo se ha modificado. Se vuelve después a la etapa tercera, es decir, se intenta proseguir la demostración. Cuando se presenta una nueva dificultad se añaden nuevas hipótesis y así sucesivamente hasta la finalización de la demostración.

El análisis numérico es la rama de las matemáticas que elabora y estudia métodos (llamados algoritmos) que permiten resolver numéricamente, generalmente de forma aproximada, los problemas que las matemáticas clásicas no saben resolver. Esta resolución numérica se efectúa en un ordenador. La preparación de un nuevo algoritmo se realiza, también, según el método inductivo: el modelo elaborado es el algoritmo y su verificación consiste en experiencias numéricas realizadas en un ordenador.

En las ciencias de observación, la verificación del modelo consiste en nuevas observaciones. Ese fue el caso de la desviación de los rayos luminosos cuando pasan cerca de un cuerpo celeste, la cual fue prevista por la teoría de la relatividad y observada en el momento del eclipse de 1919.

Demos ahora un ejemplo de inducción en el campo matemático. Este ejemplo está sacado del libro de George Polya, *Les mathématiques et le raisonnement plausible,* Gauthier-Villars, París, 1958. Partimos de:

$$10 = 3 + 7$$
$$20 = 3 + 17$$
$$30 = 13 + 17$$

Esos son los hechos. Se aprecia un cierto parecido entre esas relaciones: 10, 20 y 30 son números pares; 3, 7, 13 y 17 son números primos, es decir, números divisibles solamente por sí mismos y por la unidad. Se tienen tres números pares que pueden representarse como la suma de dos números primos. Se emite entonces la conjetura de que esta propiedad es cierta para todos los números pares. Se pueden realizar experiencias para ver si esta conjetura tiene alguna posibilidad de ser cierta. Por supuesto sería absurdo intentar una demostración si la primera prueba de verificación numérica de la conjetura se manifestara falsa. Así es fácil ver que:

$$6 = 3 + 3$$
$$8 = 3 + 5$$
$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$
$$12 = 5 + 7$$

y así sucesivamente. Parece que la conjetura sea cierta. Sin embargo, al no considerar al 1 como número primo sino como la *unidad* se tiene $2 = 1 + 1$ y $4 = 1 + 3$. Hay que modificar pues nuestra conjetura inicial para añadir de nuevo la hipótesis de que el número par que se intenta descomponer en una suma de dos números primos (excluido el 1) debe ser superior a 4. Esta conjetura fue emitida por Christian Goldbach el 7 de junio de 1742 en una carta a Leonhard Euler. Desde entonces los matemáticos siguen buscando la demostración.

En las ciencias naturales (ciencias de observación y experimentación), el tercer punto del esquema inductivo, la verificación del modelo, debe comprenderse en un sentido más amplio que el que he presentado antes. Todo modelo, toda teoría no es más que una aproximación de la realidad y es perfectamente posible que varios modelos sean aptos para advertir el mismo conjunto de fenómenos. La verificación de una teoría puede consistir en su validación: ¿Es capaz de explicar todos los fenómenos conocidos y de prever otros nuevos? Si así ocurre, será aceptada (provisionalmente) como válida. Del mismo modo la verificación de una teoría puede consistir en buscar su invalidación, su refutación por medio de una experiencia o un fenómeno que la contradiga. Es la tesis sostenida por Karl Popper [*Conjectures et réfutations,* Payon, París, 1985].

En efecto, ya que ninguna teoría, aun si ha dado cuenta de los hechos conocidos y predicho otros que se han comprobado exactos, no puede ser nunca considerada verdadera (incluso en matemáticas después de Imre Lakatos), también es válido intentar refutarla para tratar de saber si puede ser aceptada. Si opone una fuerte resistencia a la crítica, como dice Popper, podrá ser definida como la *ciencia* de la época considerada.

Experiencia es el nombre que cada uno da a sus errores, dijo Oscar Wilde (*El abanico de Lady Windermere*). Pero, de hecho, las relaciones entre la teoría y los hechos experimentales no son tan simples; no se reducen a todo o nada, a sí o no. Se puede saber que una teoría no es exacta y sin embargo no desecharla y continuar sirviéndose de ella, ya que de todas formas, una teoría no es más que una aproximación a la realidad y esta aproximación puede ser válida a cierta escala y no serlo a otra. Esto sucede con la mecánica newtoniana, válida cuando las velocidades puestas en juego son pequeñas con relación a la de la luz. Cuando se aproximan a la velocidad de la luz, hay que abandonar a Newton y tomar en cuenta a Einstein. También ocurre esto con la mecánica clásica, válida para los objetos macroscópicos pero no a escala atómica; entonces se sustituye por la mecánica cuántica. Aunque la mecánica clásica no sea exacta para objetos microscópicos, nadie pensaría en sustituirla por la mecánica cuántica para contruir un puente.

Otra cuestión es saber cuáles son los hechos buenos, los hechos pertinentes, los que traerán una respuesta, positiva o negativa a la verificación de una teoría. Einstein escribió:

No ambicionemos lo que se consagra a la teoría científica, pues la naturaleza, o más exactamente la experiencia, juzga inexorablemente su trabajo y lo hace sin piedad. Nunca dice *sí* a una teoría; en los casos más favorables, dice *quizás* y en la mayoría de ellos, un simple *no.* Si una experiencia está de acuerdo con una teoría, eso significa *quizás* y si está en desacuerdo significa *no*. En la mayor parte de los casos cada teoría poco después de su creación confirmará por medio de la experiencia ese *no*. [A. Einstein, *Correspondance*, InterEditions, París, 1980, p. 29].

Hasta ahora no hemos distinguido entre las ciencias de observación y las matemáticas. De hecho, no es necesario. Antes de explicar por qué, hay que hacer una distinción entre observación y experiencia. La primera es pasiva, mientras que la segunda es activa. Cuvier dijo respecto a esto: *el observador escucha a la naturaleza; el experimentador la interroga y la obliga a descubrirse*. La astronomía, la paleontología, la cosmología son ciencias de observación. No se pueden hacer experimentos, es decir no se puede ejercer una acción sobre la naturaleza con la intención de producir fenómenos para observarlos. Hay que conformarse con lo que se ve, con lo que se observa. Como dijo Claude Bernard: *la observación es por tanto la que muestra los hechos; la experiencia es la que instruye sobre los hechos.* [*Introduction*... p. 40].

Se puede decir que las matemáticas son, en gran medida, una ciencia experimental. Presentamos aquí unos testimonios:

El matemático y filósofo francés Pierre Boutroux (1880-1922) escribió en su libro *L'idéal scientifique des mathématiciens* [Librairie Félix Alcan, París, 1920] lo siguiente:

La experimentación es, por excelencia, el método de las ciencias naturales. Sin embargo, sería falso creer que no tiene nada que ver con las matemáticas [...]

Frecuentemente el matemático experimenta. ¿Quiere estudiar una familia de funciones? Toma un ejemplo numérico y analiza su aspecto, estudia los caracteres distintivos. ¿Quiere instruirse en un tipo de ecuaciones diferenciales? Primero considera un caso particular en el que las propiedades se puedan calcular y se extiende, por inducción de ese caso, al caso general. A la vez que un método de investigación, la experiencia es, por otra parte, un medio de comprobación para el matemático. Cuando un alumno plantea un enunciado de un teorema a un profesor ¿cómo se las arregla éste para comprobar que es cierto? Casi siempre comienza por tomar un ejemplo y mira si este ejemplo obedece al teorema propuesto. Es así como aparecen la mayoría de los errores cometidos por los analistas: llega un día en que alguna simple experiencia manifiesta el defecto de las leyes inexactas que habían enunciado. [P. Boutroux, *L'Ideal...*, p. 244].

Para Claude Bernard:

Cuando se quiere estudiar algo nuevo se enuncia una hipótesis, una creencia, se supone que las cosas son de una cierta manera [...] Después interviene el razonamiento sin experiencia y, finalmente, la experiencia. Hay ciencias que podrían llamarse del razonamiento, como las matemáticas; sin embargo son tan experimentales, en ese sentido, que la demostración siempre está dada. La experiencia es pues la demostración del principio de donde se parte, bien si por medio del cálculo, bien por medio de la experiencia física. [Claude Bernard, *Philosophie*, Hatier-Boiuni, París, 1954, pp. 2-3].

Citemos finalmente a Charles Hermite:

Se puede no obstante, con respecto a los procedimientos intelectuales propios de los geómetras, hacer la sencilla puntualización siguiente que justificará la idea misma de la ciencia: la observación tiene un lugar importante y juega en ella un gran papel.

Todas las ramas de las matemáticas se proveen de pruebas para apoyar esta aserción, pero elegiré preferentemente la que se considera más abstracta; me estoy refiriendo a la teoría de números.

Citaré así varios ejemplos:
- La periodicidad del desarrollo en fracción continua de las raíces de una ecuación de 2º grado con coeficientes conmensurables (medibles).
- La ley de reciprocidad de restos cuadráticos.
- La ley de reciprocidad de los residuos cúbicos, que se ve en las obras póstumas de Euler, deducida por la observación en los mismos términos en que ha sido descubierta y demostrada por Jacobi. (Euler tenía hasta tal punto el sentimiento de la importancia y la verdad de esta ley, que la ha colocado en la colección de sus Memorias, destinada a ser publicada cien años después de su muerte).
- La expresión aproximada del número de números primos hasta un límite dado.

Por fin y más recientemente, Jacobi ha pedido a la observación revelar la ley de representación de números por una suma de cubos, haciendo construir, por un calculador hábil, las tablas que han sido publicadas sobre esta cuestión en *Le Journal de Crelle*.

Pero los resultados que preceden, por notables e importantes que sean, no son suficientes para dar idea completa del papel que se puede atribuir a la observación. Analizando los procedimentos de demostración de un cierto número de teoremas, nos daremos cuenta mejor, como voy a intentar hacerlo ver por un solo ejemplo. La proposición que elijo es ésta: la cadena de números primos es ilimitada, y se comienza la demostración suponiendo que no existe más que un número finito y limitado. Formando su producto y añadiendo una unidad, se obtiene un nuevo número primo en la hipótesis admitida, y superior a los precedentes, de donde resulta que la hipótesis debe ser rechazada puesto que lleva a contradicción. (El punto esencial aquí consiste evidentemente en la consideración de este producto de todos los números primeros admitidos, al cual se le añade la unidad, y se admitirá sin dificultad que esta consideración no resulta del solo razonamiento sino que se debe allí reconocer el fruto de la observación de un hecho muy simple, relativo a la divisibilidad, hecho ya adquirido y utilizado por el razonamiento, que sirve de punto de apoyo para llegar a la demostración. [*Mémoires de l'Academie des Sciences*, (2) *35* (1866) 528-529 y *Oeuvres*, Tomo IV, pp. 586-587].

Podemos comparar la elaboración de un modelo con el procedimiento matemático de la interpolación y su verificación mediante la extrapolación. Expliquemos en primer lugar en qué consiste este procedimiento. Supongamos que se hayan realizado dos medidas experimentales. Podemos buscar la recta que pasa por esos dos puntos: esto es la interpolación. Si hemos realizado más de dos medidas experimentales se buscará una curva más complicada que una simple recta que pase por los puntos. Una vez obtenida la ecuación de la curva, se puede calcular su valor en los puntos situados entre los puntos de medida (llamados puntos de interpolación) o en unos puntos situados más allá de aquéllos; se dice entonces que se ha extrapolado, que se ha hecho extrapolación.

Ahora que sabemos qué es la interpolación y la extrapolación, volvamos al método inductivo. La elaboración de un modelo puede compararse con un proceso de interpolación. En efecto, partiendo de hechos conocidos que constituyen los puntos de interpolación, se busca un modelo que los explique, es decir una curva que los una. Para verificar el modelo se buscarán hechos nuevos, es decir nuevos puntos situados fuera de los puntos de interpolación. Si se encuentra un hecho nuevo que no se sitúa en la curva, el modelo estará invalidado. También se puede utilizar la curva para predecir hechos nuevos. Al trasladarse sobre la curva hasta un cierto punto, si el modelo es válido, debería tener lugar un nuevo fenómeno el cual puede ser comprobado por medio de la experiencia, es decir, comparando en ese punto el valor teórico dado por la curva y el resultado de la experiencia. La verificación del modelo corresponde por tanto a un proceso de extrapolación.

Como ocurre en la interpolación, el modelo (la función de interpolación) no es más que una aproximación a la realidad que es demasiado compleja. Cuando un modelo queda invalidado por una experiencia o una observación o, en matemáticas, por un contraejemplo, el nuevo modelo deberá explicar todos los hechos anteriores más el hecho nuevo que ha producido la crisis. Eso conlleva añadir un nuevo punto de interpolación y afinar la aproximación a la realidad. Para conseguirlo se puede intentar mejorar el antiguo modelo en la medida de lo posible. Por ejemplo, en lugar de hacer pasar una recta por dos puntos se hará pasar una parábola por tres puntos (los dos anteriores más el nuevo). Ha permanecido la misma clase de función de interpolación (la polinómica) y solamente se ha efectuado una modificación cuantitativa del grado de aproximación, es decir, de la precisión del modelo. A veces no es posible mejorar el modelo antiguo y hay que cambiarlo radicalmente. Esto ocurre cuando se intenta interpolar por medio de funciones que son siempre positivas y el nuevo punto que se añade tiene valor negativo.

Esta analogía con la interpolación y extrapolación no es nueva como lo demuestran los siguientes textos:

No obstante las teorías son útiles para facilitar los descubrimientos. Orientan las investigaciones hacia regiones desconocidas, al igual que el conocimiento de una parte de curva permite prever su prolongación con una exactitud tanto más grande cuanto menos se aleje de los puntos que están ya determinados. Si la curva dada se encuentra interrumpida en un punto singular, las previsiones serán necesariamente erróneas [...] En todo caso no se debe contar con una exactitud absoluta, salvo para las ciencias completamente independientes de la experiencia, es decir, para las puramente ideales. [P. Worms de Romilly, *Sur les premiers principes des sciences mathématiques*, Hermann, París, 1908, pp. 49-50].

En su libro *L'homme devant la science* [Flammarion, París, 1946] el biólogo francés Pierre Lecomte du Noüy, se expresa en estos términos [p. 55]:

La interpolación, aunque es infinitamente menos arriesgada que la extrapolación, conduce a veces a serios errores [...]

Pero el verdadero peligro radica en la extrapolación, en la que la curva descansa en falso y sólo está apoyada experimentalmente de un solo lado. Esto implica tener fe, no sólo en la continuidad, sino también en la validez de las relaciones expresadas por la ecuación de la curva más allá de los límites de la experiencia. [París, 1883-Nueva York, 1947].

Más adelante dice:

Extrapolar es introducir automáticamente un nuevo elemento humano que, por el hecho mismo de que la comprobación experimental ya no es posible con las mismas técnicas, transporta el fenómeno objetivo a un plano cualitativo diferente. [P. 56].

Existe otro problema fundamental. Hay que tomar conciencia de que la objetividad científica es un ideal, que el investigador es un hombre y que puede ser grande la tentación de *ordenar* los hechos para forzarles a expresar lo que uno desea. En ciencia como en pintura existen falsificaciones y es un mito pensar que todas las experiencias son siempre repetidas y comprobadas por otros científicos. Es un problema importante al que dos periodistas americanos han dedicado una detallada encuesta. [W. Broad, N. Wade, *La Souris Truqueé*, Seuil, París, 1987].

Aunque sus conclusiones sean muy pesimistas y tiendan a hacer creer que todos los científicos cometen fraudes aun cuando no se trate más que de casos aislados muy poco numerosos, es un estudio interesante puesto que señala aspectos poco conocidos: la investigación de la confirmación a cualquier precio, las relaciones profesor-alumno, el peso de la comunidad científica...

Como explica Pierre Thuillier en la introducción a *De Archimède à Einstein* [Fayard, París, 1988], la imagen que ofrece la ciencia al público es a menudo simplista ya que se reduce a todo o nada, sí o no, y es la imagen sostenida por algunos epistemólogos. Luchando contra esta imagen simplista, Paul Feyerabend [*Contre la méthode,* Seuil, París, 1979] pudo decir que el método científico no existía y que las ideas más extravagantes e irracionales podían ser fecundas. Evidentemente esto es una exageración en sentido contrario, pero que contiene una parte de verdad. [Sobre el conjunto de estas aproximaciones, ver: A. F. Chalmers, *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?*, Siglo XXI, Madrid, 1982].

Lo raro y lo irracional tienen su sitio en todo descubrimiento científico, pero cierta dosis de método está igualmente presente. Para intentar hacer comprender qué es el acto creador y cuáles son los diferentes métodos de trabajo que conducen a él, lo mejor es ceder la palabra a otros.

El actor creador, la iluminación, parecen, en efecto, escapar a toda lógica, a todo método. Numerosos testimonios concuerdan sobre este punto:

El pensamiento verbal e incluso el pensamiento consciente en general no desempeñan más que un papel secundario en la breve fase decisiva del propio acto creador. Se ha sobrevalorado el papel de los procesos estrictamente racionales y verbales en el descubrimiento científico. Lo irracional forma parte integrante de todo proceso creador [...] [Koestler, *Le cheval*..., pp. 170-171].

Esta notable coordinación de las piezas de la doctrina se prepara sin saberlo sus artífices, por lo menos los artífices de primera hora [...] Ignoran el fin y sin embargo esta ignorancia no impide alcanzarlo. La actividad del hombre prepara el porvenir sin verlo. [A. Darbon, *L'historie des sciences dans l'oeuvre de P. Duhem,* Mém. Soc. Sci. Phys. Nat., Burdeos, 7ª serie, Tomo 1, Cuaderno 22, 1928].

Lo que hace que un científico tenga más valía que otro es justamente esta facultad inexplicable de ver lo que otros no habían visto, de comprender analogías, en una palabra de tener ideas originales y que se revelen fecundas. En *L'Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*, Claude Bernard escribe:

No existen reglas que hagan nacer en el cerebro, a propósito de una observación dada, una idea justa y fecunda [...]

Este es un sentimiento particular, un *quid proprium* que constituye la originalidad, la invención o el genio de cada uno [...]

Hay hechos que no dicen nada a la mayoría, mientras que resultan luminosos para otros. Ocurre, incluso, que un hecho o una observación permanece durante mucho tiempo ante los ojos de un científico sin inspirarle nada; después, de pronto, se hace la luz y el espíritu interpreta el mismo hecho de distinto modo que lo había hecho anteriormente y encuentra relaciones totalmente nuevas.

La idea es la semilla; el método, el suelo que le suministra las condiciones para desarrollarse y dar los mejores frutos según su naturaleza [...]

Los hombres que presienten nuevas verdades son escasos; en todas las ciencias, la mayoría de los hombres desarrollan y persiguen las ideas de un reducido número de científicos. Los que hacen los descubrimientos son los promotores de ideas nuevas y fecundas [...]

Habría que evitar ordenar el uso de hipótesis e ideas cuando se trata de diseñar la experiencia o de imaginar medios de observación. Por el contrario, se debe dar rienda suelta a la imaginación; esta idea es el principio de todo razonamiento y de toda invención y a ella corresponde toda clase de iniciativa. [Pp. 66-67].

Como decía Einstein:

Hay que distinguir claramente entre lo que es esencial, lo que constituye los fundamentos y la erudición más o menos superflua. Hay que abandonar toda esta multitud de cosas dispares que normalmente entorpecen nuestro espíritu y lo apartan de lo esencial. [*Autoportrait*, InterEditions, París, 1980, pp. 20-21].

A menudo la originalidad consiste en rechazar una idea comúnmente admitida. Este punto de vista ha sido desarrollado ampliamente por Arthur Koestler. Muchas veces ha vuelto sobre él:

Los grandes descubrimientos de la Ciencia consisten a menudo en desenterrar una verdad hundida bajo el montón de prejuicios tradicionales, en huir de los callejones sin salida por los que se conduce la lógica formal separada de la realidad; en librar al pensamiento atrapado en los garfios de hierro del dogma. [Arthur Koestler, *Les somnambules*, Calmann-Lévy, París, 1960, p. 200].

Los descubrimientos decisivos en todas las ciencias, en las artes, en la filosofía, consisten en huir de los callejones sin salida, de la esclavitud de los hábitos intelectuales, de la ortodoxia, de la ultraespecialización. [A. Koestler, *Le cheval dans la locomotive*, Calmann-Lévy, París, 1968 p. 168].

El principal foco de resistencia contra novedades heréticas está dentro del cráneo del individuo que los concibe [...] Es más difícil olvidar que aprender. [Pp. 169-170 Koestler, *Le cheval...*].

Jacques Monod dijo:

Para que la investigación sea interesante, hay que poner el dedo sobre una paradoja.

Y Charles Nicolle [p. 92]:

La invención es una idea original, una manera inédita de examinar la cuestión, el efecto de una asociación imprevista de ideas. No nacerá en el cerebro de los obreros, doblegados después de años dedicados a su tarea y cuyos ojos disciplinados y miopes no sabrían alejarse de un campo demasiado estrecho. Las ideas nuevas sólo han surgido de los campos amplios. Sin libertad de obrar no hay invención.

Lo cual explica por qué numerosos descubrimientos son realizados por jóvenes investigadores al comienzo de su carrera, cuando todavía no tienen costumbres ni ideas preconcebidas. Platón escribió: *La experiencia arrebata más de lo que aporta*, aunque abunden los contraejemplos.

Arthur Koestler considera que la investigación de una cierta belleza, de una emoción artística, puede guiar inconscientemente al investigador:

El acto creador es un salto a lo desconocido tanto para el científico como para el artista: uno y otro dependen por el mismo motivo de sus intuiciones falibles. Y los más grandes matemáticos o físicos reconocen que en esos momentos decisivos, cuando dieron el salto, no estaban guiados por la lógica sino por un sentido de la belleza que no saben definir [...] En otras palabras la experiencia de lo verdadero, por muy subjetivo que sea, es necesaria para que nazca la experiencia de lo bello; y recíprocamente, la elegancia de la solución de un problema proporciona al conocedor la experiencia de lo bello. Iluminación intelectual y catarsis emotiva son aspectos complementarios de un proceso indivisible. [A. Koestler, *Le cheval dans la locomotive,* pp. 184-185].

En otros casos, la analogía puede ser la guía del investigador aunque no sea de origen científico.

François Jacob trabajaba con Jacques Monod sobre los rendimientos de síntesis de las proteínas. Esos rendimientos variaban a lo largo del tiempo, aunque Monod pensaba que el sistema de síntesis funcionaba mediante marcha o paro, todo o nada. Para Monod eso no se podía concebir. Sin embargo Jacob estaba a favor de esta hipótesis a causa de su sencillez. El mismo ha explicado por qué:

Se me ocurrió mientras observaba a uno de mis hijos jugando con un pequeño tren eléctrico. No tenía reostato, y sin embargo, lograba hacer avanzar su tren a distintas velocidades, pero constantes, simplemente manipulando el interruptor y haciéndole oscilar más o menos deprisa entre las posiciones de marcha y paro. Un mecanismo de ese género me parecía capaz de regular una velocidad de síntesis proteica con la condición de que la inercia del sistema fuera suficiente. ¡Este argumento del tren eléctrico no le pareció decisivo a Jacques! [p. 101].

Sin embargo, lo admitió como señaló algunos años más tarde.

Veamos aquí otro ejemplo, citado por Koestler:

Gutemberg inventó la prensa de imprimir (o en todo caso la construyó por su cuenta). Su primera idea fue fundir los caracteres como sellos o medallas. ¿Pero cómo reunir millares de sellos para hacer una impresión uniforme sobre el papel? Durante años tropezó con este problema hasta que un día en su Renania natal fue a la vendimia y probablemente se embriagó. *He visto fluir el vino, escribió, y pasando del efecto a la causa, he estudiado la fuerza de esta prensa a la que nada se resiste* [...] Entonces se hizo la luz: la prensa y el sello se combinaron para dar lugar a la prensa copiadora. [Koestler, *Le cheval...*, p. 175].

Finalmente el azar puede desempeñar un papel catalizador en el acto creador. Para designar el descubrimiento accidental, el humanista inglés, Horace Walpole (1717-1797), creó, en 1754, la palabra intraducible *serendipity*. Es el arte de aprovecharse de una ocasión fortuita para hacer un descubrimiento. Existen numerosos ejemplos que veremos más adelante.

En su autobiografía, Mark Kac cuenta que trabajaba sobre un problema que le había sugerido George Uhlenbeck. Este le había prestado sus notas de trabajo en las que había intentado atacar el problema desde un cierto ángulo. Un día Uhlenbeck reclamó sus notas a Kac y éste se las envió. Dejemos hablar a Kac:

Una tarde decidí analizar de nuevo el problema. Para no entrar en detalles técnicos, digamos que existen dos formas aparentemente equivalentes de buscar la solución. George había intentado una y llegó a un callejón sin salida. Al no tener sus notas por las que guiarme, elegí por casualidad la segunda y funcionó. En dos horas tenía la solución completa. [M. Kac., *idem* p. 120].

En lo que concierne al método que conduce al acto creador, las opiniones de los científicos difieren mucho. Ya hemos visto que Claude Bernard no creía en la existencia de un método como tal. Esta misma opinión es compartida por François Jacob:

Una vez admitida, una vez enseñada, la ciencia es fría. Fría como las técnicas que de ella resultan. Fría como los manuales que describen el contenido de ella o los libros que relatan su historia. La ciencia cuando está construyéndose presenta dos aspectos. Lo que podría denominarse ciencia de día y ciencia de noche. La ciencia de día pone en juego razonamientos que se articulan como engranajes, resultados que tienen la fuerza de la certeza. Se admira de ella su orden majestuoso como admiramos el de un cuadro de Vinci o el de una fuga de Bach. Como cuando se pasea por un jardín de estilo francés. Consciente de su proceso, orgullosa de su pasado, segura de su porvenir, la ciencia de día avanza entre la luz y la gloria.

Por el contrario, la ciencia de noche va a ciegas. Duda, tropieza, retrocede, se despierta sudorosa y sobresaltada. Dudando de todo, se busca, se interroga, se reprende sin cesar. Es una especie de estudio de lo posible donde se elabora lo que llegará a ser el material de la ciencia. Donde las hipótesis permanecen en forma de vagos presentimientos, de sensaciones brumosas. Donde los fenómenos todavía no son más que sucesos aislados sin unión entre ellos. Donde el diseño de los experimentos ha tomado cuerpo con dificultad. Donde el pensamiento camina por vías sinuosas, por callejuelas tortuosas, la mayoría de las veces sin salida. El espíritu se agita dentro de un laberinto a merced de la casualidad bajo un diluvio de mensajes, en busca de una señal, de un guiño, de una aproximación imprevista. Como un prisionero en su celda, gira en redondo, busca una salida, una luz. Sin detenerse pasa de la esperanza al fracaso, de la exaltación a la melancolía. Nada permite decir que la ciencia de noche pasará jamás al estadio de la de día. Que el prisionero saldrá de la sombra. Si esto ocurre, será de manera fortuita, como un capricho. De improviso, como una generación espontánea. No importa dónde, no importa cuándo, como el rayo. En ese momento lo que guía al espíritu no es la lógica, es el instinto, la intuición. Es la necesidad de verlo claro. Es el empeño de vivir. Dentro del interminable diálogo interior entre las innumerables suposiciones, aproximaciones, combinaciones y asociaciones que dificultan sin cesar al espíritu, un dardo de fuego rompe la oscuridad. Alumbra de pronto el paisaje con una luz cegadora, aterradora, más fuerte que mil soles. Después del primer choque comienza un duro combate con los hábitos del pensamiento. Un conflicto con el universo de los conceptos que regula nuestros razonamientos. Todavía nada autoriza a decir si la nueva hipótesis sobrepasará su tosco boceto para afinarse y perfeccionarse. Si resistirá la prueba de la lógica. Si será admitida en la ciencia de día. [F. Jacob, *La statue intérieure*, Ediciones Odile Jacob, París, 1987, pp. 329-331].

Distinta opinión tienen Pascal y Descartes para quienes todo descansa sobre el método. Según Descartes los principios de la creación y el descubrimiento son los siguientes:

Lo primero era no dar jamás por verdadera ninguna cosa que no conociera evidentemente como tal; es decir evitar cuidadosamente la precipitación y la prevención y no comprender nada más en mis juicios que lo que se presentase tan clara y tan distintamente a mi espíritu que no tuviese ninguna ocasión de ponerlo en duda. Lo segundo, dividir cada una de las dificultades que examinaba en otras tantas parcelas para poder resolverlas mejor. La tercera, conducir por orden mis pensamientos, comenzando por los objetos más simples y los más fáciles de conocer para ascender poco a poco como por grados hasta el conocimiento de los más complejos y suponiendo incluso el orden entre los que no se preceden de manera natural los unos de otros. Y lo último, hacer por todo registros tan completos y análisis tan generales que me asegurasen no omitir nada. [*Discours de la méthode*, 1637].

Sin embargo no ha obtenido todo el éxito que esperaba. [Ver P. Frédérix, *Monsieur René Descartes et son temps,* Gallimard, París, 1959].

Pascal opinaba lo mismo que Descartes:

Este método verdadero, que construiría las demostraciones con la máxima finura, consistiría, si fuera posible, en alcanzar dos cosas principales: primera, no emplear ningún término cuyo sentido no haya sido previamente explicado con claridad; segunda, no exponer jamás proposiciones no demostrables mediante verdades ya conocidas; en una palabra, definir todos los términos y demostrar todas las proposiciones. [*Réflexions sur la géométrie en général: de l'esprit géométrie, de l'art de persuader,* 1657-1658].

Para Lecomte du Noüy (con quien estoy de acuerdo) lo racional e irracional están simultáneamente presentes:

Somos conducidos a admitir la infiltración de elementos extraños en los razonamientos científicos que son capaces de influir sobre las conclusiones puramente racionales [...] Entre los factores responsables de ese estado mental podemos citar en primer lugar lo que, a falta de otra definición mejor, llamaremos el sentido estético [...] Pero sería absurdo eliminar la intuición bajo el pretexto de que descuida las etapas intermedias, indispensables para los cerebros más lentos [...] El cerebro humano no puede ser obligado a emplear los caminos ya pisados y excluir todos los demás para alcanzar una meta. Las técnicas científicas han sido establecidas para permitir al hombre un medio de abordar los problemas de la naturaleza [...] Pero algunos seres excepcionalmente dotados ignoran las etapas convencionales y *ven* la solución cuando permanece oculta a los demás, como el aviador ve en las carreteras y campos los movimientos invisibles de las tropas. [*La dignidad humana*, Brentano's, Nueva York, 1944, pp. 113-114].

Como veremos más adelante es necesario algún método en la fase de preparación del verdadero trabajo creador. Hay que impregnarse del tema como explica Buffon:

La historia natural [...] abarca todos los objetos que nos presenta el universo. Sin embargo, familiarizándose con esos mismos objetos, viéndolos a menudo y por así decirlo, sin finalidad, forman poco a poco impresiones duraderas, que pronto se unen en nuestra mente por medio de relaciones fijas e inamovibles; desde aquí nos elevamos hacia vistas más generales, por las que podemos abarcar a la vez varios objetos diferentes; es entonces cuando se está en condiciones de estudiar con orden, de reflexionar fructíferamente y de abrirse camino para llegar a descubrimientos útiles.

Por lo tanto se debe empezar por ver mucho y revisar a menudo. Aunque es necesario que la atención esté en todo, podemos prescindir de ella al principio: quiero hablar de esta atención escrupulosa que siempre es útil cuando se sabe mucho, pero que muchas veces es perjudicial para los que comienzan a instruirse. Lo esencial es equipar su mente con ideas y hechos y también impedirles, si es posible, realizar razonamientos y buscar relaciones demasiado pronto, puesto que ocurre siempre que el desconocimiento de algunos hechos y la escasa cantidad de ideas agotan su pensamiento en falsas combinaciones, cargándose la memoria de vagas consecuencias y de resultados contrarios a la verdad, los cuales formarán en lo sucesivo prejuicios que difícilmente se borrarán.

Por esto he dicho que era necesario empezar viendo mucho: también es preciso ver casi sin ningún objetivo, porque si habéis resuelto considerar las cosas sólo desde un cierto punto de vista, en un cierto orden dentro de un sistema, habréis tomado el mejor camino. No alcanzaréis el mismo conocimiento al que podréis aspirar, si dejáis en los comienzos a vuestro pensamiento caminar por sí mismo, reconocerse, asegurarse sin ayuda y formar solo la primera cadena que representa el orden de sus ideas. [Buffon, *Histoire Naturelle*, Materias Generales, Tomo 1, Primer discurso, pp. 3-8].

Si se compara este texto de Buffon sobre la historia natural con el de Gustave Choquet sobre las matemáticas escritas dos siglos más tarde, podemos darnos cuenta de la unidad de la ciencia y de la permanencia en el tiempo de algunas ideas:

En efecto, no existe un método infalible para aprender a descubrir; cada uno debe encontrar por sí mismo el secreto. Pero, al menos en matemáticas, hay que cumplir ciertas condiciones mínimas para iniciar el trabajo sobre un tema concreto: primero conocer bien los seres que lo habitan, enfrentarse con una gran variedad de ellos, hasta el punto de prever sus reacciones, de penetrar en su vida íntima. Entonces uno comienza a plantearse preguntas: en tal circunstancia, ¿cómo se comportan estos seres? Dicho en otras palabras: uno llega a plantearse un problema personal, formulado por uno mismo o que otros en el presente o en el pasado ya se habían planteado.

Aquí debe intervenir el carácter personal del investigador. Se encuentra en una situación análoga a la del alpinista que al pie de la montaña quiere alcanzar la cumbre: unos se adaptarán a la montaña, buscarán las vías más fáciles o las más elegantes; otros, por el contrario, utilizarán sin vacilar el método *bulldozer*; crear una amplia rampa de acceso, de suave pendiente que podrá ser utilizada sin peligro por quienes vengan detrás. No existe por tanto un método único para resolver un problema o comenzar una investigación.

Personalmente prefiero el método siguiente: el primer paso consiste en una *ampliación del cuadro*. Se enuncia el problema en un cuadro más general en el que sus términos conservan un significado preciso; después se estudian en este caso general algunos casos particulares bien elegidos, si se pueden resolver por un método que tenga sentido en el caso general, sólo faltará adaptar este método al problema inicial.

El comportamiento de un investigador, bien en matemáticas o en ciencias experimentales, es a menudo análogo al de un explorador en un bosque cuando busca una fuente o una especie rara de insectos: camina por una estrecha pista, con la mente alerta, abierta a las sugerencias; explorará incansablemente los senderos laterales. Y, a veces, ocurre el milagro: sale a la búsqueda de una mariposa y descubre un arroyo que lleva pepitas de oro.

Por lo tanto: el inicio es modesto, la marcha progresiva; una impaciencia, una ambición desmedida pueden suponer el fracaso de la empresa. [G. Choquet, *La naissance de la théorie des capacités: réflexion sur une expériencie personnelle*, La Vie des Sciences, Comptes rendus, Serie general, Tomo 3, nº 4, 1986, pp. 385-397].

Aparece con frecuencia la metáfora del alpinista o de modo más general la del explorador:

La imagen de la investigación en física teórica es la escalada. Cuando se acomete un problema de física nunca se está seguro de llegar a la solución, puesto que los caminos sin salida y los abismos son innumerables. El investigador nunca está seguro de alcanzar la cima; toma caminos todavía inexplorados y a veces alcanza otra cima distinta a la que aspiraba. Lo que se ve al pie de la montaña y lo que se descubre una vez que se llega a la cima, es incomparable. Ocurre lo mismo en física: una vez que la solución se ha encontrado, la perspectiva se extiende desmesuradamente. [Heinz Pagels, *L'Univers quantique*, InterEditions, París, 1985, p. 301].

Estamos en una jungla y encontramos nuestro camino a tientas, trazando nuestra ruta tras nosotros, a medida que avanzamos. No encontramos postes indicadores en los cruces; son nuestros exploradores quienes los colocan para ayudar a los siguientes. [M. Born, *L'expérience et la théorie en physique*, Gauthier-Villars, París, 1955, p. 50].

El científico es como un hombre que querría ver lo que hay sobre una torre. Por más que se esfuerce en saltar y diga que acabará saltando lo suficientemente alto, nunca lo conseguirá. Tras cansarse de este ejercicio comprenderá que es necesario aproximarse a la torre, plantar piquetes o peldaños para subir poco a poco. Pero será conveniente que se asegure a cada paso de que sus piquetes o peldaños son sólidos. Puede ocurrir que haya división del trabajo [...] un hombre que traiga el piquete, otro que lo plante, etc. Esta especialización es útil en el aspecto instrumental pero sería perjudicial si lo fuera del espíritu y jamás la especialidad debe estar en la

cabeza. Es preciso pues que el espíritu no pierda de vista el conjunto de la torre y que retroceda de vez en cuando para verla en su conjunto con el objeto de ver si los trabajos particulares que se ejecutan están bien dirigidos, siguiendo la meta que se quiere alcanzar: subir a lo alto de la torre. [Claude Bernard, *Philosophie*, p. 31].

Para que la iluminación se produzca hay que pensar sin descanso en el problema, no hay que perderlo de vista nunca. Las opiniones concuerdan sobre este punto:

La invención depende de la paciencia; es preciso ver, mirar durante mucho tiempo su tema: entonces se aclara y se avanza poco a poco; sentís una pequeña descarga que os golpea la cabeza y al mismo tiempo os sobrecarga el corazón: aquí se manifiesta el genio. [Buffon].

Si yo he hecho algún descubrimiento, ha sido pensando sin cesar en el tema que me ocupaba, examinándolo en todos sus aspectos; la investigación de una verdad oculta, a menudo me ha descubierto otras en las que nunca hubiera pensado. Un descubrimiento lleva a otro, y uno mismo se extraña de las ideas generales que nacen de un examen serio y atento [...] Mantengo constantemente ante mí el tema de mi investigación, y espero a que las primeras luces comiencen a encenderse ante mí lentamente poco a poco, hasta que se convierten en una claridad íntegra y plena. [I. Newton, citado por G. Laurent, p. 84].

Una opinión similar tiene Ivan Pavlov:

Por la mañana, levantaos con vuestro problema ante vuestros ojos. Desayunad con él. Id al laboratorio con él. Almorzad con él. Por la noche regresad a casa con él. Cenad con él. Mantenedlo con vosotros después de cenar. Id a la cama con él. Soñad con él [...]. [Citado en Baker, p. 64].

Por tanto los científicos tienen siempre en la cabeza el problema sobre el que trabajan. Así puede aparecerles la solución en diversas situaciones o cuando el pensamiento puede vagar sin prisas. Jacques Monod decía un lunes por la mañana a una colaboradora: *pensé en eso ayer, escalando un peñasco en Fontainebleau* .

Esta concentración en todos los instantes explica también las numerosas distracciones que tienen y que pueden molestar a la gente que les rodea. Yo no voy a hacer aquí un catálogo de esas distracciones, pero sí voy a contar algunas de ellas a título de curiosidad.

Jacques Monod parece haber dado prueba de tener una capacidad de concentración superior a la media: cuando llamaban a la puerta de su despacho, no era raro que descolgara el teléfono, dijera *Allo* y después colgara. Un día llegó al Instituto Pasteur riéndose porque su mujer le había llevado en coche, y al bajar, él le había dado dinero para pagar su viaje.

Helmholtz describe así una visita a casa de William Thomson, Lord Kelvin:

No podía ser más frío y sin maneras [...] Thomson pasaba de la amabilidad al extremo de llevar siempre consigo su cuaderno de problemas y notas, y en medio de una recepción era capaz de ponerse a resolver una ecuación que le preocupaba, lo cual no dejaba de producir una cierta tensión en el ambiente. Si yo hiciera lo mismo con nuestros berlineses, ¿qué crees que pasaría? Pero la mayor de sus tonterías fue un viernes que recibía en su yate: apenas nos hubimos adentrado en alta mar, habiéndose situado los invitados del mejor modo que pudieron en previsión del balanceo, desapareció en su cabina para enfrascarse en unos cálculos, dejando a sus huéspedes ocupados en distraerse mutuamente si buenamente estaban de humor; como bien adviertes, el corazón estaba en otra parte. Aproveché para pasear por el puente «*in schwankender Anmuth*». [J.G. Crowther, *William Thomson,* Hermann, París, 1948, p. 4].

Podríamos multiplicar este tipo de ejemplos. Pero volvamos a nuestro tema.

Hay que dejar las ideas germinar solas en el cerebro. Hay que dejar operar la cristalización como recuerda Stendhal en *De l'amour*:

En las minas de sal de Salzburgo arrojan a las profundidades abandonadas de la mina una rama de árbol deshojada por el invierno; dos o tres meses después se extrae cubierta de cristales brillantes: las ramas más pequeñas están adornadas de una infinidad de brillantes móviles y deslumbradores; ya no se puede reconocer la rama primitiva. [P. 5].

Si las ideas no acuden hay que cambiar de actividad. Como explica Edison:

Yo no reflexiono nunca sobre un tema mucho más tiempo del que tengo ganas. Cuando siento debilitarse mi interés por él paso a hacer otra cosa. Siempre tengo de seis a ocho hierros en el fuego y voy del uno al otro, según mi humor. Muchas veces trabajo en algo hasta sentirme saturado, entonces paso a otra cosa; después la idea que yo esperaba me viene de repente. Entonces me pongo a explotarla abandonando lo demás. [En: R.W. Clark, *Edison,* Belin, París, 1986, p. 93].

Otra posibilidad es atacar el problema (la montaña) por otro camino. Ya hemos visto a Mark Kac utilizar esta técnica a pesar suyo. También a Edison, quien fue, entre otras cosas, el inventor de la bombilla eléctrica.

En su laboratorio, dos matemáticos intentaban inútilmente calcular el volumen de una bombilla. Era tarde. Edison, con una expresión maliciosa en su mirada, pidió a su secretaria que volviera al día siguiente por la mañana. Ella cuenta:

Entré en casa y puse mi despertador a las cinco y media. A las seis ya estaba en la biblioteca donde trabajaban los matemáticos. Edison me dijo que fuera al laboratorio, tomara una bombilla vacía y la llenara de agua, que tomara un vaso graduado y trajera todo a la biblioteca. Entonces Edison cogió en una mano la bombilla llena de agua y en la otra el vaso graduado. Al verter el agua en el vaso pudo leer sobre la escala graduada el volumen de la lámpara que los matemáticos habían tratado de calcular inútilmente toda la noche. [En: R.W. Clark, *Edison,* Belin, París, 1986, p. 126].

También se puede simplemente descansar o dormir.

El científico ruso Piotr Kapitza, que obtuvo en 1978 el premio Nobel de Física por sus trabajos sobre física de bajas temperaturas, permaneció en 1924 en el laboratorio de Cavendish de Cambridge, entonces dirigido por sir Ernest Rutherford. Se entregaba apasionadamente a su trabajo, sin dudar en quedarse en su despacho hasta medianoche. Al cabo de dos meses, Rutherford citó a Kapitza para decirle que así no llegaría a ningún sitio. Kapitza protestó diciéndole que trabajaba mucho, quedándose con frecuencia hasta muy tarde en el laboratorio. *Justamente, concluyó Rutherford, eso es lo que no le conviene. Trabaja sin descanso y no le queda tiempo para pensar.* Esto significaba naturalmente que era necesario tener tiempo libre para que el pensamiento pudiera vagar según su voluntad. Hay que tener tiempo para sentarse en un sillón y reflexionar y dejar vagar los pensamientos. Se dice que: *un investigador que ya no sepa perder su tiempo está perdido para la investigación.* Eso explica por qué numerosos descubrimientos se han realizado cuando el pensamiento del investigador estaba ocupado en otra parte o cuando se entregaba a una actividad diferente. También explica las iluminaciones que despiertan al científico o le sobrevienen al levantarse de la cama, en el baño o mientras se afeita. Veremos ejemplos más tarde. Otro investigador escribió:

Si vuestro pensamiento está demasiado ocupado por vuestros experimentos, no reflexionaréis. Generalmente durante un periodo de somnolencia o de aburrimiento pueden obtenerse las soluciones de los problemas. Cuando vaga vuestro pensamiento es cuando realmente pensáis en el buen experimento.

[Julius Axebrod, "Biochemical pharmacology", en *The joys of research*, N. Shropshire, Jr. (ed.), Simthsonian Institution Press, Washington, D. C., 1981].

Muy a menudo se encuentran cosas diferentes a las que se buscaban, el matemático T. J. Stieltjes lo ha expresado así:

Ciertamente, no sabríamos fijar de antemano en nuestras investigaciones la meta a alcanzar; se busca, pero no se sabe lo que se encontrará y a veces uno se lanza por rutas imprevistas. Creo que la utilidad de investigaciones sobre funciones particulares es también la de enseñarnos la meta a alcanzar en las investigaciones más generales. Si para edificar teorías generales uno se deja guiar únicamente por la imaginación, se corre el riesgo de encontrar teorías estériles e inútiles. El Análisis tiene sus propios secretos que no se dejan adivinar, pero que es necesario descubrir con un estudio paciente. [Stieltjes, carta a Hermite del 26 de octubre de 1894].

Una vez que el problema está resuelto, el investigador no permanece inactivo y sigue preguntándose cuál será la nueva cuestión en la que trabajar:

Así, ocurre frecuentemente que la solución de un problema lleva a plantearse un nuevo problema. Parece como si apareciera delante de él una zona opaca que rehusara la luz. [G. Bachelard, *Le pluralisme cohèrent de la chimie moderne,* Vrin, 1932, p. 149].

Todas las ideas desarrolladas anteriomente se encuentran en el siguiente texto del físico alemán Hermann von Helmholtz:

Pero el orgullo que he podido sentir ante el resultado final de esas investigaciones, quedó considerablemente aminorado por el hecho de saber que sólo había conseguido resolver tales problemas, tras numerosas tentativas erróneas que fueron generalizando ejemplos favorables y conjeturas acertadas. Podría compararme a un alpinista que, desconociendo el camino a seguir, sube lentamente, con dificultad, y a menudo se ve obligado a retroceder sobre sus pasos cuando su progreso se ve detenido; o con quien tanto por razonamiento como por accidente cae en las señales de un nuevo sendero que le conduce un poco más lejos, y que cuando finalmente llega a su meta descubre con irritación un camino real por el cual habría podido subir a caballo si hubiera pensado desde el principio en encontrar el punto de partida idóneo [...]

A menudo me he encontrado con la desagradable obligación de esperar la llegada de ideas útiles y he tenido una cierta experiencia del momento y lugar en que ellas me aparecían, lo que quizás podría servir a otros. Pasan de largo

por el camino del pensamiento sin que su significado se comprenda de inmediato; más tarde, una circunstancia accidental revela cómo y bajo qué condiciones han surgido. A veces están ahí, sin que sepamos cómo han surgido. En otras ocasiones, surgen de pronto sin esfuerzo, como una inspiración. Por lo que he podido comprobar nunca aparecen a un cerebro cansado ni delante de un escritorio.

Me he visto obligado a volver sobre mis problemas en todos los sentidos para ver sus recovecos y complicaciones y a repensarlos libremente sin exponerlos sobre el papel. Sin embargo, en general, no me era posible alcanzar ese estadio sin un largo trabajo preliminar. Entonces, una vez que la fatiga del trabajo había pasado, precisaba una hora de reposo corporal perfecto y de confort tranquilo antes de que vinieran ideas fructuosas. A menudo aparecían por la mañana al despertar, y así lo ha señalado también Gauss. Pero como yo afirmaba una vez en Heidelberg, tenían tendencia a aparecer sobre todo cuando trepaba tranquilamente por colinas arboladas en un día de Sol. La mínima cantidad de alcohol parecía hacerlas huir [...]. [E. Segré, *Les physiciens classiques et leurs découvertes*, Fayard, París, 1987, p. 264].

También hay que saber que todo investigador comete errores. Veremos más adelante un ejemplo e incluso hay un libro entero dedicado a los errores de los matemáticos célebres. Es preciso aprender de ellos la lección.

William Shockley, que obtuvo en 1956 el premio Nobel de física con John Bardeen y Walter Brattain por el descubrimiento del transistor, dijo durante una conferencia en 1969 en la Universidad de Colorado:

Una conclusión vital, obtenida meditando sobre el pensamiento, es que la creatividad está asociada con el fracaso. El pensamiento que crea una asociación de ideas relativamente nuevas y ordenadas ha errado habitualmente por caminos torcidos y aparentemente infructuosos y ha soportado decepciones. Sin embargo los trabajos emprendidos que conducen a esas frustraciones son una parte esencial de la creatividad. Emprender tales trabajos permite a la mente competente darse cuenta de los conceptos que son los atributos claves de la situación caótica a la que uno se ha enfrentado. La metodología del fracaso creativo utiliza un conjunto de herramientas del pensamiento escrutador que, aunque fracase en sus primeros esfuerzos, permiten tener consciencia de los puntos claves del problema. Así, pensar en el pensamiento fomenta la tolerancia de sus limitaciones humanas inevitables y permite al individuo ser más creativo reconociendo que sus fracasos son a menudo cubos utilizables para adquirir fuerza intelectual en una nueva situación. [Citado por R. Slater, *Portraits in Silicon*, The MIT Press, Cambridge, Mass., 1987, pp. 150-151].

La misma opinión fue formulada por el físico japonés Yukawa que recibió el premio Nobel por el descubrimiento del mesón:

Por supuesto, los errores no son en modo alguno desperdiciados [...] Según un viejo proverbio *El error es la madre del éxito*. Yo mismo he trabajado duramente desde por la mañana hasta el crepúsculo sólo para acabar tirando a la papelera lo que había hecho. Cuantitativamente lo que guardo, ya que alguna cosa puede salir, es incomparablemente menor que lo que he tirado y sin embargo creo que es esto lo que sirve de base a la creación. [H. Yukawa, *Creativity and intuition*, Kodansha Intn'l Ltd., Tokio, 1973, pp. 129-130].

En matemáticas, el proceso hacia el descubrimiento es el mismo que en otras ciencias.

Ciertamente, si desde el punto de vista de la lógica estricta, una demostración no existe si no está acabada y es completamente rigurosa, también es cierto que un hecho matemático no está logrado hasta que no ha sido demostrado. Sin embargo no se hace ningún descubrimiento en matemáticas, ni en otras ciencias, mediante un esfuerzo de lógica deductiva. Es el resultado de un trabajo de creación de la imaginación, que construye aquello que parece ser verdad, guiada a veces por analogías, otras por un ideal estético, pero nunca construye sobre sólidas bases lógicas. Una vez hecho el descubrimiento, la lógica interviene para la comprobación; es ella la que decide finalmente si se trataba de un verdadero descubrimiento y no de una ilusión; su papel es pues considerable, a pesar de ser sólo secundario. La imaginación interviene además para descubrir los caminos por los que debe introducirse la demostración lógica. Y la mayoría de las veces ésta se adquiere tras algunos intentos infructuosos y precisamente gracias al empleo simultáneo de las ideas que habían presidido la elaboración de pruebas insuficientes. [H. Lebesgue, *Vandermonde*].

Cada descubrimiento llega a su hora y se hace posible gracias a los anteriores. En cada momento los conocimientos previos sugieren nuevas preguntas y la manera de contestarlas.

Muchas proposiciones nuevas han sido inferidas de la observación, sobre todo en la teoría de números [...] Aunque esos cálculos no se hacen al azar; están dirigidos por un pensamiento, una analogía, un presentimiento que verifica o modifica los resultados. El matemático a veces espera el resultado del cálculo en el que se ha sumergido con la misma impaciencia que el físico el resultado de un experimento crucial [...] Para los matemáticos una parte del genio de invención consiste en imaginar nuevos problemas que abordar con los métodos de que dispone [...] En las distintas ciencias, la materia e instrumentos difieren, pero el camino de la invención es el mismo. Los mismos ensayos, los mismos titubeos, la misma paciencia tensa y activa hacia un objeto que a veces se ilumina, las mismas esperanzas equivocadas, la misma sutileza e imaginación para apoderarse de las analogías, los vínculos ocultos, las relaciones inesperadas. [J. Tannery, *De la méthode dans les sciences*, Tomo I, pp. 64-65].

Poincaré escribió:

Sólo se llega a lo general partiendo de lo particular; esto también es cierto en las ciencias exactas, pues aunque en la demostración se vaya de lo general a lo particular, para la invención se debe realizar el recorrido inverso, al igual que en las ciencias experimentales.

En ocasiones sucede que uno cree poder saltarse etapas de este proceso, pero no tardará en darse cuenta que a estos conocimientos adquiridos con demasiada rapidez les falta profundidad.

Por tanto cuando se cree poseer el medio de resolver una amplia categoría de problemas, no hay que volver atrás sino tratar en detalle un caso particular. Este estudio nos hará conocer el valor del método general y nos permitirá tomar los elementos esenciales y descubrir aquellos que pueden servir de germen para una generalización posterior.

Si todos los matemáticos se abandonaran a la primera tendencia, la ciencia no tardaría en saturarse con una multitud de métodos prácticamente inaplicables y los científicos se acostumbrarían muy rápidamente a contentarse con poco. Quienes conozcan el estado actual de las matemáticas no considerarán que este temor sea infundado. [*Savants et écrivains*, pp. 136-138].

Y Borel nos dice:

La invención propiamente dicha y verdaderamente fecunda consiste, tanto en matemáticas como en otras ciencias, en el descubrimiento de un nuevo punto de vista para clasificar e interpretar los hechos. [E. Borel, *Revue de Métaphysique et de Morale*, *15* (1907), 273-283].

El sentimiento de belleza y sencillez que rodea a numerosas teorías físicas tiene igualmente su sitio en matemáticas:

Las matemáticas son un lenguaje, el de la naturaleza. Si ignoráis una lengua, no podréis apreciar la belleza de su poesía. Siempre hay escépticos que dicen *¿qué es esa misteriosa belleza matemática de que me habláis? Yo no veo nada de bonito en esa maraña de símbolos. Vosotros físicos, os adormecéis de ilusión*. Yo respondo comparando las matemáticas con la música. A quien nunca haya escuchado más que notas aisladas, será imposible explicarle la belleza de una sinfonía. Sin embargo ¿quién negaría que existe una belleza real en una sinfonía aunque sea de naturaleza abstracta e indefinible? Del mismo modo, a una persona cuya experiencia en matemáticas se limite a contar, ¿cómo comunicarle el gran sentimiento de placer, la llamada profunda y rica de las ecuaciones de Maxwell? Mas a pesar de todo, su carácter estético está muy presente. [Paul Davies, *Superforce*, Payot, París, 1987, pp. 84-85].

En una carta a Sofía Kovalewskaia, Weierstrass escribía: «es cierto que un matemático que no tenga algo de poeta, jamás será un matemático completo».

La única diferencia que existe entre las matemáticas y las otras ciencias reside en el modo de incrementar los conocimientos:

[...] quizás habría que establecer una distinción entre las ciencias matemáticas y las ciencias experimentales. Al ser las verdades matemáticas inmutables y absolutas, la ciencia aumenta por yuxtaposición simple y sucesiva de todas las verdades adquiridas. Por el contrario en las ciencias experimentales, al ser las verdades solamente relativas, la ciencia no puede avanzar más que por revolución y absorción de las verdades antiguas en una forma científica nueva. [Cl. Bernard, *Introduction....* p. 75].

Charles Lutwidge Dodgson, alias Lewis Carroll, se expresaba así en 1888 en el prefacio de su libro *Curiosa Mathematica*:

Dudo seriamente que en el universo de la ciencia exista un tema tan fascinante para el explorador, tan rico en tesoros escondidos, tan fértil en sorpresas deliciosas como el de las matemáticas puras. En mi opinión su encanto reside en la certeza absoluta de sus resultados; ¡es precisamente a lo que aspira el intelecto humano por encima de todos los tesoros del espíritu! [...] La mayoría de las otras ciencias están en perpetuo cambio, las inestimables verdades de una generación son consideradas paradojas por la siguiente y eliminadas con desprecio por la posterior que las considera necias y pueriles. Si queréis un ejemplo de la rapidez de este proceso de descomposición, mirad a la biología: citad a un biólogo eminente un libro publicado hace treinta años y observad su sonrisa compasiva.

Pero ni treinta años ni treinta siglos dañan la limpidez y el encanto de las verdades geométricas. Un teorema como: *el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados* es tan bello y tan fascinante hoy como era cuando lo descubrió Pitágoras y festejó su hallazgo, según nos cuenta con el sacrificio de una hecatombe de bueyes -manera de celebrar la ciencia que siempre me ha parecido un poco excesiva y superflua. [Jean Gattégno, *Lewis Carroll, une vie,* Seuil, París, 1974, pp. 150-151].

Esta manera particular de acumular conocimientos hace imperiosa la necesidad de síntesis:

Si los descubrimientos de los matemáticos se unieran unos con otros, como se recopilan las recetas de un libro de cocina, serían desde hace mucho tiempo tan numerosos que resultaría completamente imposible para cualquiera de nuestros contemporáneos llegar a conocerlos todos dedicando incluso una larga vida. Por eso no sería posible agregar descubrimientos nuevos ni soñando.

Si pese a esa acumulación enorme de resultados el progreso de la ciencia ha sido posible es porque grandes síntesis han permitido a las nuevas generaciones desentenderse de un gran número de trabajos cuyos detalles habían llegado a ser inútiles y que en lo sucesivo iban a poder ser resumidos en unas pocas líneas. [E. Borel, *Les cahiers de Radio-París*, 8º año, nº 9, 15 sept. 1937, pp. 825-869].

Parece que el proceso de creación se desarrolla de forma análoga en otros dominios de la actividad intelectual, como el arte o la literatura. A. F. Osborn ha citado numerosos ejemplos en su libro *Créativité, l'imagination constructive* [Dunod, París, 1988]. Aquí presentamos uno debido a Somerset Maugham:

Las historias vienen a mí directamente. Estoy convencido de que el subconsciente efectúa el trabajo realmente difícil. Creáis de forma original a partir del subconsciente, y después, las reescrituras y revisiones continúan con los perfeccionamientos y las ampliaciones hasta que estáis convencidos de que por medio del trabajo consciente del pensamiento habéis hecho todo lo posible. [Citado por Wilmon Menard, *The India of Somerset Maugham,* NamasKaar (The niflight magazine of Air-India), mayo-junio 1988, pp. 13-17].

La ciencia progresa lentamente. Hay que dejar que los conocimientos se acumulen y maduren. Es el fruto de una multitud de servidores que aportan cada uno su piedra al edificio común. De vez en cuando surge un genio fuera de lo común que le hace dar un paso de gigante. Condorcet y Duhem se han expresado sobre la marcha de la ciencia:

Hay obstáculos que sólo pueden vencerse con el paso del tiempo, hay trabajos que en modo alguno pueden acelerar el éxito y para los cuales se precisa una voluntad sostenida y dirigida durante mucho tiempo hacia el mismo fin, a juzgar por los vastos medios y los esfuerzos combinados de gran número de científicos. [Condorcet, "Fragment sur l'Atlantide" en *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain. Fragment sur l'Atlantide,* Flammarion, París, 1988, p. 301].

La ciencia, en su caminar progresivo, no conoce los cambios bruscos; crece escalonadamente; avanza paso a paso. Ninguna inteligencia humana por muy poderosa y original que sea sabría producir con todas las piezas una doctrina absolutamente nueva. El historiador amigo de vistas simples y superficiales celebra los descubrimientos fulgurantes que, tras la noche profunda de la ignorancia y el error, han hecho llegar el pleno día de la verdad. Pero aquel que somete a un análisis penetrante y minucioso la invención más espontánea y aparentemente más imprevista, obtiene casi siempre como resultado una multitud de imperceptibles esfuerzos y la concurrencia de una infinidad de oscuras tendencias. Cada fase de la evolución, que conduce lentamente a la ciencia a su conclusión, aparece marcada por estos dos caracteres: La continuidad y la complejidad. [P. Duhem, *Origines de la statique*, Hermann, París, 1906].

El científico, para investigar, debe estar libre de toda obligación, no debe sentirse nunca sujeto a ciertos apremios, y en particular, al de la utilidad de su trabajo:

Pues ésta [la sana curiosidad por la investigación] es una planta extremadamente frágil que, si necesita estímulo, reclama sobre todo libertad y si falta ésta se debilita indefectiblemente. [*Id.*, p. 22, Einstein, *Autoportrait*].

La condición previa para la investigación científica es una sociedad que no exija al científico ser *útil* sino que le proporcione la libertad necesaria para la meditación y el trabajo minucioso y concienzudo sin el cual la creación es imposible [...] El verdadero científico está dispuesto a soportar las privaciones, y si es necesario el hambre, antes que dejarse llevar por la dirección que su trabajo debe tomar. [A. Szent-Györgyi, citado en J. R. Baker, *La science et l'état planifié,* Librairie des Médicis, París, 1946, p. 49].

Resumamos este capítulo con algunas citas.

En primer lugar hay que aprender:

Si se quiere encontrar, hay que aprender, y esto supone un largo esfuerzo. Hay que acumular informaciones, pero sin contentarse con una disciplina [...]. [Rouleau-Laborit, p. 115].

Después se empieza a reflexionar:

Todo descubrimiento es el fruto de un trabajo precursor seguido de una puesta a punto. [L. Boltzmann, *Sur l'Aéronautique*, p. 82].

Pero el camino es largo y la ascensión es difícil:

Sé a través de mi propia y dolorosa investigación, que es difícil, en la búsqueda de la verdad, avanzar, por poco que sea, con certeza; ¡hay tantos callejones sin salida antes de llegar a comprender lo que es verdaderamente significativo! [A. Einstein, *Correspondance*, InterEditions, París, 1980, p. 28].

A veces hay que dar un largo rodeo antes de llegar a la solución:

El único camino que se ha manifestado practicable es el camino recto. Lo único que resulta incomprensible es el haber estado obligado a andar a tientas tanto tiempo antes de encontrar aquello que estaba muy próximo. [Carta de A. Einstein a M. Besso, principios de marzo de 1914, en *A. Einstein, Correspondance avec Michele Besso*, Hermann, París, 1979, p. 32].

Pero no hay que desalentarse:

Se debe tener la suficiente confianza en el talento propio, en sus posibilidades asociativas y creativas. [F. Rouleau, H. Laborit, *L'alchimie de la découverte,* Grasset, París, 1982, p. 130].

Finalmente viene el descubrimiento:

[...] Todo hombre que encuentra alguna cosa de verdadera importancia sobresale por su propio descubrimiento; sólo él mismo llega a comprenderlo parcialmente tras reflexionar durante largo tiempo. [H. Lebesgue, *Vandermonde*].

Después es necesario redactar su trabajo para hacerlo accesible a los demás:

Porque al científico no le basta con ver. Debe convencer. Y para ello debe obligarse a utilizar, *a posteriori*, los métodos clásicos. Tras haber sobrevolado la selva virgen, debe construir el camino que permita al turista llegar al mismo punto. [P. Lecomte du Noüy, *La dignidad humana,* Bentrano's, Nueva York, 1944, p. 11].

Después se acomete el nuevo problema:

El científico no busca por el placer de buscar, busca la verdad para poseerla, y la posee dentro de los límites que muestran las ciencias en su estado actual. Pero no debe pararse en el camino, debe elevarse siempre más alto y tender a la perfección, debe siempre buscar mientras piense que puede encontrar algo. Sin esta excitación constante producida por el aguijón de lo desconocido, sin esta sed científica que renace constantemente, sería de temer que el científico no sistematizase lo que tiene adquirido o conocido. [Cl. Bernard, *Introduction....* p. 308].

Pero la conclusión de este capítulo pertenece al matemático francés Joseph Diaz Gergonne (1771-1859):

La mayoría de los científicos se ruborizarían si tuvieran que revelar los subterfugios que les han conducido a sus más bellos descubrimientos.

CAPITULO VI

LAS ETAPAS DEL DESCUBRIMIENTO

Es difícil hacer comprender, a quien nunca la ha practicado, cómo se desarrolla la actividad creadora de la investigación. No hay leyes ni reglas que si se aplican permitan obtener indefectiblemente resultados nuevos. Tampoco hay un método universal de trabajo.

Quisiera, sin embargo, hacer entrever a quienes no lo han vivido nunca, cuál es el proceso que conduce al descubrimiento y qué se siente después. Creo que un buen método para exponerlo será ofrecer unas citas tomadas de personas de cierta autoridad en distintas disciplinas con el objeto de mostrar la unidad de la investigación.

Veamos en primer lugar la elección de un tema y el desarrollo de una teoría:

[...] en la mayor parte de los casos, no hay pruebas que permitan mostrar por qué tal hombre de la ciencia ha elegido tal serie de conceptos y de datos antes que tal otra, en la formulación de su teoría; por las mismas razones, no se está en condiciones de describir las etapas lógicas que han marcado el desarrollo de la teoría. Es además dudoso que la mayoría de los científicos formulen sus teorías según reglas de la lógica. La intuición parece jugar un papel mucho más importante en el proceso de los descubrimientos. Se desprende de ello que la razón de muchos progresos científicos notables quede como un misterio. No podremos saber jamás por qué tal científico ha retenido ciertos hechos y ha dejado otros de lado, ni comprender cómo su imaginación ha podido avanzar para conducir a la formulación completa de su teoría; y cuanto más sabemos acerca del hombre, del individuo, más se intensifica el misterio. [Maurice Crosland, Gay Lussac, *Une étape dans la professionnalisation de la science*, La Recherche, septiembre 1974].

Habitualmente se distinguen en el proceso intelectual cuatro etapas que conducen al descubrimiento. Estas fueron fijadas por Graham Wallas en su libro *The Art of Thought* [Harcourt, Brace and Co., Nueva York, 1926]. Están basadas ampliamente en las reflexiones de Helmholtz y han sido recogidas, en lo que concierne a las matemáticas, por Jacques Hadamard en un cierto número de conferencias. [Ver su libro: *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, A. Blanchard, París, 1959].

El trabajo de investigador comienza por la *preparación* durante la cual son examinados todos los aspectos del problema y se imbuye en su tema. Después viene la incubación en la que el espíritu trabaja solo, inconscientemente, a partir de las informaciones acumuladas durante la preparación. Es una digestión y asimilación mental que se efectúa incorporando todos los conocimientos adquiridos previamente, incluso los que no parecen tener ninguna relación con la cuestión. A continuación surge la *iluminación* que, según Littré, es el *conocimiento súbito, espontáneo, indudable, como el que nos da la vista de la luz y las formas sensibles*. La última fase del trabajo consiste en la *verificación* de la validación de la intuición, bien sea con la ayuda de experiencias a través de las ciencias de la naturaleza o bien sea mediante una demostración matemática.

Cada una de esas etapas es importante y tiene lugar en todos los dominios de la actividad creadora humana. Así es como lo escribió Paul Valéry en una carta a André George:

Mi convicción, desde la juventud, fue que en la fase más viva de la investigación intelectual no hay otra diferencia que la del nombre entre las maniobras interiores de un artista o poeta y las de un sabio. [Citado en Pasteur Vallery-Radot, "L'intuition dans la découverte médicale", *Revue de Paris*, enero 1958, pp. 46-54].

Sobre estas cuatro fases se han hecho muchos estudios y recogido numerosos testimonios. Así, desde 1902 el periódico *L'Enseignement Mathématique* lanzó una encuesta sobre los métodos de trabajo de los matemáticos. En 1931, el *Journal of Chemical Education* hacía lo mismo con la química. Estos testimonios son muy preciados puesto que son informaciones de primera mano. Se solapan entre sí y naturalmente es imposible citarlos todos.

Veamos ahora el método de trabajo:

El geómetra tras haber examinado con mucha reflexión todo lo que en la ciencia puede proporcionarle ayuda, delimita el tema que va a tratar. Pronto entrevé resultados que todavía no puede alcanzar; su imaginación se lanza a comprenderlos, por los caminos por donde puede abrirse paso; busca recuperar las indicaciones que le habían guiado antes; un gran número de ideas que complican el tema, dispersan la atención y suspenden el juicio se añaden a las que se tenían. Pero, a través de este caos de pensamientos, el genio distingue una idea simple; su elección está irrevocablemente hecha, él sabe que esta idea será fecunda. [Sophie Germain, "Considérations générales sur l'etat des sciences et des lettres aux différentes époques de leur culture", en *Oeuvres philosophiques de Sophie Germain*, H. Stupuy ed., Firmin-Didot, París, nueva edición, 1896, p. 83].

Se elige un tema de investigación y se comienza a trabajar a partir de una idea *a priori*. En muchos de estos casos, la idea provenía de un terreno próximo y se intenta proceder por analogía con los resultados ya obtenidos; precisamente la etimología de la inteligencia es: *interlegere*, relacionar los conocimientos entre ellos como subraya Jacques Arsac. Demos un nuevo testimonio:

Un hecho matemático que quiera ser interesante debe, ante todo, ser bello. Un teorema puede y debe ser bello, como lo es un poema [...] Por tanto digo que un matemático que reflexiona, yo diría que contempla un teorema (ya demostrado, ya existente) experimenta con frecuencia el mismo sentimiento de belleza, la misma emoción que experimenta un poeta cuando lee un poema. Pero a pesar de lo poco poeta o pintor que yo sea, creo que el hecho matemático -interesante- comporta toda la belleza de una obra de arte más alguna cosa muy específica. Tengo la impresión de que la obra matemática comporta, además de la belleza artística, un elemento dinámico [...] Pero, de lo que estoy seguro, es de que leyendo una memoria matemática -interesante- siento movimientos en mi espíritu: hechos matemáticos que conozco desde hace mucho tiempo, hechos que ahora estoy contemplando -y esta palabra corresponde a la realidad- y hechos vagos, incluso todavía no en verdadera formación, se entrechocan, piden ser comparados. Todos estos hechos están empujándose unos contra otros, para compararse al nuevo fenómeno; los viejos hechos buscan mejorarse, reproducirse a la luz del nuevo conocimientro adquirido. En una palabra, me siento enriquecido [...]. [*Les machines à penser*, Seuil, París, 1987, p. 16].

Con frecuencia el matemático, lleno de experiencia y sabiduría, provoca conscientemente, deliberadamente, comparaciones entre diferentes teorías matemáticas. Pero un teorema interesante es el que provoca este movimiento, digamos browniano, automáticamente, casi contra la voluntad del matemático-lector. Para decirlo todo, un hecho tal inspira al matemático y provoca frecuentemente, muy frecuentemente, nuevas investigaciones. Creo que un químico diría, si conociera las matemáticas o si se diera cuenta de lo que pasa por la cabeza de un matemático, que un teorema interesante es un catalizador para la reacción, la cual es el nuevo descubrimiento matemático. Por tanto, un bello teorema es el que es susceptible de inspirar a un matemático, el que puede engendrar nuevos teoremas. El hecho matemático interesante crea una disposición particular en la mente. [S. Mandelbrojt: «Pourquoi je fais des mathématiques», *Revue de Métaphysique et de Morale*, *57* (1952), 442-449 y *Cahier du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, *6* (1984), 47-54].

Ulam cuenta que Banach le dijo un día:

Los buenos matemáticos distinguen las analogías entre teoremas o teorías, los mejores de entre ellos ven analogías entre las analogías.

Pero no siempre las cosas son así de sencillas y claras:

Pero si, en cambio, la analogía no puede ser formalizada, es necesariamente conjetural y audaz. Razón por la cual, justamente, puede llevar a consecuencias nuevas e imprevistas. No tenemos, sin embargo, ninguna certeza en cuanto al funcionamiento de la analogía: o bien es verdadera y entonces resulta estéril o bien es audaz y entonces puede ser fecunda. No es más que corriendo el riesgo del error como se puede encontrar la novedad. [R. Thom, *Paraboles et catastrophes*, Flammarion, París, 1983, p. 142].

Se comienza a trabajar sobre el tema que uno se ha fijado. Se estudia desde todos los puntos de vista para comprenderlo, para aprehenderlo. Se piensa en ello prácticamente sin descanso:

Para los que no son científicos o matemáticos puede no estar claro que se pueda hacer un trabajo teórico en su cabeza y proseguirlo intensamente mientras se realiza alguna otra actividad más prosaica. [S. Ulam, *Adventures of a mathematician*, p. 70].

[D. Hilbert] dejó a Kronecker sin parar de pensar en el problema de Gordan. De regreso a Königsberg, el problema permanecía con él en medio de los placeres y del trabajo e incluso durante los bailes a los que le gustaba ir. [Constance Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1983, p. 31].

En una carta a Mittag-Leffler, Pierre Boutroux habla de los métodos de trabajo de su tío Henri Poincaré:

Pensaba en el camino, cuando iba a la Sorbona, cuando iba a asistir a alguna reunión científica o cuando él hacía, tras su desayuno, uno de esos grandes paseos a los que estaba acostumbrado. Pensaba en su antecámara o en la sala de sesiones del Instituto, cuando deambulaba a pasitos, con la fisionomía tensa y agitando su manojo de llaves. Pensaba en la mesa, en las reuniones de familia, hasta en los salones, interrumpiendo con frecuencia bruscamente el hilo de una conversación y dejando plantado ahí a su interlocutor para seguir la idea de un pensamiento que atravesaba su mente.

Todo el trabajo de descubrimiento se hacía mentalmente en casa de mi tío, sin que fuera necesario, la mayoría de las veces, controlar sus cálculos por escrito o fijar las demostraciones sobre el papel. Esperaba que la verdad surgiera sobre él como un trueno y contaba con su excelente memoria para conservarla. [André Bellivier, *Henri Poincaré ou la vocation souveraine*, Gallimard, París, 1956].

En el curso de la investigación sucede con frecuencia que se intente abrir una puerta que no puede ser forzada. Uno se obstina, se entrega a fondo y, por supuesto, no llega a nada. Sucede, sencillamente, que se ha tomado un camino equivocado, que uno se halla en un callejón sin salida, que la intuición no era buena. En ese momento es importante ser capaz de darse cuenta y volver al punto de partida para tomar otro camino mejor.

En cierta ocasión pensaba que una propiedad debía ser cierta para un gran número de series y me apresuré a suponer, en las hipótesis de un teorema que pensaba demostrar, que tal propiedad era satisfecha por la serie en cuestión. Esto no debía ser una restricción importante en el dominio de aplicación del teorema. Había, no obstante, un punto sobre el que tropezaba sin poder salvar el obstáculo: de la supuesta propiedad verdadera debía derivarse otra, pero la demostración no se dejaba forzar. Después de numerosos esfuerzos sin resultado, a menudo pensaba que mi intuición no podía ser buena y que la propiedad que creía verdadera en la mayor parte de los casos no lo era más que para casos particulares. Entonces tomé el primer ejemplo que encontré: la propiedad no se cumplía. Era necesario renunciar y encontrar otras condiciones para mi teorema.

Se comienza entonces a trabajar, a reflexionar sin descanso sobre el tema, pues a menudo la solución se presenta en la mente cuando menos se espera. Esta iluminación ha sido descrita por muchos autores y no puede ser puesta en duda. Es debido evidentemente al trabajo inconsciente realizado por el cerebro del investigador, incluso sin darse cuenta:

Muy frecuentemente, por la noche después de cenar, Paul Langevin velaba con nosotros hasta las diez y media charlando y descansando en su sillón de la época de 1900, cubierto de terciopelo verde, en el cual, tras un duro día de trabajo, y haciendo la digestión, dormitaba con frecuencia. Como le preguntábamos si dormía, él nos respondía: *Reflexionaba*, lo que, por extraordinario que parezca, no era falso, pues nos ha contado varias veces que en su juventud resolvía con frecuencia los problemas durmiendo. A veces se dormía sin haber resuelto un problema difícil que había pensado mucho y, decía, que se despertaba al día siguiente por la mañana con la solución en la cabeza. [André Langevin, *Paul Langevin mon père*, Les Editeurs Français Réunis, 1971, pp. 170-108].

He aquí otros testimonios:

He hablado a menudo de mi trabajo sobre el análisis armónico [...] Una vez cuando asistí a un espectáculo del teatro Old Copley, me sobrevino una idea distrayendo toda mi atención de la representación. Era la noción de una calculadora óptica para el análisis armónico. Entonces yo ya había aprendido a no despreciar esas ideas errantes, cualquiera que fuese el momento en que me viniesen al pensamiento, y así salí rápidamente del teatro para desarrollar algunos detalles de mi nuevo proyecto. [N. Wiener, *I am a mathematician*, The MIT Press, Cambridge, 1956, p. 112].

El 27 de abril de 1802, lancé un grito de alegría. Hacía 17 años que me estaba proponiendo un problema que no había podido resolver directamente, pero para el que había encontrado por suerte una solución, que yo sabía que era correcta, aunque sin poder probarla. El tema me venía con frecuencia a la mente y lo había abordado veinte veces sin éxito. Durante varios días había paseado la idea conmigo continuamente. Por fin, no sé cómo, lo había conseguido, al mismo tiempo que un gran número de consideraciones curiosas y nuevas concernientes a la teoría de la probabilidad. [André-Marie Ampère (1775-1836)].

Por fin, hace dos días he triunfado no a fuerza de grandes trabajos, sino por así decirlo, por la gracia de Dios. Como un brusco relámpago, el enigma está resuelto [...] Por mi parte soy incapaz de decir qué clase de hilo empalmaba lo que sabía anteriormente a lo que ha hecho posible mi éxito. [Carl Frédéric Gauss].

Un lunes por la tarde, había salido a pasear al Green de Glasgow y como me encontraba a mitad de camino de Herd's House a Arn's Well, mis pensamientos estaban dirigidos, naturalmente, a las experiencias, en que me había empeñado, para ahorrar calor al cilindro. A estas alturas del camino, se me ocurrió la idea de que el vapor, siendo un fluido elástico, debe dilatarse y precipitarse en un espacio realmente vacío; y que, habiendo hecho el vacío en un vaso separado y abierto la comunicación entre el vapor del cilindro y el espacio vacío, se vería lo que debe ocurrir. [James Watt (1736-1819)].

Después de algunas semanas de la más ruda tarea que jamás me he impuesto, las tinieblas donde me debatía fueron iluminadas por una brusca luz, abriendo perspectivas insospechadas ante mí. [Max Planck].

Después, de repente, generalmente con una gran brusquedad, se produce una clase de cristalización: el espíritu del investigador percibe en un instante, con una gran nitidez y de una manera desde entonces perfectamente consciente, las grandes líneas de nuevas concepciones que se habían formado oscuramente en él, y adquiere de un golpe la certeza absoluta de que la puesta en marcha de otras nuevas concepciones va a permitir resolver la mayor parte de los

problemas propuestos y esclarecer toda la cuestión, dando mucha luz a las analogías y armonías ignoradas hasta entonces. [Louis de Broglie].

Por el momento, vago sin método preciso. En este ámbito, rehago las viejas experiencias y preparo las que se me pasan por la cabeza [...] espero que entre los cien fenómenos notables que se me presentan, la luz brotará de uno a otro. [Heinrich Hertz].

Sí, he tenido grandes ideas que me proporcionaron la mejor manera de producir u observar un fenómeno, con la sensación inmediata de que el método así sugerido era único y que cualquier otro era menos simple.

Esta sensación es extraña y la recuerdo al menos en dos circunstancias. [Frédéric Joliot].

La idea se me ocurrió de repente [...] y recuerdo muy exactamente el lugar donde un día de camino, estando en mi carruaje, la solución me sobrevino proporcionándome gran alegría. [Charles Darwin].

Es un hecho comprobado por el matemático que aparezcan constantemente en el curso de sus investigaciones ciertas ideas y verdades que llegan hasta su pensamiento antes de que él haya procedido a realizar deducciones y síntesis que le permitirán alcanzar un conocimiento razonado. Muy a menudo una especie de presentimiento le permite adivinar resultados a los que la cadena de demostraciones le conducirán mucho tiempo después; y aunque esta visión inmediata de las ideas esté desprovista de precisión y justificación lógica, es a menudo más extensa, penetrante y profunda en sugestiones que la teoría más perfecta. [P. Boutroux: *L'idéal scientifique des mathématiciens*, F. Alcan, París, 1920, p. 214].

El descubrimiento científico, así como el descubrimiento de una nueva forma escultural o pictórica, se apoya sobre una experiencia [...] Lo que llamamos intuición representa un gran esfuerzo de atención y de recolección de informaciones que dejamos estancar en el cerebro. Un buen día, un cierto número de hechos, observaciones y experimentaciones procedentes de otras partes, cristalizan, recurriendo, sin que se sepa, a todo lo adquirido anteriormente y no solamente a los 8 ó 10 hechos conscientemente presentes en el momento de establecer la hipótesis. [Rouleau-Laborit, p. 117].

El objeto, alumbrado vagamente como un día crepuscular, se iluminaba poco a poco hasta brillar con una luz viva. [Newton].

Hace 3 meses vi el primer rayo de luz; hace 3 meses vi el día; por fin al cabo de algunos días, pude contemplar admirado el Sol naciente. [Kepler].

He tenido varias veces intuiciones esquemáticas que contenían en estado virtual una multitud de consecuencias. Estas no me aparecían todas de momento, sino que de alguna manera palpaba la fecundidad de la idea-madre: era la iluminación súbita producida por una serie de pesquisas. Yo era presa entonces de una gran sobreexcitación, las ideas afluían a mí de todas partes, tan complejas que ni la escritura ni incluso la palabra interior podían seguir el movimiento. En especial recuerdo una noche en que me vi obligado a levantarme para anotar en mi cuaderno una indicación en grandes caracteres, con flechas que surgían por todos lados en las diferentes direcciones y que apuntaba rápidamente. Mi intuición no era comparable con el triunfo del Sol al atravesar la niebla y descubrir de pronto el panorama de una ciudad adormecida, o con la subida del telón que muestra al espectador sumido en la oscuridad la escena brillante con sus adornos pintorescos: era una especie de impulso o de baile alegre de las ideas agrupándose alrededor de un centro de atracción, como las limaduras se aglomeran en torno al imán. Extraviado en el bosque, presentía los resultados antes de que los tuviera; estaba en posesión de una certeza y no de las verdades que la rodeaban. Muchas veces, por la mañana, antes del alba, procedo a la recolección de las ideas resultado de las meditaciones de la víspera. Cuando despierto afluyen y no tengo más que recogerlas, como se recogen los champiñones surgidos durante la noche. Me apresuro a guardar mi recolección en el granero de mi memoria, esperando a que pueda tomar notas; pero el miedo de dejar escapar alguna idea importante inhibe a veces mi reflexión. Durante el día algunas ideas que se han desvanecido por la mañana vuelven a mi pensamiento (J.J. Rousseau hace la misma observación en sus *confessions).*

El momento del despertar es, por tanto, en mi casa el instante más favorable para la eclosión de las ideas, sobre todo en ciertas épocas del año. El paseo solitario es igualmente propicio para su elaboración. Cuando soy perseguido por mis ideas no tengo más que pasear con mis niños; entonces no puedo pensar en mis trabajos, lo cual es para mí un beneficio. [François Montré, *Espèces et variétés d'intelligences*, Ed. Bossard, París, 1920, pp. 151-152].

Al caer la tarde, hartos y fatigados, decidimos ir al cine. Película sin gran interés. Hundido en mi butaca percibo confusamente la continua formación de asociaciones e ideas en potencia. Todo un tumulto que se agita sordamente. En la pantalla revolotean unas sombras. Cierro los ojos atento a lo que de extraordinario ocurre en mí. Me invade una brusca excitación mezclada de confuso placer. Mis ojos pegados a la pantalla me aíslan de la sala y de mis vecinos de butaca. Y, de pronto, una iluminación. El deslumbramiento de la evidencia. ¿Cómo no haberlo pensado antes? La experiencia de conjugación hecha con Elie sobre el bacteriófago, la inducción erótica y la hecha con Pardoe y Monod sobre el sistema lactosa, la experiencia PY JA MA, son una misma cosa. La misma situación, el mismo resultado, la misma conclusión. [F. Jacob, *La statue intérieure*, p. 331].

Fui a ver a Diderot entonces prisionero en Vincennes; tenía en mi bolsillo un Mercurio de Francia que me puse a hojear a lo largo del camino. Caí en la cuestión de la Academia de Dijon que dio lugar a mi primer escrito. (Hasta qué punto el restablecimiento de las Ciencias y de las Artes ha contribuido a depurar las costumbres). Si alguna vez algo se asemejó a una inspiración súbita fue la excitación que produjo en mí esta lectura. De pronto sentí el pensamiento deslumbrado por miles de luces; multitud de ideas vivas se presentaron a la vez con una fuerza y una confusión que me lanzaron a una agitación inexplicable; sentí mi cabeza atrapada por un aturdimiento parecido al de la embriaguez. Una violenta palpitación me oprimió y elevó mi pecho; no pudiendo ya respirar al caminar, me dejé caer bajo uno de los árboles de la avenida y allí pasé una media hora en una agitación tal que al levantarme vi la delantera de mi chaqueta mojada por mis lágrimas, sin haberme dado cuenta de que las derramaba.

Oh, Señor, si alguna vez hubiera podido escribir la cuarta parte de lo que vi y sentí bajo ese árbol, con qué claridad habría hecho ver todas las contradicciones del sistema social, con qué fuerza habría expuesto todos los abusos de nuestras instituciones, con qué sencillez habría demostrado que el hombre es bueno por naturaleza y que se vuelve malo debido únicamente a esas instituciones. [J. J. Rousseau. "Carta a Chrétien-Guillaume de Lamoignon de Malesherbes, 12 de enero de 1762", en *Correspondencia completa de Jean Jacques Rousseau*, R. A. Leigh, ed., The University of Wisconsin Press, Madison, 1969, vol. 10, p. 26].

Recuerdo en especial, en lo que a mí concierne, lo que me ocurrió en el preciso momento de un brusco despertar provocado por el ruido de un coche. Dije lo justo en el momento preciso. Una solución buscada durante mucho tiempo se me ocurrió inmediatamente sin el menor instante de reflexión por mi parte. El hecho fue lo suficientemente notable como para impresionarme de una manera inolvidable y guiarme en una dirección muy diferente de la que yo había buscado hasta entonces y que me ha dado la solución del problema. [J. Hadamard, *Subconscient, intuition et logique dans la recherche scientifique*, Palais de la Découverte, París, 3 de diciembre de 1945, p. 7].

Lo que he observado alguna vez, es la llegada de una sensación del pensamiento, de una luz, no de una luz brillante pero sí fulgurante. Advierte, dibuja más que ilumina [...] [Paul Valéry].

Habiendo buscado en vano durante todo el día la solución de un problema de geometría me di cuenta, por la noche, durante el sueño, de la línea de construcción que era necesario llevar y al despertar no tuve más que escribir la solución. Fui el único en toda la clase de Charlemagne en encontrarla; el buen profesor Rouché me felicitó por haber descubierto el artificio de construcción en el que ni él mismo había pensado al enunciar el problema. [Guébhard, carta del 22 de marzo de 1905].

En la época en que descubrimos la independencia de los cosenos, mi fascinación por la ley normal llegaba a ser obsesiva. Volvía literalmente a ella y en mis sueños la veía manifestarse naturalmente dentro de unos contextos próximos a cierta especie de realidad física [...] Después, una mañana, debía ser hacia el fin de la primavera de 1936, cuando caminaba por un parque delante del edificio principal de la Universidad, tuve la experiencia de la rapidez de la sensación que se produce con una idea. *¡Dios mío, decía yo, nuestros cosenos! Naturalmente obedecen a la ley normal.* Y, de hecho, es cierto.

Fue un juego de niños, el comprobar que ello era así, ya que teníamos todas las herramientas para hacerlo [...] [M. Kac, *Enigmas of Chance*, Univ. of California Press, Berkeley, 1987, p. 74].

Nuestros mejores pensamientos se presentan súbitamente en nuestra mente como una inspiración y evidentemente son los resultados de una larga meditación de la que no se tiene consciencia. Muy raramente el modo de proceder de nuestros pensamientos forma una cadena de opiniones claramente formuladas; en realidad, lo más común, es que se produzca en el fondo de nosotros mismos un trabajo tan inconsciente como el de la trasformación de los alimentos. En consecuencia, ocurre, que nos sentimos muchas veces impotentes para darnos cuenta de la procedencia de nuestros pensamientos más profundos. [Schopenhauer].

Todo lo que llamamos inventar o descubrir, es, en el sentido más profundo, la realización representativa de un sentimiento original de la verdad que, tras haberse desarrollado en silencio durante largo tiempo, se manifiesta de pronto, con la rapidez del rayo, dando nacimiento a una noción fecunda. [Goethe].

Llevaba dos semanas sin pensar en la física cuando, de pronto, surgió en mi pensamiento como una explosión. Las imágenes de Feynman y las ecuaciones de Schwinger comenzaron a organizarse en mi cabeza con una claridad inesperada. Por primera vez fui capaz de asociarlas. Durante una o dos horas, moví los trozos del puzzle para descubrir que finalmente todas ellas se ajustaban. No tenía ni lápiz ni papel pero tenía todo tan claro dentro de mi cabeza que no necesitaba escribirlo. [F. Dyson, *Les dérangeurs de l'univers*, Payot, París, 1986, pp. 84-85].

Hace siete años, mi Julie, me propuse un problema, inventado por mí que no pude resolver directamente, pero había descubierto por casualidad una solución que conocía con exactitud, aun sin poderla demostrar. Esto me venía muchas veces al pensamiento; busqué veinte veces sin éxito esta solución directa. Desde hace algunos días esta idea me seguía por todas partes; finalmente sin saber cómo, acabé por encontrarla junto con una multitud de

consideraciones curiosas y nuevas sobre la teoría de la probabilidad. [A. M. Ampère, Carta a su mujer, Bourg, 1801].

Pronto dejé de escucharlo. Y el sentimiento de oscuridad y confusión desesperada volvió. Tenía la impresión de que mi cerebro se descomponía. Tenía dificultad en respirar y necesité recobrar la respiración. Después alguna cosa se produjo en mi cerebro. Sentí que algo estaba a punto de desplazarse dentro de mi cabeza. Fue una sensación física de algo que gira, como un peñasco que hubiera intentado hacer rodar y que se hubiera liberado de pronto. Tenía mi explicación". G. Greenstein [pp. 122-123].

Hace varios años, estuve luchando con un bug [es decir un error en un programa para ordenador] particularmente embarazoso. Había pasado más de una semana sobre él. Finalmente llegué a tener casi todo mi programa en la cabeza, pero yo no sentía que estaba cerca de hallar el error. Al fin llegué a él mientras dormía. Había sido despertado por una pesadilla. Estaba en la cama con la garganta seca y latiéndome el corazón y fue de esta manera como supe dónde se hallaba el error en mi programa. No lo encontré en aquel instante: me di cuenta de que ya lo había encontrado antes.

Otra vez cuando estaba bajo la ducha me pasó por el pensamiento la solución de un problema [...] También una tercera vez se me ocurrió una idea cortando el césped. Las ideas vienen a veces tras horas de penosas reflexiones, otras veces vienen solas, sin haberlo deseado. Y cada vez experimenté el curioso sentimiento de que no era yo el que había pensado la idea; esto ocurría antes de que la idea, concebida enteramente por un mecanismo externo, hubiera venido a aflorar sobre mi conciencia. Como si la verdadera actividad del pensamiento se encontrase completamente fuera de nuestra conciencia; como si las ideas se formasen en la oscuridad y no llegasen a ser visibles hasta que ellas quisiesen. G. Greenstein [p. 143].

Recuerdo la noche en que vencí el último obstáculo. Eran las 9 de una noche de octubre desagradable, sombría y fría en Chicago. Había permanecido en mi despacho durante dos buenas horas concentrándome y haciendo juegos malabares con lo que me parecían docenas de conceptos y técnicas, golpeándome, escribiendo, levantándome para caminar por la habitación y luego sentándome de nuevo. Sintiéndome confundido pero incapaz de detenerme, sintiendo unas irresistibles ganas de continuar. El papel y lápiz dejaban de ser útiles -necesitaba un cambio, necesitaba hacer algo-. Me puse mi gabán, tomé mi bastón, y murmurando *voy a volver*, salí a dar un paseo hacia el lago por la calle 55, en sentido inverso por la 56 y hacia el lago de nuevo por la 57. Entonces lo intuí. Había acabado. Me di cuenta de lo que tenía que hacer, la batalla estaba ganada, el argumento era límpido, el teorema era cierto y pude demostrarlo. Era necesario celebrar esto. [P. Halmos, *I want to be a mathematician*, Springer-Verlag, Nueva York, 1985, pp. 211-212].

[Ramanujan] decía muchas veces que la diosa de Namakkal le inspiraba fórmulas matemáticas en sueños. El hecho es, en efecto, bastante notable: frecuentemente, apenas levantado, borroneaba resultados que verificaba deprisa aunque nunca fui capaz de aplicar una demostración rigurosa. [P.V.S. Aiyar, RR. Rao, *J. Indian Math. Soc. 12* (1920) 81-90]

Teniendo en cuenta lo lacónicas que habían sido las respuestas (en una encuesta sobre los métodos de trabajo de los matemáticos realizada en 1910), es notable que hayan concordado bastante bien con las conclusiones que H. Poincaré ha desarrollado en su conferencia en el Instituto psicológico: el descubrimiento está siempre precedido por un gran esfuerzo de pensamiento que con frecuencia es largo y parece infructuoso; surge a veces, como una iluminación repentina, con un carácter de certeza raramente equívoco, a pesar de que no se cree pensar en el problema planteado; no importa cuándo, de paseo, durante una lectura, una conversación, con bastante frecuencia, al despertar. Se añaden, por supuesto, no los resultados de un cálculo, sino una idea directriz, un método, una elección feliz, un acercamiento, una llave que va a abrir seguramente la puerta ante la cual se han agotado sus esfuerzos. El trabajo consciente no ha terminado; queda continuar la idea, desarrollar lógicamente las consecuencias. La realidad de un trabajo inconsciente, que para algunos llega al descubrimiento, no se puede poner fuera de duda. Las respuestas negativas no sirven contra las observaciones positivas de un gran número de matemáticos eminentes, contra la de Poincaré en particular. El trabajo inconsciente puede muy bien producirse en los que jamás han encontrado nada ni pensando en ello conscientemente, ya que, además, el trabajo inconsciente no puede ser observado directamente. [Jules Tannery, *Science et philosophie*, F. Alcan, París, 1912, pp. 304-305].

Fue, creo, en 1924 o al comienzo de 1925, cuando un oyente del Seminario Hadamard, Noaillon, me había señalado una laguna en mis lecciones de análisis funcional [...]

Le prometí reflexionar sobre el tema, pero no sabía resolverlo. Él durante este tiempo llevó a cabo investigaciones bibliográficas; después, un día, en el Seminario Hadamard, expuso el resultado de sus investigaciones. Fue en el transcurso de esta exposición cuando se produjo el caso más claro de iluminación súbita que he conocido en toda mi existencia.

Noaillon comenzó por definir [detalles técnicos de la serie que no vienen al caso] [...] Entendiendo esta definición, en quizás diez segundos, me di cuenta de lo que sigue: [nuevos detalles técnicos] [...]

No quise de momento interrumpir al orador. Exponía razonamientos horriblemente complicados que no conseguía seguir. Al cabo de tres cuartos de hora, no aguantaba más y, excusándome, le interrumpí y expuse el razonamiento anteriormente mencionado. Noaillon, que sabía bien que al

comienzo de la sesión yo no tenía ni idea de la manera de resolver su problema, me miró estupefacto. [Paul Lévy, *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París, 1970, pp. 84-85].

La iluminación se presenta la mayoría de las veces en sueños, pero puede llegar cuando se están haciendo otras cosas, como ya se ha señalado más arriba. El matemático inglés Charles Lutwige Dodgson (1832-1898), más conocido por el seudónimo de Lewis Carrol, bajo el que publicó *Alicia en el país de las maravillas*, escribió en su diario el 12 de noviembre de 1897:

¡Mañana rica en descubrimientos! Después de despertar y antes de haber acabado mi aseo, había puesto en pie un método nuevo y mucho más claro para aplicar mis reglas concernientes a las multiplicaciones largas.

A la luz de los testimonios anteriores se observa que la iluminación surgió en el tren (Poincaré), en el autobús (Watson), en el teatro (Wiener), en un sillón (Langevin) o en la cama, como señalan muchos matemáticos. No conozco ningún testimonio en el que esta iluminación aparezca al investigador mientras está sentado en su mesa de trabajo. Esto no tiene nada de sorprendente. Cuando se está en el despacho se investiga sin reflexionar el problema de manera especialmente profunda, pero se corrigen las ecuaciones y se colocan en todas las posiciones posibles para intentar obtener la solución. Solamente cuando se está en una situación en la que no se puede escribir se puede tener cierta visión de conjunto y se puede pensar en el problema de manera más reposada; en estas condiciones puede llegar la iluminación. Pero a mi modo de ver no podrá llegar si no se está suficientemente impregnado del problema, habiéndole dado todas las vueltas posibles en la mesa de trabajo. La iluminación llegará generalmente tras un intenso esfuerzo por resolver el problema. Entonces el cerebro está bloqueado. Es lo mismo que cuando se intenta recordar una palabra que se tiene en la punta de la lengua, sólo cuando se ha dejado de pensar en ella se nos ocurre, como la iluminación.

El físico japonés Hideki Yukawa (1907-1981) que recibió el premio Nobel en 1949 por el descubrimiento del mesón ha escrito en su autobiografía:

Era incapaz de tener ideas originales durante el día, perdiendo el hilo de mi pensamiento en las diversas ecuaciones escritas sobre trozos de papel. En cambio, por la noche, cuando estaba acostado, me pasaban por la mente ideas interesantes. Parecían desarrollarse, liberadas de la traba de ecuaciones ordenadas. [*L'itinéraire intellectuel d'un physicien japonais*, Belin, París, 1985].

Cuando se presenta la iluminación se está bastante seguro de su exactitud, si bien los detalles técnicos requieren en este estadio ser efectuados y verficados:

Algunos días más tarde, en el autobús para Oxford, se me ocurrió la idea [...] Era tan simple que debía ser exacta. [James D. Watson, *The double helix*, Atheneum, Nueva York, 1980, p. 114].

Por fin, querría decir una última palabra sobre la *intuición*, que con frecuencia tiene mala prensa, pero que a pesar de sus adversarios, juega un gran papel en la investigación. No volveré sobre el hecho bien conocido de que ella se presente a veces bajo la forma de una iluminación súbita. Pero he explicado cómo se consigue que dé a veces la impresión de certeza para un teorema que no está demostrado. Quiero probar a hacerlo contando en primer lugar cuando experimenté por primera vez esta impresión. [Detalles técnicos].

Era una bonita teoría, y eso me era suficiente para estar persuadido de su exactitud. Una fórmula falsa escrita al azar no habría conducido así a una teoría tan coherente.

Estoy convencido de que, en la intuición, hay asimismo muy frecuentemente un sentimiento estético. Una teoría verdadera tiene una cierta armonía que una teoría falsa no podría tener. Percibir esta armonía es naturalmente subjetivo [...]

No creo que una gran cosa pueda ser hecha sin una cierta forma de intuición. No se construye una casa amontonando piedras al azar. Del mismo modo no se construye una teoría científica por una sucesión de operaciones lógicas elementales elegidas al azar. Es muy necesario que haya una idea directriz, un plan inicial.

Pero ciertos científicos procuran esconderlo presentando sus trabajos bajo la forma de una sucesión de operaciones puramente lógicas. Sin duda hay que hacerlo para persuadir a los escépticos. Pero lamento con frecuencia que estas exposiciones demasiado perfectas no estén precedidas por una introducción poniendo en evidencia las grandes líneas del razonamiento y descuidando en principio los detalles. Creo que su lectura sería más fácil. [Paul Lévy, ob. cit., pp. 154-156].

Citemos, por último, el texto más conocido sobre la iluminación y la certidumbre que la acompaña:

En este momento, abandonaba Caen, donde vivía entonces, para tomar parte de un curso de geología impartido por la Escuela de Minas. Las peripecias del viaje me hicieron olvidar mis trabajos matemáticos; llegados a Coutance, subimos en un ómnibus para no sé qué paseo; en el momento en que puse el pie en el escalón, se me ocurrió la idea sin que ninguno de mis pensamientos anteriores me hubiera preparado para ello, que [detalles técnicos] [...] No hice la comprobación; no habría tenido tiempo ya que nada más sentarme en el ómnibus, retomé la conversación comenzada; pero tuve rápidamente una certeza absoluta. De regreso a Caen, verifiqué el resultado que tenía en mi cabeza en descargo de mi conciencia [...]

Un día, paseándome por el acantilado, se me ocurrió la idea, siempre con las mismas características de brevedad, instantaneidad y certidumbre inmediata [...] que [...] [detalles técnicos]. Un día, atravesando el boulevard, la solución de la dificultad que me había detenido se me ocurrió de repente [...]

Lo que os impresionará en primer lugar son esas apariencias de iluminación súbita, signos manifiestos de un largo trabajo inconsciente; el papel de este trabajo inconsciente en la invención matemática me parece incontestable. [Henri Poincaré, *Bulletin de l'Institut Général de Psychologie*, nº 3, 8º año, 1908].

Para S. Ulam (ob. cit., p.181) la iluminación no proviene de un azar fortuito sino que forma parte del talento del investigador:

Estoy casi seguro de que esta *costumbre* de originalidad existe en la investigación matemática y puedo designar a los que la tienen. El procedimiento de creación no está naturalmente comprendido ni descrito en la actualidad. Lo que las gentes piensan de la inspiración o iluminación es en realidad lo que resulta de mucho trabajo subconsciente y de la asociación a través de los canales del cerebro del que no se tiene pleno conocimiento.

Me parece que una buena memoria -por lo menos para los matemáticos y físicos- forma gran parte de ese talento. Y lo que llamamos talento o incluso quizás genio, depende en gran medida de la facultad de utilizar correctamente su memoria para encontrar analogías pasadas, presentes y futuras que, como decía Banach, son esenciales en el desarrollo de nuevas ideas.

Einstein tiene una opinión bastante parecida:

La historia de los descubrimientos científicos y técnicos nos muestra que la humanidad es pobre en ideas originales y en imaginación creadora. Aun cuando las presunciones científicas exteriores en favor del nacimiento de una idea existen desde hace mucho tiempo, es necesario lo más frecuentemente una causa exterior para que ella se realice; el hombre debe, por así decirlo, tropezar con el obstáculo antes de que la reflexión llegue. [A. Einstein, *Comment je vois le monde*, Flammarion, París, 1934, p. 248].

Es cierto que la iluminación no se presentará más que a una mente suficientemente preparada -por el trabajo realizado- para recibirla. La historia de muchos descubrimientos lo demuestra. Pasteur decía: *la suerte favorece solamente a los espíritus preparados*.

Su actitud [la del matemático] será mejor traducida cuando se diga que una verdad matemática, un presentimiento puramente intuitivo, surgen en su espíritu, es entonces cuando las dificultades afloran. Afloran cuando intentamos convencernos o convencer a los demás matemáticos de la exactitud de la intuición. Cada uno de nosotros posee dentro de sí todo un mundo matemático casi secreto o íntimo en el que cree y es uno de las dos grandes dichas -matemáticas- que experimentamos. La otra dicha recoge la capacidad de convencer al otro ego, el escéptico, y también a sus lectores y oyentes. La intuición parecería pobre y desprovista de interés si la dificultad de su expresión o de su realización no le acompañase. Sí, la vida del matemático sería infinitamente menos interesante si fuera suficiente que la intuición golpeara, si oso decirlo, al matemático, para que el problema apareciese como resuelto.

Por tanto, el matemático, al menos como yo lo concibo, tiene una doble vida: vive en un mundo de ideas intuitivas, tanto más intuitivas, excusad la paradoja aparente, en cuanto que gravita alrededor de una materia, materia abstracta, pero materia al fin y al cabo; tiene la satisfacción -una semisatisfacción- de esa intuición, pues siente que ella corresponde a la verdad. Pero, entonces, quiere convencerse él mismo y a los demás de que su intuición es justa, entonces comienza su otra vida. Vida de dificultades que proporcionan mucha alegría y sin las cuales la vida del matemático sería o demasiado vaga o demasiado fácil. [S. Mandelbrojt, «Pourquoi je fait des mathématiques», *Revue de Métaphysique et de Morale, 57*, (1952), 422-429; y *Cahier du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, 6,* (1985), 47-54].

Para Pascal hay que desconfiar de la imaginación ya que *es esa parte engañosa del hombre, esa maestra del error y de la falsedad, tanto más pérfida cuanto que en ocasiones resulta digna de confianza.*

Sin ser tan pesimista es cierto que al menos hay que desconfiar y proceder a las verificaciones necesarias antes de congratularse.

¡A menudo cuántas ilusiones en las investigaciones científicas! y, hasta que la prueba no se ajusta a las novedades esperadas, ¡qué prudente hay que ser y no confiar demasiado pronto en las esperanzas! [Pasteur, 31 de marzo de 1885, carta a su hijo, p. 132].

Hay ocasiones en las que la iluminación juega un papel secundario y son el azar y el error mismo los que conducen al resultado. P. Wynn me contaba cómo había encontrado el épsilon-algoritmo, que es un algoritmo recurrente para calcular ciertas relaciones de determinantes que intervienen en los métodos de aceleración de la convergencia. Trabajaba en la interpolación por fracciones racionales donde se encuentran las relaciones entre determinantes similares. Una noche, volviendo de una buena cena, se puso a trabajar... y se equivocó. Cambió en los determinantes una línea cuyos términos eran 1,2,3... por la línea 1,1,1... y halló el épsilon-algoritmo.

Tras la iluminación queda todavía mucho trabajo por hacer. Hay que proceder en primer lugar a las comprobaciones indispensables, y poner a punto todos los detalles técnicos. Esta fase puede ser larga y delicada; puede requerir también otras intuiciones y conducir a otras iluminaciones.

Esta puesta a punto es sin embargo de un atractivo menor como subraya Lecomte du Noüy en una carta a su mujer [pp. 83-84]:

Una vez que el problema está resuelto, desde que el trabajo de pura imaginación ha acabado, el resto me aburre y no hago nada.

Después hay que redactar el trabajo y presentar los resultados de una forma lógica y coherente ya que el trabajo previo habrá sido lo más frecuentemente anárquico, efectuado a merced de la inspiración, sin demasiado método y lógica. Para recordar lo que decía François Jacob, se pasa de la 'ciencia de noche' a la 'ciencia de día', que es presentada de forma fría e impersonal y no vuelve a mostrar en absoluto la marcha creativa del pensamiento. Las dificultades y las esperas han sido ocultadas:

La simplicidad y la evidencia de todos los resultados son increíbles una vez que han sido encontrados; lo mismo que son increíbles las dificultades, tanto que no se conoce el camino que lleva a esos descubrimientos. [L. Boltzmann, *id.*, p. 85, en *Voyage d'un professeur allemand en Eldorado*, Actes Sud, París, 1987].

En *El nombre de la rosa*, Umberto Eco ha dicho alguna cosa de esta guisa:

El orden que nuestro espíritu imagina es como una red o una escala que construimos para alcanzar alguna meta. Pero después, se debe desechar la escala, porque descubrimos que, a pesar de que servía, estaba desprovista de sentidos. [Umberto Eco, *Le nom de la rose*, p. 497].

De los resultados obtenidos el investigador obtiene su recompensa:

Es imposible describir lo que se siente cuando se encuentra alguna cosa de este género [un esqueleto de mujer que se remonta a 3.500.000 años]. Esto os subyuga. Es por lo que habéis venido. Habéis trabajado sin cesar y, de repente, mostráis una meta. [D. Johanson, M. Edey, *Lucy*, Laffont, París, 1983, p. 198].

¿Quién puede comprender la expectación producida por la esperanza y la ansiedad del investigador que se siente próximo a la invención pero que, tan frecuentemente no realizada, no osa todavía creer en ella?

Y cuando la expectativa del descubrimiento se ha vivido varias semanas, a veces meses enteros, y el descubrimeinto llega, entonces se siente una emoción que no se olvidará jamás. [A. Parrot, *L'aventure archéologique*, Laffont, París, 1979, p. 76].

El sabio digno de este nombre, el geómetra sobre todo, experimenta con su obra la misma impresión que el artista; su goce es tan grande y de la misma naturaleza. Si no escribiera para un público enamorado de la ciencia, no osaría expresarme así; volveré a dudar de la incredulidad de los profanos. Pero aquí puedo decir todo mi pensamiento. Si trabajamos, no es tanto por obtener resultados positivos, a los que el vulgo nos cree únicamente amarrados, como por volver a sentir la emoción estética y comunicarla a los que son capaces de experimentarla.

Las obras inspiradas por dos tendencias opuestas pueden igualmente procurarnos esta emoción. Si queremos escalar las cimas donde descubrimos grandes horizontes, ¿es menor nuestra admiración ante las obras consumadas del estatuario griego? [H. Poincaré, *Savants et écrivains*, p. 138].

Avram Goldstein y Michael Hunkepiller formaron parte de los científicos que, a partir de 1973, se lanzaron a la búsqueda de las endorfinas, hormonas segregadas por el hipotálamo y que tienen propiedades comparables a la morfina. En 1979 Hunkepiller consiguió descifrar los trece primeros aminoácidos de una sustancia, la dinorfina, aislada por Goldstein. Aquí nos lo cuenta:

La excitación más grande que jamás he experimentado fue la del periodo de algunas horas después de la llamada de Hunkepiller hablándome sobre la secuencia de la dinorfina, cuando él y yo estábamos solos en el mundo para conocer este hecho absoluto, indiscutible -la secuencia de péptidos que Dios había puesto aquí hace millones de años. Habíamos descubierto un secreto de la naturaleza. [Citado por J. Goldberg, *Anatomy of a scientific discovery*, Bantam Books, Toronto, 1988, p. 172].

En el libro de Jules Tannery ya citado, se dice:

Con certeza, lo que uno aporta al trabajo científico aumenta la alegría de este trabajo.

Si el investigador no encuentra nada puede, por el contrario, sentirse abatido:

Esos instantes donde los pensamientos eran plenamente fecundos me proporcionaban ciertamente mucha alegría; la otra cara de la moneda era menos buena, cuando las inspiraciones no me proporcionaban la solución; entonces podía atormentarme durante semanas y meses en una de esas cuestiones, hasta sentirme incluso como *el animal al que un malvado espíritu hace siempre dar vueltas en círculo sobre la banda estéril cuando por todas partes hay una bonita y verde pradera.* [Helmholtz citado por J. Picard, *Essai sur les conditions positives...*, p. 173].

En la investigación los periodos donde no se encuentra nada son mucho más numerosos que los periodos de excitación donde las ideas afluyen. El joven investigador deberá pues aprender a no desanimarse. La investigación es una escuela de perseverancia.

Una vez pasada la alegría del descubrimiento, la curiosidad recobra ventaja y el científico ataca otro problema:

En efecto, el deseo ardiente del conocimiento es el único móvil que alcanza y mantiene al investigador en sus esfuerzos; y es precisamente este conocimiento el que amarra realmente y que huye sin embargo siempre ante él, que llega a ser a la vez su tormento y su sola felicidad. El que no conoce los tormentos de lo desconocido debe ignorar las alegrías del descubrimiento que son ciertamente las más vivas que el espíritu humano pueda sentir jamás. Pero por un capricho de nuestra naturaleza, esta alegría del descubrimiento tan buscada y tan esperada se desvanece cuando ésta se produce. No es más que una chispa cuyo resplandor nos ha descubierto otros horizontes hacia los que nuestra curiosidad insatisfecha se dirige todavía con más ardor. Esto hace que en la ciencia misma el conocimiento pierda su atractivo, mientras que lo desconocido está siempre lleno de encantos. Es por lo que los espíritus que se elevan y llegan a ser verdaderamente grandes, son los que no están jamás satisfechos de sí mismos con sus obras cumplidas, pero que tienden siempre a mejorar en las obras nuevas. [Cl. Bernard, *Introduction...*, p. 307].

Investigar es una actividad difícil y absorbente. Hay que volcarse totalmente. No se puede resumir mejor que con estas palabras la situación del investigador:

No se puede alcanzar la perfección más que si la investigación llega a ser forma de vida. [Yehudi Menuhin, *Voyage inachevé*, Seuil, París, 1977, p. 310].

Concedamos la palabra a I. Kant:

Todo conocimiento humano comienza por la intuición, pasa enseguida a los conceptos y termina con las ideas.

CAPITULO VII

TESTIMONIOS

Para los jóvenes investigadores (y también para los demás) es fundamental conocer la génesis de ciertas creaciones y descubrimientos científicos.

Pierre Simon de Laplace decía:

El conocimiento del método que ha guiado al genio no es menos útil a los progresos de la ciencia e igualmente a su propia gloria que sus descubrimientos; este método es a menudo la parte más interesante. [*Exposition du système du monde*, Tomo VI de las Obras Completas, p. 464].

Y G.W. Leibniz escribía:

Hay una cosa más importante que los más bellos descubrimientos, el conocimiento del método por el cual se han hecho.

El objetivo de este capítulo es contar la historia de ciertos descubrimientos científicos. Desgraciadamente pocos científicos se han entregado a un análisis de los laberintos de sus pensamientos. En efecto, no es siempre fácil explicar cómo ha surgido una idea, cómo se ha efectuado el trabajo inconsciente que ha conducido a la creación. En 1866, Charles Hermite escribía:

Será siempre difícil, en toda rama de nuestros conocimientos, dar cuenta, con cierta fidelidad, del método seguido por los inventores; habría que admitir que sólo el autor de un descubrimiento podría explicar, con los métodos siempre débiles de nuestra mente, cómo una nueva verdad ha sido obtenida. Pero es tal vez en matemáticas donde el hecho intelectual de la invención parece más misterioso, pues la serie de las transiciones, donde se podría reconocer el camino seguido realmente en la investigación, nunca aparece de una manera sensible en la demostración. Esta facilidad de aislar así la prueba y de aumentar la concisión del razonamiento, sin quitarle nada de rigor y claridad, explica toda la dificultad del análisis de los métodos en matemáticas.

[*Mémoires de l'Académie des Sciences*, (2) *35* (1866), 528-529 y *Oeuvres*, Tomo 4, pp. 586- 587].

No me he esforzado por clasificar las historias que siguen. Sin embargo cada una de ellas se refiere a un proceso intelectual diferente que conduce al descubrimiento: azar, rechazo de ideas admitidas, interrogación, iluminación durante el sueño, analogías con la vida corriente, búsqueda de la armonía, asociación de ideas y analogías científicas, inversión, error, observación, método experimental, etcétera.

El lector podrá establecer la clasificación.

UN CASO DE COINCIDENCIA

La teoría de la evolución de las especies fue introducida independiente y simultáneamente por Charles Darwin (1809-1882) y Alfred Russel Wallace (1823-1913). Y es curioso que sea el mismo catalizador, la obra de Thomas Robert Malthus (1766-1834) sobre el crecimiento de la población, lo que sirvió a los dos científicos.

Darwin decía:

Muy pronto me di cuenta de que la selección constituía la piedra angular de la capacidad del hombre de producir razas útiles de animales y de plantas. Pero en cuanto a saber cómo la selección podía aplicarse a organismos vivos en estado natural siguió siendo para mí un misterio durante algún tiempo. En octubre de 1838, es decir, quince meses después de haber empezado mi investigación sistemática, ocurrió que leí por placer una obra titulada *Malthus y la población*; y estando bien preparado por mi larga observación de los hábitos de los animales y de las plantas para comprender la lucha por la existencia que se produce en todas partes, caí en la cuenta de que, en estas circunstancias, las variaciones felices debían tender a preservarse y las infelices a destruirse. El resultado de ello sería la formación de nuevas especies. Había encontrado por fin una teoría sobre la cual trabajar [...]

Se puede observar de paso que la iluminación vino a Darwin porque el terreno estaba bien preparado.

En cuanto a Wallace, había conocido el *Ensayo sobre el principio de la población* de Malthus cuando era profesor en Leicester en 1844-1845. Algunos años más tarde, en 1858, estaba en las islas Molucas para coleccionar mariposas y coleópteros.

Sufría de un acceso agudo de fiebre intermitente y cada día, durante mis accesos sucesivos de frío y de calor, debía acostarme durante varias horas; tiempo durante el cual no tenía otra cosa que hacer que pensar en aquello que podía interesarme particularmente. Cualquier cosa. Un día recordé el *Principio de población* de Malthus, que había leído veinte años antes. Pensé en su descripción de los *frenos evidentes del crecimiento-* enfermedad, accidentes, guerra, hambre- que mantienen la población de las razas salvajes a un nivel medio mucho más bajo que el de los pueblos civilizados. Me vino entonces la idea que estas causas o sus equivalentes ocurren continuamente también en el mundo animal [...] ¿Por qué algunos mueren, mientras que otros sobreviven? La respuesta era clara: entre todos, sólo los más aptos sobreviven. A la enfermedad escapan los más sanos; a los enemigos, los más fuertes, los más rápidos a los más astutos; al hambre, los mejores cazadores o aquellos que realizan mejor la digestión; y así sucesivamente. Entonces, me pareció de repente que este proceso autorregulador debía necesariamente mejorar la raza, de hecho que, en cada generación, los elementos inferiores debían estar inevitablemente eliminados, mientras que permanecían los elementos superiores, es decir, que no sobrevivían más que los más aptos [...] Esperaba impacientemente el fin de mi acceso de fiebre a fin de tomar inmediatamente notas con vista a un artículo sobre este tema.

Se notará que la iluminación vino a Wallace en un periodo de reposo forzado donde él podía dejar vagabundear su mente. [D. Boorstin, *Les découvreurs*, Seghers, París, 1986, pp. 440-445] [C. Darwin, *Autobiographie*, Belin, París, 1985, p. 100].

LA VITAMINA C

Albert Szent-Györgyi nació en Budapest el 16 de septiembre de 1893. En 1937 recibió el premio Nobel por sus descubrimientos en el campo de la oxidación en biología y, en particular, por su trabajo sobre la vitamina C.

Todo el mundo sabe que si se deja caer una manzana tendrá, al día siguiente, un color pardo alrededor del golpe. Este coloreamiento pardo, esta oxidación, es una reacción protectora de las células. Szent-Györgyi comenzó por estudiar los frutos que no presentaban esta oxidación como los limones y las naranjas y se dio cuenta de que, en el caso de algunas reacciones, se podía producir un retraso de un segundo o de medio segundo.

Este retraso debía ser debido a una sustancia que se puso a buscar. Llegó a cristalizarla. Faltaba todavía determinar su composición química y sintetizarla. Pero era difícil ya que no poseía más que una pequeña cantidad. Después de una estancia de un año en Estados Unidos volvió con 15 gramos de la famosa substancia, una cantidad importante y de la cual estaba muy orgulloso. Los quince gramos se usaron rápidamente sin que se descubriera su composición química. Szent-Györgyi examinó numerosas plantas pero en ninguna de ellas pudo encontrar la sustancia en cantidad suficiente. Fue entonces cuando vino a vivir a Szeged que es el centro de la región donde se produce la paprika, muy apreciada habitualmente por los húngaros. Una noche su mujer le sirvió paprika para cenar, sin saber que a él le costaba mucho digerirla. El no se atrevió a decírselo pero se dio cuenta de repente de que no había buscado todavía en la paprika la sustancia tan codiciada. Entonces, por cobardía conyugal como él mismo reconoce, dijo a su mujer que no se comería la paprika sino que se la llevaría a su laboratorio para analizarla. Una semana más tarde tenía entre sus manos un kilo y medio de la sustancia de la que él no había producido hasta entonces más que un miligramo cada vez, era la vitamina C. Albert Szent-Györgyi falleció en Woodshoh, en Estados Unidos, el 22 de octubre de 1986.

FUENTE: I. Kardos, *Scientists face to face*, Corvina Books, 1978, pp. 313-316.

LA SINTESIS DE LA UREA

Al principio del siglo XIX los científicos consideraban que las sustancias químicas se dividían en dos clases absolutamente distintas: las sustancias inertes, inorgánicas, que cuando eran calentadas y después enfriadas volvían a su estado inicial y las sustancias vivas, orgánicas, que, como el carbono, eran modificadas por el calor. Fue así como se crearon dos químicas, la mineral y la orgánica. En química mineral es imposible reorganizar la disposición de las diferentes moléculas que componen una sustancia mientras que en química orgánica es la base misma de los estudios que se han hecho.

Friedrich Woehler nació en 1800 en el pueblecito alemán de Eschersheim. Estaba interesado en la colección de minerales y en la química pero entró a la Universidad de Marburgo para estudiar medicina. Llegó sin embargo a conciliar los dos temas dedicándose a experiencias químicas sobre los líquidos del cuerpo humano en un pequeño laboratorio improvisado que había instalado en su habitación. En esta época, química y medicina no eran sólo dos campos distintos sino que eran irreconciliables: había que dedicarse a una u otra de estas ciencias. Woehler rechazó hacer esta elección y se puso en busca de un profesor que apreciara sus dobles habilidades. Lo encontró en la persona de Léopold Gmelin de la Universidad de Heidelberg que era conocido por su

talento como químico y era doctor en medicina. Fue, pues, en Heidelberg donde Woehler, animado por Gmelin, pasó su doctorado en medicina siguiendo sus investigaciones en química. Gmelin recomendó incluso a Woehler que fuera a Uppsala a estudiar química con Jons Jakob Berzelius. ¡Que Berzelius hubiera podido determinar el peso atómico de tantos elementos y empezar la lista -que Mendeleiev organizara en una tabla periódica- con un material tan simple, era algo que Woehler no podía creer! Su primer trabajo fue analizar diversos minerales. Después de haber terminado sus estudios complementarios, Woehler volvió a Berlín como profesor de química y fue allí donde descubrió, en 1827, un nuevo elemento, el aluminio, y, después, el berilio.

Pero fue en 1828 cuando tuvo lugar el descubrimiento que iba a cambiar la química orgánica. Cuatro años antes, Woehler había combinado el ácido ciánico y el amoniaco para crear un nuevo compuesto que estaba formado por un átomo de carbono, uno de oxígeno, dos de nitrógeno y cuatro de hidrógeno. Woehler publicó sus resultados en los *Anales de química.*

Joseph Gay-Lussac, que dirigía el periódico, se dio cuenta de que este análisis era el mismo que el de otro compuesto estudiado por Justus von Liebig un año antes. Pero el producto de Liebig era azul mientras que el de Woehler era blanco y surgió una controversia entre los dos químicos. Parecía imposible que dos productos diferentes pudieran tener los mismos componentes. Berzelius resolvió el problema demostrando que los átomos estaban dispuestos de forma diferente en las dos sustancias.

Sin embargo Woehler rehizo cuidadosamente su experimento. Calentó el ácido ciánico y el amoniaco juntos y finalmente hizo evaporar el líquido por ebullición. Lo que quedó, consistía en diminutos cristales blancos de una pulgada de largo. Cuando Woehler los vio, le intrigó mucho. Había realizado muchos otros experimentos y conocía bien numerosas sustancias. Sus cristales tenían exactamente la apariencia de los cristales de urea. Esto era extraño, ¡no se podía fabricar urea en el laboratorio! En el curso de sus estudios médicos, Woehler había separado a menudo los cristales de urea de la orina. Estaban producidos por un organismo vivo durante la transformación de los alimentos. Lavoisier había demostrado que la vida era un proceso químico de combustión que suministraba energía y expulsaba sustancias. La urea era una de ellas, una sustancia orgánica que el hombre no podía fabricar artificialmente. Y sin embargo el resultado estaba ahí: Woehler había sintetizado urea a partir de ácido ciánico y amoniaco.

Para convencerse añadió ácido nítrico a la urea natural y a sus cristales; el resultado era el mismo. Woehler había realizado lo que se creía irrealizable: la producción de materia orgánica a partir de materia inorgánica.

En el capítulo VIII (pp. 161-163) veremos la continuación de esta historia al tratar de la síntesis *in vivo* de la urea.

LA HOLOGRAFIA

Dennis Gábor nació en Budapest el 5 de junio de 1900. En 1971 recibió el premio Nobel de física por la invención de la holografía y la contribución a su desarrollo. El mismo contó su descubrimiento:

El punto de partida de la invención fue mi deseo de mejorar el microscopio electrónico [...] Pensaba en el microscopio electrónico y era evidente que la microscopía electrónica se detenía en el límite en el que las redes atómicas se separaban y era visible un átomo aislado. Además no era posible construir una buena lente atómica, *Bien, entonces fabriquemos una mala lente*, pensaba. *Tomemos una mala imagen y mejorémosla.* Esto necesitaba una imagen que contuviera una información completa. Las imágenes ordinarias están desprovistas de fase. Mi idea era añadir una fase standard. Era una idea clara porque era realizable.

La idea de que fuera tan simple de reconstruir la imagen original me sorprendió de pronto un día de Pascua, hace casi veinticinco años [...] Estaba sentado en las gradas esperando un partido de tenis [...] De forma general, creo que toda idea verdaderamente nueva se forma en el subconsciente. Si os encontráis con un problema, olvidadlo, pensad en él a continuación de forma profunda, una vez y otra, bajo cada ángulo, a continuación olvidadlo de nuevo y esperad hasta que la solución emerja del subconsciente. Naturalmente, no emerge siempre, pero a veces lo hace. Otra idea que se reveló, si se puede decir así, durante el sueño, fue uno de mis últimos inventos sobre la holografía. El hológrafo es un traductor que es capaz de convertir un símbolo en otro -fui consciente de ello durante el sueño. [I. Kardos, *Scientists face to face*, Corvina, Budapest 1978, pp. 84-85].

LOS CUATERNIONES

Hamilton descubrió los cuaterniones el 16 de octubre de 1843 y comunicó su descubrimiento a su amigo Graves al día siguiente. Liberando las operaciones algebraicas de la conmutatividad, su

descubrimiento marca un gran paso en la evolución hacia el álgebra moderna.

Hamilton lo consideró, desde el principio, como su más bello descubrimiento científico y auguró que pasaría el resto de su vida examinando sus consecuencias. Está claro que pensaba que los cuaterniones jugarían, en el espacio tridimensional, un papel análogo al de los números complejos en el plano. Se lanzó a estas investigaciones con un gran celo que no disminuyó nunca. Algún tiempo antes de que sobreviniera su muerte, el 2 de septiembre de 1865, describía así su descubrimiento en una carta a su hijo Archibald:

En octubre de 1843, después de haber vuelto de un congreso de la British Association en Corh, el deseo de descubrir las leyes de multiplicación de los tripletes, que se había adormecido durante algunos años, me surgió de nuevo con cierta fuerza y ardor, pero entonces estaba a punto de conseguir mi objetivo, del que de vez en cuando os he hablado. Cada mañana, al principio del mes en cuestión, cuando bajaba a desayunar, tu hermano William Edwin y tú teníais la costumbre de preguntarme, *Qué, papá, ¿puedes multiplicar los tripletes?* A lo que yo tenía que contestar siempre, con un triste movimiento de cabeza, *No, sólo puedo sumarlos y restarlos*. Pero el día 16 del mismo mes -que caía en lunes y era día de Consejo de la Royal Irish Academy (Real Academia Irlandesa)- iba a pie para asistir a éste y presidirlo, y vuestra madre caminaba conmigo, siguiendo el Royal Canal (Canal Real) en cuya dirección los pasos nos conducían; y aunque ella me hablase de vez en cuando, una corriente de fondo de pensamientos tal se deslizaba por mi mente que produjo al fin un resultado cuya importancia, no es mucho decir, sentí inmediatamente. Un circuito eléctrico pareció cerrarse; y una chispa saltó, precursora (como vislumbré inmediatamente) de numerosos años por venir de pensamientos y trabajo en una dirección precisa. Por mí mismo si me eran concedidos, o por lo menos por otros si vivía el tiempo suficiente de comunicar mi descubrimiento. Saqué al instante una libreta, que existe todavía, y a continuación tomé unas notas. No pude resistirme más al impulso -por más antifilosófico que sea- de grabar con un cuchillo sobre una piedra de Brougham Bridge, cuando pasabamos encima, la fórmula fundamental con los símbolos i, j, k:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

que contiene la solución del problema. Naturalmente, como toda inscripción, se ha borrado desde hace mucho tiempo -en su lugar una placa sobre el puente conmemora el acontecimiento. Una nota más duradera, sin embargo, queda en los libros del consejo de la Academia de ese día (16 de octubre de 1843) que recuerda el hecho de que pedí y obtuve entonces la autorización de presentar un artículo sobre los cuaterniones en la primera reunión general de la sesión: esta lectura tuvo lugar en consecuencia el 13 de noviembre siguiente.

LA LITOGRAFIA

La familia Senefelder vivía en Munich. El padre era actor de teatro. No es pues sorprendente que su hijo Aloys (1771-1834) haya escrito obras de teatro. Tuvo éxito, sus obras y sus historias se imprimían pero, una vez que pagaba al impresor no le quedaba más que un poco de dinero. Intentó pues imprimir él mismo sus obras y grabó para esto las palabras en finas placas de cobre. Pero evidentemente era necesario escribir a la inversa, como en un espejo y era difícil. El cobre también costaba caro y Aloys buscó otro material. Se decidió por las baldosas de piedra que se utilizan para embaldosar los suelos. Las pulía primero con arena y después las grababa lo que era más fácil ya que la piedra era más blanda que el cobre. Su trabajo avanzaba rápidamente y agotó pronto su stock de papel. No le quedaba más que una página de su historia por imprimir y no tenía más que una hoja cuando su madre vino a buscarle para que hiciera la lista de la ropa que ella daba a lavar ¿Por qué no escribir esta lista en una de sus baldosas de piedra? Pero su tinta hecha de cera, de jabón y de carbón, se había secado y se había puesto dura. Tomó un trozo y lo usó para escribir la lista en la baldosa. Cuando lavaron la ropa la lavandera la trajo, sin olvidar, felizmente para nosotros, traer igualmente la famosa baldosa. Para poder utilizarla para terminar su trabajo de imprenta, Senefelder quiso limpiarla. Pero la tinta no se iba. Intentó el ácido. No sólo la tinta no se borró sino que el ácido minó la piedra donde no había tinta, mientras las palabras sobresalían ahora de la superficie de la baldosa de piedra y Aloys pudo imprimir fácilmente la lista en el papel. Continuó sin embargo sus pruebas de limpieza ya que había notado que el agua cubría la baldosa salvo en los sitios donde había tinta. El cuerpo graso contenido en la tinta alejaba el agua y del mismo modo la tinta no se retenía en las partes mojadas de la baldosa. Lentamente Senefelder se dio cuenta de que no había necesidad de grabar la piedra. Todo lo que había que hacer era crear dos tipos de superficies sobre la piedra: una que retuviera la tinta y otra que no. Con su tinta endurecida hizo inmediatamente un dibujo en una baldosa. La mojó completamente y después pasó por encima tinta líquida. La tinta se quedó sólo encima del dibujo, no había tinta donde no había dibujado ya que la baldosa estaba húmeda. No tenía más que poner una hoja sobre la baldosa y presionar. Había inventado la litografía. Pero la historia no se acaba allí, todavía era necesario escribir o dibujar a la inversa, como en el espejo.

A pesar de este inconveniente, la litografía recorría sin embargo poco a poco su camino. Las prensas se perfeccionaron. En 1810 un impresor alemán llamado Friedrich König (1774-1833) tuvo la idea de usar un

tubo para extender el papel sobre la superficie plana de la baldosa y en 1846 Richard Marsh Hoe (1812-1886) inventó una prensa donde la superficie en la que estaba lo que se quería imprimir tenía igualmente forma de tubo. Más tarde se puso enfrente un rodillo de caucho para presionar el papel contra el otro tubo. Este tipo de prensa era corriente. Un día, en una imprenta de New Jersey, un incidente cualquiera hizo que la prensa se pusiera en marcha pero que el papel se quedara parado. Los dos rodillos, el del dibujo en tinta y el de caucho, dieron vueltas uno contra otro sin papel. La dificultad fue rápidamente reparada y el papel empezó a pasar. Queriendo verificar que todo había funcionado bien, el impresor examinó la prueba y vio, con sorpresa, que los dos lados de la hoja estaban impresos, uno al revés y otro del derecho. La tinta se había puesto simplemente sobre el rodillo de caucho y había dado una imagen invertida en el dorso del papel porque estaba invertida en el rodillo entintador. Se podía naturalmente partir de un rodillo entintador donde se había dibujado o escrito al derecho y obtener de la misma forma una impresión al derecho. Es el procedimiento de impresión llamado *offset*.

LA PARTENOGENESIS

Un domingo de marzo de 1910, yo estaba hipnotizado por la mañana sobre el visor del microscopio contemplando un cuadro impresionante: una preparación de huevos poliespérmicos de calamita (tipo de sapo) impregnados de esperma de tritón alpino, huevos acribillados de estos elementos masculinos extraños cuyas cabezas voluminosas aparecían sobre los cortes como un semillero de agujas de cirujano. Bruscamente surgió en mi mente la idea de que un traumatismo ligero, el pinchazo de una fina aguja de vidrio o de metal, podría revelarse tan eficaz como el calor o la hipertonía. Yo no estaba considerando, naturalmente, más que un nuevo factor de partenogénesis abortiva. En seguida, preparé una serie de estiletes de vidrio, y coloqué sobre algunos vidrios de reloj los huevos de una hembra madura. Esos huevos, pinchados en seco, son simplemente recubiertos de agua. Experiencia que se ha vuelto clásica y cuyo resultado está más alla de toda expectativa [...] ¿Cuál puede ser el agente providencial de un resultado excepcional, perseguido en vano desde hace tanto tiempo? [E. Bataillon, *Une enquête de trente-cinq ans sur la génération*, 1900-1934, SEDES, París, 1955, pp. 24-25].

LA CONGELACION DE LAS CELULAS VIVAS

La congelación de los tejidos vivos conservados tanto tiempo como se quiera para servirse de ellos más tarde es un viejo sueño. ¿No se habla de los soldados de Napoleón encontrados congelados después de la campaña de Rusia y después devueltos a la vida sin deterioro, ¿y no es ésa la historia de *L'homme à l'oreille cassée* de Edmond About?

Aunque hubieran tenido lugar numerosas experiencias científicas, era raro que el retorno a la vida de las células congeladas se efectuara en buenas condiciones.

En los años 1940 el doctor B.J. Luyet trabajaba en este problema. Ya que los daños estaban causados por los cristales de hielo, sugirió quitar toda el agua contenida en las células antes de congelarlas. Este método había sido descubierto por la Birdseye Company que fabricaba comida congelada. Si la deshidratación tenía éxito con las verduras ¿por qué no iba a funcionar con las células vivas?

Luyet y su equipo descubrieron que podían deshidratar en parte las células de pollo utilizando una mezcla azucarada. Se había obtenido un cierto éxito, pero el método no daba siempre buenos resultados. Otros científicos hicieron nuevos experimentos. En Londres, Alan S. Parkes utilizó azúcar de frutas. Andrey U. Smith y Christopher Polge repitieron todas las experiencias de Luyet con los mismos resultados: algunas células soportaban la congelación y después la descongelación y otras no. No perdieron sin embargo la esperanza de volver el método totalmente fiable y conservaron su mezcla en un refrigerador pensando retomar después sus experimentos con un nuevo método.

Fue así como, algunos meses más tarde, Smith y Polge recomenzaron sus experimentos que esta vez tuvieron éxito en casi todos los casos. El sueño parecía haberse hecho realidad. Parkes volvió a hacer el experimento con una nueva botella de azúcar de frutas, y todas las células murieron. Los científicos estaban perplejos. ¿Cómo podía el mismo experimento haber dado resultados completamente diferentes? Con cuidado examinaron y reexaminaron todos los detalles del procedimiento para encontrar la explicación. Por fin encontraron que simplemente se habían equivocado. En lugar de su vieja mezcla azucarada habían utilizado una mezcla de clara de huevo y de glicerina que tenía el mismo aspecto. Se sabía desde hacía tiempo que la glicerina impedía que se congelasen los motores pero no se había pensado nunca en utilizarla para células vivas.

Se descubrió más tarde que Jean Rostand había utilizado glicerina dos años antes, en 1946, para congelar células de rana aunque a una temperatura mucho menos baja.

Smith mejoró el método y encontró otros. Fue capaz rápidamente de congelar y conservar sangre durante largos periodos, abriendo así la vía a las esperanzas más arriesgadas. Fue así como, en enero de 1967, un científico de setenta y tres años, James H. Bedford, muerto de una enfermedad incurable fue, según sus deseos, congelado hasta que se encontrase un tratamiento de su enfermedad. En 1965 se creó una asociación para conservar los cuerpos que esperan una vida futura. ¡Todo esto por un error de botellas!

LOS FABRICANTES DE LLUVIA

Hacer llover a voluntad ha sido un viejo sueño del hombre que no se hizo realidad hasta 1946. Un hombre, John Aitken, había demostrado que las gotas de lluvia se formaban alrededor de pequeños granos de polvo que estaban en la atmósfera y fue por esto por lo que se lanzaron sin éxito, desde aviones, centenares de kilos de finas partículas de diferentes materiales o fueron elevadas desde el suelo por el fuego para tratar de hacer llover.

Durante la Segunda Guerra Mundial la General Electric había pedido a Irving Langmuir, que había obtenido en 1932 el premio Nobel de química por sus descubrimientos de electrovalencia y del hidrógeno atómico, que volviera al trabajo (ya que estaba retirado) para estudiar la formación de hielo en las alas de los aviones. Con su ayudante, Vincent Joseph Schaefer, se fueron a las montañas de New Hampshire conocidas por sus vientos glaciales y por sus tempestades de nieve. Allí se sorprendieron de constatar que la temperatura de las nubes estaba a menudo muy por debajo de cero y que, sin embargo, no había formación de cristales de hielo. Conocían la teoría, elaborada por franceses y noruegos, de que las gotas de agua se forman alrededor de pequeños granos minúsculos y se transforman en cristales de hielo que caen enseguida en forma de lluvia. Estaban pues muy sorprendidos de que a pesar del frío tan grande que podía haber en las nubes no se formara nieve. Schaefer se interesaba mucho en la nieve y había encontrado incluso un procedimiento para preservar la forma de los cristales de hielo para estudiarlos en el laboratorio.

Una vez que hubo terminado este trabajo de guerra, Schaefer continuó sus investigaciones para encontrar un corpúsculo alrededor del cual los cristales de nieve pudieran formarse en un aire húmedo y muy frío. Ensayó numerosas sustancias convencido de que, un día u otro, encontraría el éxito. Conservaba polvo, azúcar y otras sustancias en su refrigerador. Tenía así aire frío y húmedo para sus experimentos. Para imitar el aire húmedo de una nube, soplaba en su refrigerador y lanzaba en ella un puñado de cualquier sustancia. Durante meses intentó todo lo que le era posible imaginar consiguiendo, como único resultado, que el fondo de su refrigerador estuviera cada vez más recubierto por todas las sustancias que habían sido utilizadas.

Una mañana de julio se dedicaba a sus experiencias habituales cuando un amigo vino a buscarle para ir a un restaurante. Como de costumbre no cubrió su refrigerador, lo que no era necesario ya que el aire frío bajaba al fondo y no se escapaba. Al volver de comer, Schaefer se disponía a retomar sus experiencias cuando se dio cuenta de que la temperatura del refrigerador había subido por encima del punto en que los cristales de hielo permanecen sólidos. El verano estaba allí, sería necesario ser más prudente los días siguientes. Había dos posibilidades: cerrar la tapa del refrigerador y esperar a que la temperatura bajara por ella misma o intentar acelerar el proceso añadiendo nieve carbónica, y esto fue lo que hizo. Fue a buscar un paquete de nieve carbónica a una heladora y puso el paquete, humeante, en su refrigerador. Entonces, con la luz, vio pequeños trozos de algo en su aliento. Instantáneamente se dio cuenta de que eran cristales de hielo. Así había fabricado hielo, no añadiendo corpúsculos de una materia cualquiera, sino enfriando tanto su aliento que el líquido tenía que cristalizar. Entonces se puso a soplar en su refrigerador añadiendo en él grandes cantidades de nieve carbónica y se formó nieve, que cayó al fondo. Lo que él había hecho en un refrigerador, había que realizarlo ahora en una nube real. Equipó un avión con una máquina eléctrica para mandar nieve carbónica a las nubes. En un frío día de noviembre en que las nubes parecían prometedoras, Schaefer voló mientras Langmuir se quedaba en Tierra para observar. Después de haber encontrado la nube propicia, Schaefer puso su máquina de nieve carbónica en marcha, pero hacía tanto frío que el motor se estropeó antes de que la mitad de la nieve carbónica se usara. Incapaz de repararla y completamente helado, lanzó por la ventana el resto de la nieve carbónica en la nube y regresó. ¡Langmuir lo acogió con gritos de triunfo, había conseguido hacer nevar!

Cuando Schaefer descubrió que no había necesidad alguna de partículas finas para hacer cristalizar la nieve, paró naturalmente sus investigaciones en esta dirección. Pero otro joven investigador de la General Electric, Bernard Vonnegut, se interesaba en el problema. Nacido en 1914 en Indianápolis, había estudiado los procesos de fabricación del

hielo cuando era estudiante en una escuela de ingenieros. Su profesor, Findeisen, había sugerido utilizar cierto material como partícula cristalizante, pero Vonnegut no tardó mucho tiempo en darse cuenta de que la idea de Findeisen era falsa ya que las partículas eran demasiado grandes. Se puso a hojear libros de química para encontrar un compuesto que tuviera buena forma y fuera suficientemente pequeño. Encontró lo que buscaba en el ioduro de plata. Estaba seguro de ello. Una vez que entró en la General Electric se procuró este producto e inventó una técnica para enviar al aire finas partículas. Pero esto no dio nada. No queriendo admitir que Schaefer tenía razón, se obstinó. Rehizo sus cálculos varias veces y, al final, pidió a un colega que examinara su ioduro de plata: no era puro. Se procuró más y rehizo su experimento que, esta vez, fue un éxito. Aunque el ioduro de plata es un producto caro, Vonnegut había descubierto un procedimiento tan ingenioso para transformarlo en humo, que hacía falta muy poca cantidad y su método era más barato que el de Schaefer. Es este método el que se usa todavía hoy en día.

LOS QUANTA

Un cuerpo negro es un cuerpo que absorbe completamente la radiación electromagnética. Su coeficiente de absorción, que mide la fracción de la energía incidente absorbida, es igual a uno. Su emisividad, es decir la potencia de la radiación electromagnética emitida por unidad de superficie, no depende más que de la temperatura y de la frecuencia.

Un problema físico importante, a finales del siglo pasado, era encontrar la ley de emisividad del cuerpo negro. Sin embargo todas las tentativas basadas en la termodinámica clásica eran incapaces de resolverlo completamente. Los resultados obtenidos estaban en contradicción con la experiencia y eran incluso absurdos, puesto que preveían una emisividad total infinita.

A este problema se enfrentó Max Planck en 1897. Puesto que la radiación del cuerpo negro no depende más que de la temperatura de las paredes y no de su naturaleza, Planck tuvo la idea de estudiar un cuerpo negro cuyas paredes fueran osciladores de Hertz. Sus propiedades podían ser calculadas sin hacer intervenir la estructura molecular entonces desconocida. Planck encontró así que la emisividad era proporcional a la energía media de los osciladores de las paredes. Pero el problema seguía sin estar resuelto. Suponiendo la validez de la ley de Wien, relativa a la distribución de la energía espectral, que era entonces la que mejor se acomodaba a la experiencia, Planck calculó que la inversa de la derivada segunda de la entropía respecto a la energía era proporcional a la energía. Sin embargo, medidas experimentales posteriores invalidaron estos resultados. Para pequeñas energías y, por tanto, para pequeñas longitudes de onda, el acuerdo entre la teoría y la experiencia era satisfactorio. No era así, sin embargo, para grandes energías y grandes longitudes de ondas. Había proporcionalidad no con relación a la energía sino con relación a su cuadrado. Planck se entregó entonces simplemente a una interpolación entre las dos fórmulas y obtuvo entonces una ley conforme con la experiencia.

Dejemos hablar a Planck:

> Mas, incluso admitiendo la validez absolutamente rigurosa de la fórmula de la radiación, mientras poseía meramente el carácter de una ley descubierta por una intuición feliz, no se podía esperar que tuviese sino un significado formal. Por esta razón, desde el mismo día que hube formulado esta ley, comencé a acometer el problema de su verdadera interpretación física. Esta investigación me condujo automáticamente a estudiar las relaciones recíprocas entre entropía y probabilidad.

Y en otra obra, añade:

> Después de algunas semanas, que estuvieron ciertamente ocupadas por el trabajo más encarnizado de mi vida, se hizo una luz en la oscuridad donde me debatía y se abrieron ante mí perspectivas insospechadas. [*Initiations à la physique*, Flammarion, París, 1941, p. 73].

Para calcular más fácilmente la probabilidad con los métodos del análisis combinatorio, Planck descompuso la energía E de un oscilador en cantidades pequeñas de la forma $E = Pe$ donde P es un número entero y donde e es tan pequeño como se quiera. Gracias a este artificio podía calcular la energía media de un oscilador y volver a encontrar su fórmula del cuerpo negro. La descomposición $E = Pe$ no era más que un intermediario de cálculo cómodo sin significación particular. Pero la historia no se detiene todavía aquí. Para obtener el acuerdo con la ley de Wien de las bajas energías no se podía tomar e tan pequeño como se quisiera. Era necesario que e fuera finito y proporcional a la frecuencia u de la radiación o sea $e = hu$, donde h es una constante universal conocida ahora como constante de Planck. Este era un resultado revolucionario: había que renunciar en física a la idea de continuidad y aceptar que algunos fenómenos físicos puedan tener relaciones de causa-efecto discontinuas, *cuantificadas*. Evidentemente un resultado tan revolucionario y tan fundamental encontró numerosas resistencias. El mismo

Planck tenía tan poca confianza en su método que durante años intentó explicar sus resultados de una forma más clásica aunque estuviera convencido de la importancia de su descubrimiento.

El escribió más tarde:

> Por una parte, en efecto, esta constante [h] era absolutamente necesaria para obtener el verdadero valor de la entropía, ya que solamente gracias a ella se pueden determinar los dominios o intervalos indispensables para el cálculo de la probabilidad y, por otra parte, resultaba absolutamente imposible, a pesar de los mayores esfuerzos, enmarcarla dentro de una teoría clásica, cualquiera que fuera. Mientras se pudiera tratar la constante como infinitamente pequeña todo iba muy bien; pero, en el caso general, había un momento en el que se llegaba a una solución de continuidad [...] Ante el fracaso de todos los intentos destinados a salvar el abismo, era cada vez más difícil escapar al dilema siguiente: o bien toda mi serie de deducciones, que terminaba por encontrar por el cálculo la ley de la radiación negra, era, por principio, ilusoria y nada más que un artificio de cálculo sin base real, o bien una idea correspondiente a algún ente físicamente real dominaba toda esta deducción, y por consiguiente el quantum de acción [h] debía jugar un papel fundamental en física. Bajo la segunda alternativa este quantum representaba algo absolutamente novedoso; insospechado hasta entonces, y que parecía destinado a revolucionar el pensamiento físico basado sobre la misma noción de continuidad, inherente a todas las relaciones causales desde el descubrimiento del cálculo infinitesimal por Leibniz y Newton.
>
> La experiencia se inclinó por la segunda alternativa.

Notemos, de paso, que cuando Plank afirmó que la noción de continuidad era inherente a todas las relaciones causales, se convirtió en profeta, ya que anticipó lo que ocurrió cuando Heisenberg descubrió las relaciones de incertidumbre, después de que la escuela de Copenhague, con Bohr a la cabeza, considerara que la naturaleza es esencialmente probabilística y cuestionara el principio de causalidad. Se sabe que esta interpretación probabilística no contó jamás con el asentimiento de Einstein, que pensaba que la mecánica cuántica, aunque tuviera éxitos clamorosos a su favor, estaba incompleta, y que el mundo aparecería de nuevo como determinista cuando su construcción hubiera sido acabada. Este viejo debate entre Bohr y Einstein está a punto de ser zanjado por las experiencias en curso. Es nuestra interpretación filosófica del mundo real la que corre el riesgo de ser modificada, incluso, completamente trastocada. Estos últimos desarrollos están expuestos en el libro de F. Selleri, *Le grand débat de la théorie quantique*, Flammarion, París, 1986.

Pero volvamos al final de nuestra historia.

Cuando uno se llama Albert Einstein, ninguna revolución científica produce temor y él convirtió de hecho la idea de Planck en más revolucionaria todavía. Según Planck, la energía no podía estar en la materia más que cuantificada, pero en la radiación luminosa quedaba sometida a las leyes continuas de Maxwell. Einstein mostró que estas dos teorías eran incompatibles y que era preciso suponer igualmente que toda radiación estaba cuantificada: la luz debía comportarse no solamente como una onda para verificar las ecuaciones de Maxwell sino que debía componerse igualmente de partículas, de quantas cuasi-corpusculares que llamamos fotones.

Así se unificaron las concepciones ondulatorias y corpusculares de la luz que conmocionaban la física desde Newton. Así podría nacer la mecánica cuántica y toda la física moderna.

FUENTES: M. Planck, *Autobiographie scientifique*, Albin Michel, París, 1960, p. 91.
E. Segré, *Les physiciens modernes et leurs découvertes*, Fayard, París, 1984.
B. Hoffmann, P. Paty, *L'étrange histoire des quanta*, Seuil, París, 1981.
L. Leprince-Ringuet (ed.), *Les inventeurs célèvres*, Mazenot, París, 1960.
M. Planck, *Initiations à la physique*, Flammarion, París, 1941 pp. 73-76.
F. Selleri, *Le grand débat de la théorie quantique*, Flammarion, París, 1986.

LA RELATIVIDAD

Desde hacía 50 años los físicos luchaban contra la idea del éter, este medio sutil que llenaba todo el espacio y que servía de soporte para la propagación de la luz y de los fenómenos eléctricos. No solamente sus propiedades se resistían al estudio sino que su misma existencia conducía a prever fenómenos que no se manifestaban a pesar de los progresos espectaculares de las técnicas de medida. Los teóricos intentaron entonces manipular la teoría electromagnética de J.C. Maxwell. H.A. Lorentz -entre otros- estudió la forma en que se transforman las ecuaciones de Maxwell cuando se pasa de un sistema de referencia a otro en movimiento rectilíneo y uniforme con relación al primero. Mostró que estas ecuaciones permanecen invariantes cuando se reemplazan las variables de espacio x, y, z y la variable temporal, por nuevas variables x', y', z' y t' relacionadas con las primeras mediante ciertas relaciones lineales que ahora se llaman *transformación de Lorentz*. Lorentz, condicionado por las ideas que habían circulado hasta entonces, no consideraba las nuevas variables más que como cantidades ficticias, sin ninguna realidad física, sino únicamente destinadas a facilitar el cálculo.

En ningún caso se habían considerado las verdaderas coordenadas y el verdadero tiempo del nuevo sistema de referencia.

Despreciando los *a priori* y las ideas recibidas, Albert Einstein decidió tomar, como punto de partida de sus trabajos, la hipótesis de que las nuevas variables eran verdadera, real y físicamente las del nuevo sistema y que la transformación de Lorentz era la expresión física de la relación que existe entre dos sistemas de referencia en movimiento rectilíneo y uniforme uno con relación al otro. Hipótesis atrevida, ya que entrañaba el abandono de la mecánica newtoniana, pero hipótesis fructuosa porque es así como nació la teoría de la relatividad restringida en 1905.

Era evidentemente deseable extender el principio de la relatividad a movimientos acelerados cualesquiera. Interpretando geométricamente las fuerzas de gravitación de manera análoga a las fuerzas centrífugas en un sistema de referencia en rotación al que se puede considerar como resultante, en este sistema, de la forma del espacio, Einstein pudo realizar la teoría de la relatividad en 1916.

Einstein ha contado cómo llegó a esta teoría. Extraeré de su texto los pasajes que me parecen más significativos omitiendo los detalles técnicos para no conservar más que la osamenta del proceso intelectual:

Cuando, con la teoría especial de la relatividad restringida, se obtuvo la equivalencia de todos los sistemas llamados de inercia para formular las leyes de la naturaleza (1905), se planteó casi espontáneamente la cuestión de saber si no habría una equivalencia más amplia para los sistemas de coordenadas. Dicho de otro modo, si no podemos atribuir a la idea de velocidad más que un sentido relativo ¿debemos, sin embargo, obstinarnos en considerar la aceleración como un concepto absoluto?

Di por primera vez un paso adelante hacia la solución del problema, cuando intenté enmarcar la ley de gravitación dentro de la teoría especial de la relatividad restringida. Como la mayor parte de los autores de esta época, traté de establecer una ley de campo para la gravitación [...] Pero tales investigaciones me condujeron a un resultado que me hizo desconfiar mucho [...] Fue entonces cuando rechacé como inadecuada la tentativa, de la que he hablado antes, de tratar el problema de la gravitación en el marco de la relatividad restringida. Este marco no se correspondía manifiestamente con la propiedad fundamental de la gravitación [...] Estas reflexiones me ocuparon de 1908 a 1911 [...] En un principio la única cosa importante era haber reconocido que no se podía llegar a una teoría racional de la gravitación más que extendiendo el principio de relatividad.

Convenía por tanto establecer una teoría cuyas ecuaciones conservaran su forma, incluso con transformaciones no lineales de coordenadas. Ahora bien yo no sabía entonces si eso debía aplicarse a transformaciones de coordenadas absolutamente continuas cualesquiera, o bien sólo a algunas.

Vi pronto [que] [...] la interpretación simplemente física de las coordenadas debía desaparecer [...] Esta constatación me molestó mucho, ya que no podía comprender lo que entonces las coordenadas debían, en suma, significar en física. No llegué a resolver este dilema más que hacia 1912 [...] Pero quedaban todavía dos problemas que resolver [...] He trabajado en estas cuestiones de 1912 a 1914 con mi amigo Grossmann. Dos años antes de la publicación de la teoría de la relatividad general habíamos tomado ya en consideración las ecuaciones correctas de la gravitación, pero no podíamos enfocar su utilización desde el punto de vista de la física. Sobre este tema, creía todavía poder demostrar, basándome en consideraciones generales, que una ley de gravitación invariante relativa a las transformaciones de coordenadas elegidas a voluntad, no podría unirse al principio de causalidad. Tales eran los errores de mi mente que me costaron dos años de trabajo muy duro hasta que por fin, hacia final de 1915, me di cuenta de estos errores y descubrí la conexión con los hechos de la experiencia astronómica, después de que, todo avergonzado, volví a la curvatura de Riemann.

Iluminado por los conocimientos ya adquiridos, el fin felizmente alcanzado apareció casi como evidente y todo estudiante inteligente lo capta sin gran esfuerzo. Pero estas investigaciones, llenas de presentimientos, hechas en la sombra, durante años, acompañadas de un deseo ardiente de llegar a la meta, con sus alternancias de confianza y cansancio, se terminan finalmente con la brusca aparición de la claridad, todo eso no puede ser conocido verdaderamente más que por el mismo que lo ha sentido. [A. Einstein, *Comment je vois le monde*, Flammarion, París, 1934, pp. 234-241].

Cuando Albert Einstein recibió el premio Nobel de física en 1922 no pudo desplazarse a Estocolmo para la ceremonia de entrega del premio en diciembre porque había aceptado antes una invitación a Japón. El 14 de diciembre de 1922, y solicitado por K. Nishida, profesor de filosofía de la Universidad de Kyoto, Einstein dio una conferencia titulada *Cómo he creado la teoría de la relatividad*. Fue una exposición improvisada que Einstein hizo en alemán y sin notas. Una traducción simultánea fue hecha por J. Ishiwara, profesor de física en la Universidad de Tohoku y que había estudiado con Arnold Sommerfeld y Einstein entre 1912 y 1914. En 1923, Ishiwara publicó sus notas en una revista japonesa. Este artículo fue traducido parcialmente al inglés por T. Ogawa en 1979. La conferencia de Einstein fue traducida al inglés íntegramente por Yoshimasa A. Ono en 1982. Nosotros damos aquí la primera traducción al castellano:

No es fácil hablar de la forma en la cual me surgió la idea de la teoría de la relatividad; había tantas complejidades ocultas para motivar mi pensamiento que el impacto de cada pensamiento era diferente a las distintas etapas del desarrollo de la idea. Yo no las mencionaré todas aquí. No volveré a contar tampoco los artículos que he escrito sobre el tema. En su lugar, voy a describir brevemente el desarrollo de mi pensamiento en conexión directa con este problema.

Hace más de 17 años que tuve por primera vez la idea de desarrollar la teoría de la relatividad. Aun cuando no puedo decir exactamente de dónde me surgió la idea, estoy seguro de que estaba contenida en el problema de las propiedades ópticas de los cuerpos en movimiento. La luz se propaga a través del mar de éter en el cual la Tierra se mueve. En otros términos, el éter se desplaza en relación a la Tierra. Intenté encontrar una prueba experimental clara del flujo de éter en la literatura física pero fue en vano.

Quise entonces verificar yo mismo el flujo de éter en relación a la Tierra, o dicho de otro modo, el movimiento de la Tierra. Cuando reflexioné por primera vez sobre este problema, no dudé de la existencia de éter o del movimiento de la Tierra a través de él. Pensaba en la experiencia siguiente usando dos pares termoeléctricos: colocar unos espejos de manera que la luz proveniente de una sola fuente sea reflejada en dos direcciones diferentes, una paralela al desplazamiento de la Tierra y otra antiparalela. Si suponemos que hay una diferencia de energía entre los dos haces reflejados, podemos medir la diferencia de calor generada utilizando los dos pares termoeléctricos. Aunque la idea de esta experiencia fuera muy próxima a la de Michelson, no la llevé a cabo.

Cuando daba vueltas a este problema siendo estudiante supe del extraño resultado de la experiencia de Michelson. Rápidamente llegué a la conclusión de que nuestra idea concerniente al desplazamiento de la Tierra en relación al éter era incorrecta si se admitía el resultado nulo de Michelson como un hecho. Era el primer camino que me conducía a la teoría de la relatividad restringida. Por lo que he llegado a creer que el movimiento de la Tierra no puede ser detectado por ninguna experiencia óptica aunque la Tierra gire alrededor del Sol.

Tuve la ocasión de leer la monografía de Lorentz en 1895. Discutía y resolvía completamente el problema de la electrodinámica en el primer orden de aproximación, es decir, despreciando los términos de orden superior a v/c, donde v es la velocidad del cuerpo en movimiento y c la de la luz. Probé entonces a analizar la experiencia de Fizeau a partir de la hipótesis de que las ecuaciones de Lorentz para los electrones son válidas tanto en el sistema de referencia de los cuerpos en movimiento como en el del vacío, como había sido discutido al principio por Lorentz. En esta época yo creía firmemente que las ecuaciones de la electrodinámica de Maxwell y las de Lorentz eran exactas.

Además la hipótesis de que estas ecuaciones debían ser válidas en el sistema de referencia de los cuerpos en movimiento conduce al concepto de invarianza de la velocidad de la luz que, sin embargo, contradice la regla de la suma de velocidades utilizada en mecánica.

¿Por qué estos dos conceptos se contradecían? Me daba cuenta de que esta dificultad era realmente difícil de resolver. Pasé en vano casi un año intentando modificar la idea de Lorentz con la esperanza de resolver este problema.

Por suerte, uno de mis amigos de Berna (Michele Besso) me ayudó a salir del apuro. Le visité con este problema un bonito día. Comencé entonces la conversación con él: *Ultimamente he trabajado sobre un problema difícil. Hoy he venido a verte para atacar este problema contigo.* Discutimos cada aspecto de ese problema. Después comprendí de pronto donde residía la clave del problema. Al día siguiente volví a verlo de nuevo y sin decir buenos días le dije: *Gracias. He resuelto completamente el problema.* Un análisis del concepto de tiempo era mi solución. El tiempo no podía ser definido de forma absoluta y había una relación inseparable entre el tiempo y la velocidad de la señal. Con este nuevo concepto, podía resolver completamente por primera vez todas las dificultades.

En cinco semanas la teoría de la relatividad restringida estaba construida. No dudaba de que esta nueva teoría era razonable desde el punto de vista filosófico. Pensaba igualmente que la nueva teoría estaba de acuerdo con el argumento de Mach. Contrariamente al caso de la teoría de la relatividad general, donde el argumento de Mach se incorporaba en la teoría, en la de la relatividad restringida, el análisis de Mach tenía solamente una consecuencia indirecta.

Veamos la forma en que se creó la teoría de la relatividad general.

Mis primeras ideas sobre la teoría de la relatividad general fueron concebidas dos años más tarde, en 1907. La idea se me ocurrió de repente. No estaba satisfecho de la teoría de la relatividad restringida porque se limitaba a los sistemas de referencia que se desplazaban con velocidad constante unos con relación a otros y no podía aplicarse a un movimiento general del sistema de referencias. Luchaba por suprimir esta restricción y quería formular el problema para el caso general.

En 1907 Johannes Stark me pidió que escribiera un artículo sobre la teoría de la relatividad restringida en el periódico *Jahrbuch der Radioaktivität*. Mientras lo escribía, llegué a pensar que todas las leyes de la naturaleza a excepción de la de la gravitación podían ser abordadas en el cuadro de la teoría de la relatividad restringida. Quería descubrir la razón de esto pero no podía llegar a ello de manera simple.

El punto que menos me satisfacía era el siguiente: así como la relación entre inercia y energía estaba explícitamente dada por la teoría de la relatividad restringida, la relación entre inercia y masa, o la energía del campo gravitacional, no estaba claramente elucidada. Sentía que este problema no podía ser resuelto en el cuadro de la teoría de la relatividad restringida.

La inspiración se produjo un día de repente. Estaba sentado en una silla en mi oficina de patentes en Berna. De golpe me vino una idea: si un hombre cae en caída libre, no sentirá su peso. Estaba desconcertado. Esta simple experiencia de pensamiento me produjo una fuerte impresión. Ella me condujo a la teoría de la gravitación. Continuaba mis reflexiones: un hombre que cae experimenta una aceleración (entonces lo que siente y lo que observa tienen lugar en un sistema de referencia acelerado). Decidí extender la teoría de la relatividad al sistema de referencia con aceleración. Sentía que haciendo esto podría resolver al mismo tiempo el problema de la gravitación. Un hombre que cae no siente su peso porque en su sistema de referencia hay un nuevo campo gravitacional que anula el campo gravitacional debido a la Tierra. En el sistema de referencia acelerado tenemos necesidad de un nuevo campo gravitacional.

En esa época no llegué a resolver este problema completamente. Esto me entretuvo ocho años más antes de obtener finalmente la solución completa. Durante estos años obtuve respuestas parciales a este problema.

Ernst Mach insistía sobre la idea de que los sistemas con aceleración eran equivalentes unos a otros. Esta idea contradecía la geometría euclidiana puesto que en un sistema de referencia con aceleración no puede aplicarse la geometría euclidiana. Describir las leyes físicas sin referencia a la geometría es como describir nuestros pensamientos sin palabras. Nosotros necesitamos de las palabras para expresarnos. ¿Qué debemos buscar para describir nuestro problema? Este problema estaba sin solución desde 1912, cuando tuve la buena inspiración de que la teoría de superficies de Karl Friedrich Gauss podría ser la llave de este misterio. Pensaba que las coordenadas de superficie de Gauss eran muy importantes para la comprensión de este problema. No sabía entonces que Bernhard Riemann (que había sido alumno de Gauss) había discutido en profundidad los fundamentos de la geometría. Recuerdo los cursos de geometría de mis estudios (en Zurich) por Carl Friedrich Geiser, en los que exponía la teoría de Gauss. Pensaba que los fundamentos de la geometría tenían un profundo significado físico en este problema.

Cuando regresé a Zurich desde Praga, mi amigo, el matemático Marcel Grossmann, me esperaba. El me había ayudado anteriormente en mi enriquecimiento sobre literatura matemática cuando trabajaba en la oficina de patentes en Berna y tenía dificultades para conseguir artículos de matemáticas. Me enseñó en primer lugar el trabajo de Curbastro Gregorio Ricci y después el trabajo de Riemann. Discutí con él si el problema podía ser resuelto utilizando la teoría de Riemann, o en otros términos, usando el concepto de invarianza de los puntos de una recta. Escribimos un artículo sobre este tema en 1913 a pesar de que no pudimos obtener las ecuaciones correctas para la gravitación. Estudiaba más a fondo las ecuaciones de Riemann para encontrar allí solamente múltiples razones por las cuales los resultados deseados no podían obtenerse por esta vía.

Tras dos años de lucha, descubrí que había cometido errores en mis cálculos. Volví a la ecuación inicial utilizando la teoría de la invarianza y probé a construir las ecuaciones exactas. ¡En dos semanas las ecuaciones exactas aparecieron!

En lo que concierne a mi trabajo después de 1915, quería hablar solamente del problema de la cosmología. Este problema ha conectado a la geometría del universo y al tiempo. La base de este problema proviene de las condiciones a los límites de la teoría de la relatividad general y de la discusión del problema de la inercia por Mach. A pesar de no comprender exactamente la idea de Mach sobre la inercia, su influencia sobre mi pensamiento fue enorme.

Resolví el problema de la cosmología imponiendo la invarianza de las condiciones a los límites para las ecuaciones gravitacionales. Eliminaba finalmente los límites considerando el Universo como un sistema cerrado. Como resultado, la inercia emerge como una propiedad de la materia interactuante y debe desaparecer cuando no hay otra materia para interactuar con ella. Creo que con este resultado, la teoría de la relatividad general puede ser comprendida de manera satisfactoria en el plano epistemológico.

He aquí una pequeña idea histórica de mis pensamientos cuando creé la teoría de la relatividad. [*Physics Today, 35* (1982), nº 8, pp. 45-47].

La teoría de los quanta y la de la relatividad están entre las más bellas teorías físicas imaginadas por el genio humano. La primera apareció gracias a una hipótesis atrevida, rechazando las ideas preconcebidas y la segunda por una analogía mostrando la fuerte originalidad del pensamiento de Albert Einstein.

Es bien conocido que Henri Poincaré había llegado casi al mismo punto que Einstein sobre la relatividad restringida. Sin embargo, a pesar de ser uno de los más brillantes matemáticos de todos los tiempos no tenía un espíritu osado y no se decidía. El no supo interpretar, en términos físicos, las ecuaciones obtenidas. A propósito de la relatividad escribió:

[...] es porque yo he pensado mucho tiempo que estas consecuencias de la teoría, contrarias al principio de Newton, acabarían un día por ser abandonadas. [*La valeur de la science*, pp. 136-137].

Hay que saber a veces ser iconoclasta. Asimismo, a propósito de los quanta, ha dicho: *¿Admitiré que no he estado satisfecho de esta nueva hipótesis?* [*Dernières pensées*, p. 125]. Estaba igualmente opuesto a las ideas matemáticas, entonces un poco revolucionarias, de Cantor.

Es menos conocido que otro matemático francés de gran envergadura, Jacques Hadamard, que pasó también al lado de la relatividad restringida. El ha expuesto su no-descubrimiento en el *Congreso Internacional de Filosofía* en Nápoles en 1924. En el artículo titulado *Cómo no he encontrado la relatividad* nos dice:

[...] me ha sido precisa una particular cabezonería para no haber caído en la cuenta de las consecuencias de mis propias investigaciones [...]. [Pp. 441-453].

Tras los desarrollos matemáticos que pasaremos aquí por alto, Hadamard nos habla de la recta de Kirchhoff sobre la cual algunas magnitudes llegan a ser infinitas:

Esta línea singular, que se introduce naturalmente por el origen físico de la cuestión, no tiene analíticamente hablando ninguna relación con la ecuación [...]

¡He impreso esto en alguna parte!

Sí, desde entonces, sabía bien, como todos los matemáticos, que hay una infinidad de cambios de variables lineales (dejando aparte otros más complicados) susceptibles de conservar la forma en la una o en la otra de las dos ecuaciónes en derivadas parciales. No sólo lo sabía sino que mi atención se mostraba, de una manera absolutamente necesaria, atraída por estos cambios de variables, dada la cuestión que me estaba planteando; y era muy visible que tales cambios de variables no conservaban, en general, la situación privilegiada de la recta de Kirchhoff, sino muy al contrario podían llegar a coincidir con no importa qué otra recta salida del mismo punto A e interior al cono de ondas.

Pero de aquí a pensar que esta recta de Kirchhoff no tenía un significado físico necesario e intangible, era demasiada audacia para mí. ¿Qué quieren ustedes?, como todos mis colegas admiraba la obra cada día más vasta de los físicos, y a esta admiración se unía el respeto que el sentimiento de mi incompetencia me imponía. No había comprendido suficientemente que la física es asunto de esas personas a las que hay que saber faltar al respeto en ocasiones.

Y así es como, matemático desprovisto de imaginación, fui incapaz de trasladar a lo concreto la conclusión que la teoría matemática me imponía irresistiblemente, y como me contenté con inclinarme respetuosamente ante el punto de vista de Kirchhoff. La moraleja de esta historia es que, en su dominio, el científico no debe respetar nada y no más la obra de un Kirchhoff que lo que Copérnico respetó la de Aristóteles o Ptolomeo; y es lo que todos hacemos después de Einstein.

Es la historia del huevo de Colón; no sé con certeza si ésta no es la historia de muchos descubrimientos matemáticos, y, más generalmente, científicos.

Pero hay que saber poner al mal tiempo buena cara y decir con Hadamard:

Los errores a pesar de ser menos deseables que los éxitos, son con frecuencia más instructivos y es una lección que no pasa sin provecho para el científico que constata cómo ha podido pasar al lado de un descubrimiento importante sin sospecharlo.

Poincaré y Hadamard habrían debido meditar el pensamiento del químico inglés Joseph Priestley (1733-1804):

Los físicos más atrevidos y más originales en sus experimentos son los que dan curso libre a su imaginación, admiten la combinación de las ideas más disparatadas; y aunque varias de estas asociaciones de ideas sean extravagantes y quiméricas, habrá otras que tendrán la suerte de alumbrar los mayores descubrimientos, que, personas tímidas, prudentes y lentas en sus ideas, no podrán jamás alcanzar. [Louis de Broglie, "La physyque contemporaine et l'ouvre d'Albert Einstein", en L. de Broglie, *Savants et découvertes*, Albin Michel, París, 1951, pp. 306-335]. [Maurice Daumas, *Lavoisier*, Gallimard, París, 1941, p. 108].

LOS IMPULSOS NERVIOSOS

Uno de los ejemplos más extraordinarios del trabajo del subconsciente es el caso de Otto Loewi (1873-1961) quien recibió el premio Nobel de medicina en 1936 por su teoría química de la transmisión de los impulsos nerviosos. Desde 1903, Loewi pensaba que la transmisión de estos impulsos era debida a un agente químico mientras que en esta época se creía más bien en una transmisión de naturaleza eléctrica. No fue sin embargo hasta 1920 cuando tuvo la idea de la experiencia decisiva tras 17 años de trabajo inconsciente. El ha contado las circunstancias de su descubrimiento:

La noche anterior al domingo de Pascua de este año, me desperté, encendí la luz y escribí algunas notas sobre un minúsculo trozo de papel delgado. Después volví a dormirme. A las seis de la mañana me vino a la cabeza que durante la noche nunca escribo cosas muy importantes, pero fui incapaz de descifrar los garabatos. La noche siguiente, a las tres, la idea me volvió a surgir. Era el plano de una experiencia para determinar el sí o el no de la hipótesis de la transmisión química que yo había emitido 17 años antes. Me levanté inmediatamente, fui al laboratorio y realicé una experiencia simple sobre un corazón de rana según el modelo nocturno [...]

La historia de este descubrimiento muestra que una idea puede dormir durante décadas en el espíritu inconsciente y después volver repentinamente. Además, indica que debemos tener confianza a veces en una intuición repentina sin demasiado escepticismo. Si la hubiese examinado cuidadosamente durante el día, habría, sin ninguna duda, rechazado el tipo de experiencia que hice [...]

Algún tiempo después, al escribir mi bibliografía presté atención sobre todo a los artículos publicados en mi laboratorio. Localicé dos estudios hechos aproximadamente dos años antes de que surgiera mi idea nocturna, en los cuales, buscando igualmente una sustancia emitida por el corazón, había aplicado la técnica usada en 1920. Esta experiencia, según mi interpretación, era una preparación esencial en la idea del proyecto completo. De hecho, el concepto nocturno representaba una asociación repentina de la hipótesis de 1903 con el método testeado antes en otras experiencias. La mayor parte de los descubrimientos llamados *intuitivos* provienen de tales asociaciones hechas en el subconsciente. [O. Loewi, *Perspectives in biology and medicine*, The University of Chicago Press, 1961].

EL OFTALMOSCOPIO

Ya he dicho que algunos descubrimientos, una vez efectuados, parecen tan sencillos, casi infantiles, que uno se pregunta por qué no se habían hecho antes. Parece que el caso no sea raro tal como lo cuenta Hermann von Helmholtz (1821-1894) que inventó el oftalmoscopio en 1851:

Preparando mis lecciones, me di cuenta de la posibilidad de construir un oftalmoscopio [...] El oftalmoscopio es lo más popular que he hecho; pero, para esta invención, he tenido relativamente más suerte que mérito. Tenía que exponer a mis alumnos la teoría de la iluminación del ojo, dada por Brücke. Sobre este punto, Brücke estaba a un paso de la invención del oftalmoscopio. El no se formuló la pregunta: *¿Qué imagen óptica forman los rayos saliendo del ojo iluminado?* Para el objetivo que él perseguía, no era necesario formularse esta pregunta; pero, si lo hubiese hecho, podía haber respondido tan rápidamente como yo.

Helmholtz y Brücke tenían la misma edad, la misma formación y se interesaban por los mismos problemas. Según el testimonio del mismo Helmholtz, si la invención no la hizo Brücke fue porque simplemente no se planteó el problema.

FUENTE: R. Taton, ob. cit., pp. 74-76.

LA RADIOACTIVIDAD

El azar juega un papel en el descubrimiento científico, por lo general, más en física que en matemáticas. Aunque la historia sea muy conocida contaré de nuevo el descubrimento de la radioactividad.

A finales de 1895, el descubrimiento de los rayos X por Röntgen había interesado vivamente al mundo científico. Estos rayos eran emitidos por las paredes de un tubo de vidrio que acababan de ser bombardeadas por rayos catódicos. Las paredes se hacían entonces fosforescentes. Henri Becquerel, que trabajaba sobre la fosforescencia y la fluorescencia, tuvo conocimiento del descubrimiento de los rayos X en el curso de una conversación con Henri Poincaré. Pensó que los dos fenómenos podían estar ligados y que había que investigar si los cuerpos fosforescentes o fluorescentes emitían rayos X. Así, guiado por una idea que finalmente iba a revelarse falsa, Becquerel intentó averiguar si el uranio convertido en fosforescente por acción de la luz emitía rayos X.

Tras haber expuesto al Sol una lámina recubierta con una capa de sal de uranio, la envolvía en un papel negro y la encerraba en un cajón en contacto con una placa fotográfica. Tras desenvolver la placa fotográfica, vio que estaba impresionada. La sal de uranio emitía por tanto una radiación capaz de atravesar el papel negro. Todo sucedía como si el uranio, hecho fluorescente por su exposición al Sol, emitiera rayos X que impresionaban la placa fotográfica. Becquerel comunicó estos resultados a la Academia de Ciencias el 24 de febrero de 1896 sin concluir, sin embargo, sobre la naturaleza de la radiación. Algunos días más tarde quiso repetir la experiencia, pero el tiempo era gris y el Sol permaneció escondido. Así las sales de uranio y las placas fotográficas envueltas con papel negro permanecieron en un cajón.

El primero de marzo el Sol volvió. Pero Becquerel, científico escrupuloso, quiso comprobar que nada había pasado en el cajón y que las

placas fotográficas estaban todavía vírgenes. Para su asombro, vio que las placas habían sido impresionadas tan netamente como en las experiencias anteriores en las que el uranio había sido previamente expuesto al Sol. Así pues, el uranio emitía una radiación continua hubiera o no sido expuesto al Sol. La radioactividad estaba descubierta.

FUENTE: L. de Broglie, "La part du hasard dans la découverte", en L. de Broglie, *Savants et découvertes*, Albin Michel, París, 1951, pp. 45-47.

LAS GEOMETRIAS NO EUCLIDIANAS

En física muchas teorías nuevas, como la relatividad o la teoría de los quanta de luz, han nacido porque un investigador suficientemente audaz decidió de un golpe abandonar una hipótesis sobre la que estaba construida la antigua teoría por otra sobre la que iba a edificarse su nueva teoría. El caso es más raro en matemáticas donde todas las proposiciones se demuestran unas a partir de otras y donde ningún resultado, ni hipótesis alguna, reposa sobre una experiencia sensorial. Sin embargo, existen excepciones entre las que se encuentra la geometría que está fundada sobre un cierto número de axiomas indemostrables pero que el sentido común nos dice que aceptemos como verdades sin demostración. Así se expresaba Henri Poincaré:

> Toda conclusión supone premisas; estas premisas o bien son evidentes en sí y no necesitan demostración, o bien no pueden ser establecidas más que apoyándose en otras proposiciones, y como se podría remontar así hasta el infinito, toda ciencia deductiva y en particular la geometría, debe reposar sobre un cierto número de axiomas indemostrables. Todos los tratados de geometría comienzan por el enunciado de estos axiomas.

Entre ellos el célebre axioma de las paralelas de Euclides que establece por un punto exterior a una recta se puede hacer pasar una y sólo una paralela a ésta.

Se ha intentado durante mucho tiempo demostrar este axioma hasta el día en que se probó que esta demostración era imposible. Puesto que la demostración es imposible, ¿qué pasa cuando se reemplaza el axioma de las paralelas por su negación? Es la cuestión que se plantearon casi simultáneamente C. F. Gauss en 1824, J. Bolyai en 1825 y N. Lobatchevski en 1826. Los tres obtuvieron, a partir de nuevos axiomas, un sistema lógico de proposiciones sin contradicción. Así, al lado de la geometría euclídea clásica había lugar para las geometrías no euclídeas.

Este hecho era de tal manera inesperado, extraordinario y revolucionario que Gauss nunca lo publicó. En una carta dirigida en 1829 a F. W. Bessel, dijo: *Tengo miedo del griterío de los ignorantes*.

J. Bolyai publicó sus resultados como apéndice de un libro de su padre, W. Bolyai, que era a su vez un matemático de renombre. J. Bolyai nunca fue ni criticado ni atacado en público. Las únicas afrentas que tuvo que sufrir fueron las de su padre que no aceptaba sus ideas.

A Lobachevski le ocurrió todo lo contrario. Habiendo sometido sus resultados a la Academia de Ciencias de San Petersburgo, M. Ostrogradski declaró que *el estudio testimonia el poco cuidado con que se ha rèalizado, en su mayor parte ininteligible...* [este trabajo] *no merece la atención de los señores académicos*. Ostrogradski hizo publicar incluso, en el periódico *El Hijo de la Patria,* un artículo anónimo pero redactado por un periodista notoriamente reaccionario en el que escribió: *debe preguntarse por qué se escriben y sobre todo por qué se publican tales fantasmagorías*.

A pesar de la intervención de colegas, Lobachevski fue cesado en 1846 de su cargo de Rector de la Universidad de Kazan y relevado un año más tarde de su título de Profesor y de todos los restantes puestos universitarios que ocupaba.

Fue preciso esperar a B. Riemann para que las geometrías no euclídeas fueran aceptadas.

FUENTES: A. Soukhotine, *Las paradojas de la ciencia,* Mir, Moscú, 1983.
I. Toth, "La révolution non euclidienne", en *La recherche en histoire des sciences*, Seuil, París, 1983.
H. Poincaré, *La science et l'hipothese*, Flammarion, París, 1906.

LOS METODOS DE MONTE-CARLO

S. Ulam es un matemático de origen polaco que emigró a los Estados Unidos antes de la Segunda Guerra Mundial y participó en Los Alamos en la construcción de la bomba atómica. Es, además, el inventor de los métodos de Monte-Carlo. Concedámosle la palabra:

La idea que más tarde fue llamada método de Monte-Carlo se me ocurrió cuando jugaba al solitario durante mi enfermedad. Me di cuenta que podía ser mucho más útil en la práctica para tener una idea de la probabilidad de terminar ganando el juego del solitario, disponer las cartas, o hacer experiencias con el procedimiento y notar simplemente cuál es la proporción de ganancias, antes que intentar calcular todas las posibilidades de combinaciones que son,

en número creciente exponencialmente, tan grandes que, salvo en los casos muy elementales, no hay forma de estimarlos [...] En un problema un poco más complicado, la prueba real es mejor que un estudio de todas las series de posibilidades.

Se me ocurrió la idea de que esto podía ser igualmente cierto en todos los procesos que ponen en juego ramificaciones de sucesos, como en la producción y la multiplicación ulterior de neutrones en ciertas clases de materiales que contienen uranio u otros elementos escindibles. En cada etapa del proceso, hay numerosas posibilidades determinantes para la clase de neutrón. Se pueden escribir las ecuaciones diferenciales o integro-diferenciales para las *medias*, pero resolverlos u obtener una idea aproximada de las propiedades de la solución, es otro asunto.

La idea era probar millones de tales posibilidades y, en cada etapa, elegir al azar, por medio de un número aleatorio con una probabilidad conveniente, la clase o tipo de suceso que acabará en la cola por así decirlo en lugar de considerar todas las ramas. Tras haber estudiado las historias posibles de sólo algunos millones, se tendrá una buena muestra y una respuesta aproximada al problema. [S. Ulam, *Adventures of a mathematician*, Scribner, Nueva York, 1976, pp. 196 y siguientes].

EL METODO DEL GRADIENTE CONJUGADO

Aunque la historia que sigue no cuenta de manera precisa cómo se ha efectuado la creación del método del gradiente conjugado, es interesante citarla porque muestra el camino de una idea y su enriquecimiento por contactos entre diferentes personas.

El método del gradiente conjugado, bien conocido por quienes hacen análisis numérico u optimización, es una herramienta importante para resolver un sistema de ecuaciones o minimizar una función de varias variables. Actualmente este método se enseña a los estudiantes independientemente de los restantes métodos a los que se encuentra fuertemente conectado: método de los momentos y método de la tridiagonalización de Lanczos. En mi opinión, de esta forma pierde mucho de su atractivo. El problema de la elección del análisis numérico en la oposición a cátedra de matemáticas de 1983, conducía a los candidatos a restablecer esta filiación vía la teoría de los polinomios ortogonales formales.

En la introducción de su libro *Conjugate direction methods in optimization*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1980, Magnus Rodolphe

Hestenes, uno de los creadores del método del gradiente conjugado, cuenta su historia:

Poco después del final de la Segunda Guerra Mundial, tuvo lugar el desarrollo de las máquinas digitales de cálculo rápido. Estaba claro que los aspectos matemáticos del cálculo deberían ser reexaminados con el fin de hacer un uso eficaz de los ordenadores para los cálculos científicos. Así, bajo la dirección de Mina Rees, John Curtiss y otros, se creó un Instituto de Análisis Numérico en la Universidad de California en Los Angeles bajo la responsabilidad del National Bureau of Standards. Un instituto similar se formó en el National Bureau of Standards en Washington D. C. En 1949, J. Berkley Rosser llegó a ser director del grupo de la UCLA por un periodo de dos años. Durante este periodo, habíamos organizado un seminario sobre el estudio de la resolución de las ecuaciones lineales simultáneas y sobre la determinación de valores propios. G. Firsythe, W. Karush, C. Lanczos, T. Motzkin, L.J. Paige y otros participaron en este seminario. Descubrimos por ejemplo, que ni siquiera el método de eliminación de Gauss era comprendido perfectamente desde el punto de vista de la máquina y que no se había desarrollado ningún algoritmo de eliminación eficaz para ella. Era la época en que Lanczos estudiaba su relación a tres términos y yo tuve la fortuna de sugerir el método de los gradientes conjugados. Descubrimos después que las ideas de base que sostenían los dos procedimientos eran esencialmente las mismas. El concepto de conjugación no era nuevo para mí. En un artículo en común con G. D. Birkhoff en 1936, habíamos introducido la conjugación como útil de base para el estudio de las condiciones de isoperimetría natural en teoría variacional. En esta época yo desarrollaba un procedimiento de Gram-Schmidt conjugado para encontrar los diámetros mutuamente conjugados de un elipsoide, pero estaba desalentado para publicarlo porque no tenía sino poco o ningún interés en este método. Además, desarrollaba una teoría general de las formas cuadráticas en un espacio de Hilbert basado en gran parte en el concepto de conjugación. Esto me condujo al método de los gradientes conjugados. Simultánea e independientemente, E. Stiefel desarrollaba igualmente el método de los gradientes conjugados. Por esta razón le invitamos a nuestro grupo de la UCLA. Con su visita, Stiefel y yo escribimos nuestro artículo sobre el método de los gradientes conjugados y sobre los métodos de direcciones conjugadas en general que incluían los procedimientos de Gram-Schmidt conjugados. En los artículos siguientes desarrollaríamos métodos generalizados del gradiente conjugado y de la dirección conjugada que forman las bases de aplicaciones posteriores. Aun cuando esto no sea dicho explícitamente en nuestro artículo común, yo consideraba los gradientes conjugados como una técnica de optimización para minimizar una función cuadrática y fui responsable de su nombre.

LA LUZ RUSA

La bujía eléctrica, que los periódicos parisinos bautizaron como luz rusa, es un dispositivo luminoso constituido por un arco eléctrico generado entre dos electrodos de carbón. Su inventor, P. Yablotchkov, no llegaba a encontrar un medio sencillo para reducir el costo de fabricación. En efecto, los electrodos estaban inclinados uno hacia el otro y a medida que se consumían se hacía necesario encontrar un dispositivo que los aproximara automáticamente para que el arco no se apagara.

Un día, esperando en el restaurante a que le sirvieran, Yablotchkov se entretenía con su cuchillo y tenedor sin pensar en ello, hasta que en un momento los colocó paralelamente uno al lado de otro. Yablotchkov había encontrado la solución que buscaba. Disponiendo paralelamente los electrodos y separándolos por una substancia que se fundía con el calor se ahorraría todo dispositivo de aproximación.

FUENTE: A. Soukhotine, ob. cit., p. 212.

LA ESTRUCTURA DEL BENCENO

Se sabe que el benceno C_6H_6 tiene una estructura exagonal. Los seis radicales CH que lo componen no están dispuestos linealmente en el espacio sino según los seis vértices de un exágono.

El descubrimiento de esta estructura se produjo en 1865 por el químico alemán Friedrich August Kekulé von Strakonitz (1829-1896) que era, en esta época, profesor en Gante antes de serlo en Bonn. Previamente a su descubrimiento sólo existían estructuras químicas lineales. Sin embargo, este esquema no permitía explicar las propiedades de un gran número de substancias químicas. Había que imaginar otras estructuras.

El mismo ha relatado su descubrimiento:

Durante mi estancia en Londres viví mucho tiempo en Clapham Road, al lado de Clapham Common. Pero pasaba con frecuencia mis noches con un amigo, Hugo Müller, que vivía en Islington, al otro extremo de la ciudad. Hablábamos de todo, aunque sobre todo de nuestra querida química. Una buena noche de otoño, regresaba a casa en el último bus, sobre el imperial como siempre, atravesando las calles, desiertas a esta hora [...] Caí en un dulce sueño y los átomos comenzaron a bailar bajo mis ojos.

Cada vez que estos seres minúsculos se me aparecían estaban siempre en movimiento, un movimiento del que no había podido nunca reconocer su naturaleza. Esta vez, veía cómo dos pequeños átomos se unían para formar un par. Cómo uno más grande todavía llegaba a tener reunidos tres o cuatro de estos mismos pequeños átomos más gruesos para formar una cadena, arrastrando los más pequeños tras ellos, pero solamente a los extremos de esta cadena [...] El grito del conductor *Clapham Road* me despertó de mi sueño, pero pasé una parte de la noche dibujando algunas figuras que había soñado. Este fue el origen de la teoría de la estructura.

Me sucedió una cosa parecida con la teoría del benceno. Durante mi estancia en Gante (Bélgica), vivía un un elegante cuarto de soltero en la calle principal. Mi despacho de trabajo daba a una callejuela oscura donde la luz no penetraba. Para un químico que pasa todo el día en el laboratorio, esto no tenía gran importancia. Estaba dispuesto a escribir mi tratado, pero el trabajo no avanzaba, mis pensamientos estaban dispersos. Volví mi asiento hacia el fuego y me adormecí. De nuevo, los átomos se ponían a bailar delante de mí. Esta vez, los más pequeños quedaban modestamente en segundo plano. Mi espíritu, con la vista agudizada por la repetición de este género de visión, podía ahora distinguir estructuras de conformaciones variadas: veía largas hileras de átomos en fila india, enroscándose y retorciéndose como serpientes. Pero mirad qué sucedió. Una de estas serpientes comenzó a morderse la cola y a darse la vuelta delante de mí, como para mofarse. Me desperté como un relámpago y esta vez pasé el resto de la noche sacando consecuencias de esta hipótesis. H. Wolter, "Benzène et autres composés cycliques de 1825 a 1966". [«Les faits et les théories». *Rev. Quest. Sci., 137,* (1966), 395-423]. [Jean Jacques, *Confession d'un chimiste ordinaire*, Seuil, París, 1981. F. Vidal, ob. cit., p. 57]. [A. Soukhotine, ob. cit., pp. 154-155].

EL MICROSCOPIO BINOCULAR

Queriendo transformar un microscopio ordinario en microscopio binocular, S. Wengam intentaba imaginar en vano un prisma que separase en dos el haz luminoso que llegaba al ocular.

Debió interrumpir su trabajo durante dos semanas para entregarse a trabajos de ingeniería civil. Habiendo olvidado el microscopio, se sumergió una tarde en la lectura de una novela policíaca completamente insípida. Súbitamente tuvo la visión de un prisma cuya forma era exacta a la que había buscado inútilmente. Sacando entonces sus instrumentos de dibujo corrigió sus bocetos y sus cálculos y, al día siguiente, había inventado el microscopio binocular.

FUENTE: A. Soukhotine, ob. cit., p. 147.

EL ESTETOSCOPIO

Desde la época de Hipócrates los médicos sabían detectar ciertas manifestaciones del organismo aplicando la oreja sobre el pecho o la espalda del enfermo. Esta práctica era poco cómoda pero no dejaba de ser una fuente de información sobre el estado del paciente.

Un día, René Laennec (1781-1826) atravesaba el patio del Louvre. Dos niños jugaban. El primero rascaba un poste con la ayuda de un alfiler mientras que el segundo escuchaba el ruido con la oreja pegada en el otro extremo. Este incidente banal hizo nacer la idea del estetoscopio.

Una historia casi similar sucedió en 1875 a Elisha Gray, director de la Western Union Company. Paseaba en Milwaukee cuando los juegos de dos niños atrajeron su atención. Utilizaban dos latas de conserva cuyos fondos estaban unidos por una cuerda anudada sobre un agujero. Cuando la cuerda estaba tensa y uno de los niños hablaba en su lata de conserva, el otro lo oía perfectamente en la suya. Todos nosotros hemos jugado a esto de chicos. Así es como Gray tuvo la idea del teléfono acústico. Desgraciadamente registró su patente algunas horas después de que lo hiciera con el suyo Graham Bell.

FUENTES: A. Soukhotine, ob. cit., p. 164.
F. Vidal, ob. cit., p. 116.

EL FONOGRAFO

Thomas Alva Edison (1847-1931) trabajaba en su juventud como telegrafista. Su tarea consistía en tomar de oído mensajes emitidos en morse. Si la línea estaba mal, el pulsador funcionaba mal y, además, Edison era parcialmente sordo como consecuencia de un accidente. Había que adivinar los pasajes borrosos. Así inventó Edison un aparato muy simple para registrar los mensajes: hacía girar un disco de papel en el que se imprimían los puntos o las rayas en indentaciones. La compañía que lo empleaba estimó que era una pérdida de tiempo y despidió al joven Edison.

Once años más tarde, en su primer laboratorio en Menlo Park en New Jersey, Edison trabajaba en un telégrafo registrador en el que los puntos y las rayas se grababan por una aguja. Para trasmitir el mensaje se colocaba el disco de papel en un trasmisor provisto de una palanca de contacto que levantaba o bajaba según las indentaciones. La finalidad del aparato era solamente registrar y trasmitir impulsos eléctricos. Sin embargo, según las indentaciones, la palanca vibraba y producía sonidos. Si se hacía girar el disco más rápidamente la vibración se hacía continua y el sonido musical. Bastaba invertir la causa y el efecto para obtener el fonógrafo. Edison reemplazó primeramente el disco de papel por un cilindro recubierto de una hoja de estaño y en lugar de unir la aguja a un telégrafo lo hizo a una membrana que vibraba bajo la acción de la voz. Hizo a uno de sus obreros construir la máquina y se preguntó para qué podía servir. Una vez terminado el aparato tarareó una canción infantil, luego le dio a la manivela del cilindro. ¡La vibración de la palanca se había transformado en canción!

FUENTE: A. Koestler, *Le cri d'Archimède*, Calmann-Lévy, París, 1965, pp. 178-179.

LA CRISTALOGRAFIA

El abad René Just Haüy (1743-1822) era un humilde profesor del Collège Lemoine. Su pasatiempo era coleccionar plantas y minerales.

Un día, en casa de un amigo, se le cayó un bello conglomerado de cristales prismáticos de espato. Uno de los prismas se rompió de tal suerte que las caras de fractura eran perfectamente lisas. El nuevo cristal tenía una forma completamente distinta de la del prisma. Haüy examinó sus caras, las inclinaciones y los ángulos y vio que eran iguales en el espato romboidal y en el espato de Islandia. Rehizo, esta vez voluntariamente, la experiencia con los cristales de su colección que hizo pedazos, así como los que le prestaron sus amigos. En todos los trozos encontró una estructura que dependía de las mismas leyes.

El resultado fue un tratado de mineralogía que hizo de él un académico y el pionero de la cristalografía.

FUENTE: A. Koestler, ob. cit., pp. 174-175.

ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Durante el invierno de 1819, Hans Christian Oersted (1777-1851), profesor de física en la Universidad de Copenhague, mostraba a sus estudiantes la potencia calorífica de la pila llevando hasta la incandescencia a un hilo metálico. Su mesa estaba llena de aparatos, de imanes y de una brújula. Los alumnos, siempre ocupados en mirar cosas ajenas a lo que se les muestra, atrajeron la atención de Oersted

sobre un fenómeno curioso: cada vez que se establecía la corriente, la aguja de la brújula se desviaba.

Unos años más tarde, André-Marie Ampère tuvo la idea de invertir la experiencia: ¿ejercía alguna acción el magnetismo sobre las corrientes eléctricas? Se necesitaba hacer móvil una parte del circuito. Para esto hizo un rectángulo en hilo de cobre con los extremos doblados, sumergidos en mercurio. El rectángulo podía, de esta forma, girar alrededor de un eje vertical; los cangilones de mercurio hacían las veces de goznes. La experiencia se coronó con éxito: cuando se situó un imán debajo del rectángulo móvil, éste pivotó y se puso perpendicular al imán.

FUENTE: Pierre Devaux, *Les aventuriers de la science*, Magnard, París, 1946.

EL BIG BANG

Desde hace tiempo los astrofísicos saben que el universo está en expansión; las galaxias se apartan unas de otras. Hubo por tanto un momento, hace entre 10 y 18 mil millones de años según las teorías, en el que toda la materia del universo estaba concentrada. Luego explotó como una bomba termonuclear. Es a este instante al que los físicos llaman el big bang. En el curso de los diez últimos años esta teoría ha sido casi universalmente aceptada. Primeramente explica por qué el universo está en expansión y luego por qué contiene una cantidad de helio tan importante (25%).

En 1964 dos investigadores de Bell Telephone Laboratories, Arno Penzias y Robert Wilson, trabajaban en las antenas utilizadas para la comunicación con los satélites. Intentaban eliminar el ruido de fondo que perturbaba la recepción de las ondas de radio. No tenían ningún conocimiento particular de astrofísica. Pensaron primeramente que la fuente del ruido de fondo provenía de la antena que desmontaron y luego volvieron a montar. La limpiaron de las deyecciones de las palomas y cubrieron los remaches con hojas de aluminio. El ruido de fondo subsistía. Ahora no podía provenir de nada próximo a la antena pues permanecía igual de día y de noche y era isótropa. Como ninguno de los dos investigadores conocía la teoría del big bang no sospecharon que el ruido de fondo proviniera de la luz emitida en el big bang y que, en el curso de su viaje a través del tiempo y el espacio, había perdido poco a poco su energía y sufrió un corrimiento tan fuerte hacia el rojo que ni siquiera podía observarse en la región de radiofrecuencias del espectro.

En diciembre de 1964, Penzias tuvo ocasión de relatar el problema a un astrónomo que había oído hablar de la teoría del big bang en una conferencia y así es como Penzias y Wilson supieron que el ruido de fondo que oían era la radiación ultracorta producida en la explosión inicial. Oían la voz del universo y observaban la bola de fuego primitiva que le había dado nacimiento.

FUENTE: Richard Morris, *Comment l'univers finira... et pourquoi*, Robert Laffont, París, 1984, pp. 61-80.

EUREKA

La historia de Arquímedes es conocida por todos. Mejor que contarla yo mismo una vez más, pienso que vale más dar la palabra a Marco Vitruvio Pollio, arquitecto e ingeniero romano del siglo primero. En su célebre libro *De Architectura* escribe:

Entre el gran número de admirables descubrimientos hechos por Arquímedes, hay que destacar aquel del que voy a hablar y en el que él muestra una sutilidad de espíritu casi increíble.

Cuando Herón reinaba en Siracusa, este príncipe, habiendo superado felizmente todas sus empresas, prometió en un cierto templo una corona de oro a los dioses inmortales. Convino con un obrero una gran suma de dinero para hacerla y le dio su peso en oro. Este artesano acabó su obra el día que había prometido al rey, el cual la encontró perfectamente hecha. La corona fue pesada y parecía tener el peso del oro entregado; pero cuando se hizo la prueba se descubrió que el obrero había guardado una parte del oro, que había reemplazado por plata.

El rey quedó muy ofendido con este engaño y, no pudiendo encontrar la manera de convencer al obrero del robo que había hecho, pidió a Arquímedes buscar algo ingenioso. Un día que Arquímedes, muy preocupado con este asunto, se metía en el baño, percibió por azar que salía por los bordes tanta agua como la medida que él se hundía en el baño. Esta observación le hizo descubrir la razón de lo que él buscaba y, sin tardar más tiempo, la alegría le inundó de tal manera que salió del baño y corriendo desnudo hacia su casa, comenzó a gritar que había encontrado lo que buscaba, diciendo en griego: ¡Eureka! ¡Eureka! (¡Lo encontré! ¡Lo encontré!). Se cuenta que tras este primer descubrimiento hizo hacer dos masas del mismo peso que el de la corona, una de oro y otra de plata. Sumergió en un vaso lleno de agua la masa de plata y observó que a medida que se hundía hacía salir una cantidad de agua igual al volumen que tenía; después retirándolo, llenó de nuevo el vaso echando tanta

agua como había salido, y que él había tenido cuidado de medir, lo que le hizo conocer la cantidad de agua que correspondía a la masa de plata que él había colocado en el vaso. Después de esta experiencia, sumergió igualmente la masa de oro en el mismo vaso lleno de agua y, tras haberlo retirado, midió de nuevo el agua que había salido, y encontró que la masa de oro no había hecho salir tanta agua y que la diferencia de menos era igual a la diferencia de volumen de la masa de oro comparada al volumen de la masa de plata que era del mismo peso. Seguidamente llenó de nuevo el vaso y esta vez sumergió la corona que hizo salir más agua de lo que su peso en oro había hecho salir y menos de lo que su peso en plata había desplazado. Calculando tras estas experiencias, cuánto más grande era la cantidad de agua que la corona había hecho salir que la cantidad de agua que había hecho salir la masa de oro, conoció cuánto había de plata mezclada con oro y vio claramente lo que el obrero había robado. [René Taton, *Causalités et accidents de la découverte scientifique*, Masson, París, 1955, pp. 66-67].

EL ERROR DE LEBESGUE

En matemáticas, quizás más que en ninguna otra ciencia, es imposible redactar todo en detalle. ¿Cuántas veces se ha leído: *la demostración no ofrece ninguna dificultad* o *se verá fácilmente que...*? En general, al menos en los grandes matemáticos, la intuición es exacta, pero se precisan a veces varias páginas de cálculos para ver que la demostración no presentaba ninguna *dificultad*. El error es inevitable y los matemáticos que no los cometen nunca son aquellos que no publican. Por otra parte se ha redactado un libro entero sobre este tipo de errores.

Sin embargo, en numerosos casos, los errores pueden ser creadores. Demos la palabra a Lebesgue:

La consideración de las funciones discontinuas había extendido tanto el campo del análisis que se podía percibir alguna inquietud. Por tanto nos halagó la esperanza de que de todas las funciones y de todos los conjuntos imaginados, las funciones de Baire y los conjuntos medibles B que se les asocian, se introducirían solos necesariamente en matemáticas, pues parecía que las operaciones efectuadas sobre estas funciones y conjuntos conducían siempre a funciones y conjuntos de las mismas familias. El análisis llevaba un principio de limitación en sí mismo.

Para comprobar si esto era correcto, había que examinar en particular la resolución de ecuaciones que conducen a las funciones implícitas. A lo largo de este estudio, formulé este enunciado: la proyección de un conjunto medible B es siempre un conjunto medible B. La demostración era simple y corta pero falsa. M. Lusin, entonces profesor novato, y M. Sousbin, uno de sus primeros alumnos, percibieron el error y se propusieron corregirlo. Imagino que al principio pensaron que era una tarea fácil; pero las dificultades aparecieron rápidamente, llegaron a dudar del enunciado mismo, después se equivocaron con un ejemplo convincente.

Así el análisis no lleva en sí un principio de limitación. La extensión de la familia de funciones de Baire era vasta, impresionante; el campo del análisis es más vasto todavía. Y cuánto más vasto. [Préface à: N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Gauthier-Villars, París, 1930]. [Lucienne Félix, *Message d'un mathématicien: Henri Lebesgue*, Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard, París, 1974]. [Maurice Lecat, *Erreurs de mathématiciens des origines à nos jours*, Castaigne, Bruselas, 1935]. [R. Taton, ob. cit., p. 95].

LA TRANSMISION DEL TIFUS

Fue el bacteriólogo francés Charles Jules Henri Nicolle (1866-1936) quien descubrió el agente de la transmisión del tifus cuando era director del Instituto Pasteur de Túnez. Por ello recibió el premio Nobel de medicina en 1928. Relató ampliamente su descubrimiento en un libro, *Biologie de l'invention,* que contiene la historia y el análisis de numerosos descubrimentos: en el relato de Nicolle se notará la iluminación y la certidumbre que lo acompaña.

De este choque, esta iluminación súbita, este sobrecogimiento por el hecho nuevo, puedo hablar. Los experimenté, los viví. Es así como me fue revelado el modo de transmisión del tifus exantemático.

Como todos los que, tras largos años, visitaban el hospital musulmán de Túnez, veía cada día en sus salas tíficos acostados cerca de enfermos atacados de las afecciones más diversas. Como mis antecesores, era el testigo cotidiano y despreocupado de la circunstancia extraña de que una promiscuidad tan condenable, en el caso de una enfermedad eminentemente contagiosa, no daba lugar a contaminación alguna. Los vecinos de cama de un enfermo de tifus no contraían su mal. Y casi diariamente, por otra parte, en el momento de los brotes epidémicos, yo constataba el contagio en los aduares, en los barrios de la ciudad y hasta en los empleados del hospital designados a la recepción de los nuevos enfermos. Los médicos y las enfermeras se contaminaban en los campos, en Túnez y hasta en las salas de medicina.

Un día rutinario, una mañana, penetré sin duda en el enigma del modo de contagio del tifus. No pensando en ello conscientemente todo el tiempo (de

esto estoy bien seguro), iba a cruzar la puerta del hospital cuando un cuerpo humano, acostado a ras de los escalones, me detuvo.

Era un espectáculo habitual ver a los pobres nativos aquejados de tifus, delirantes y febriles, ganar, en una marcha demencial, los accesos al refugio y caer, extenuados, en el último paso. Como siempre, yo saltaba sobre el cuerpo extendido. Fue en este preciso instante cuando tuve la idea. Un instante después penetré en el hospital y tenía la solución del problema. Sabía, sin que me fuera posible dudarlo, que no había otra, que era aquélla. Este cuerpo extendido y la puerta, delante de la cual él yacía, me habían mostrado bruscamente la barrera en la que el tifus se detenía. Para que él se detuviera, para que, contagioso en todo lo extenso del país, en Túnez, el tífico llegara a ser inofensivo (pasado el mostrador de recepción) sería necesario que el agente de contagio no atravesara este punto. ¿Qué pasaba en este punto? Al enfermo se le quitaban sus vestidos, su ropa interior, se le afeitaba y se le lavaba. Era pues aquella cosa extraña a él, que él llevaba sobre sí, en su lienzo, sobre su piel, lo que causaba el contagio. No podía ser otra cosa que el piojo. Era el piojo. Lo que yo ignoraba la víspera y que ninguno de aquellos que habían observado el tifus desde el comienzo de la historia (pues se remonta a las edades más antiguas de la humanidad) habían advertido, es que la solución indiscutible, instantáneamente fecunda, del modo de transmisión acababa de serme revelada.

Experimentaba aquella confusión de ponerme de aquel modo en escena. Lo hice porque el suceso que me acaeció está, creo, lleno de enseñanza y porque no encontré los otros ejemplos tan claros. Continúo desarrollando mi observación, con menos timidez. Ella deja presente sus debilidades que también me parecen instructivas.

La solución que una intuición aguda, casi extraña a mí, extraña en todo caso a mi razón, me había aportado, (si bien se imponía a mi entendimiento) tenía sin embargo necesidad de una demostración experimental.

El tifus es una enfermedad demasiado grave para que se pueda experimentar sobre el hombre. Había reconocido ya, felizmente, la sensibilidad del *mono*. La experiencia era pues posible. Si no lo hubiese sido, yo habría publicado sin tardanza mi descubrimiento, que era muy rico en beneficios inmediatos para todos los hombres. Puesto que podía aportar la demostración con el descubrimiento, guardé por algunas semanas el secreto, hasta en mi entorno, y emprendí los ensayos necesarios para la prueba. Este trabajo no me causó ni emoción ni sorpresa. Fue llevado a cabo en dos meses.

En el transcurso de este breve periodo, sufrí lo que sin duda otros inventores han experimentado como yo, un sentimiento extraño, el de la inutilidad de la demostración, un desapego total del espíritu y un fatigoso aburrimiento. La evidencia era tan fuerte que me era imposible interesarme por la experiencia.

Si hubiera sido añadido de un hecho que me hubiese concernido sólo a mí creo que no habría perseguido nada. Fue por disciplina, por amor propio por lo que continué. Otros pensamientos me preocupaban también. Confieso que este desfallecimiento no detuvo mis investigaciones. Ellas, he dicho, han llevado, sin pena y sin un día de retraso, la confirmación de la verdad que yo portaba tras el hallazgo revelador del que he hablado. [Charles Nicolle, *Biologie de l'invention*, Alcan, París, 1932, pp. 56-60]. [R. Taton, ob. cit., pp. 67-69].

LOS ERRORES DE KEPLER

Kepler tenía 24 años. Desde hacía un año vivía en Gratz, donde era el matemático oficial de la provincia de Styrie. En sus estudios en Tubinga, su maestro Maestlui le había hablado de Copérnico y de su sistema. El joven Kepler se preguntaba por qué había seis, y solamente seis planetas, (lo que era falso) y buscaba descubrir el misterio de sus distancias al Sol y de sus velocidades.

El 9 de julio de 1595 la luz se hizo en él mientras dibujaba en la mesa un triángulo equilátero acompañado de sus dos círculos inscrito y circunscrito. Advirtió bruscamente que su relación era la misma que la de las órbitas de Saturno y Júpiter que son los planetas más alejados del Sol. Además,

el triángulo es la primera figura de la geometría. Enseguida probé a inscribir en el intervalo siguiente entre Júpiter y Marte un cuadrado, entre Marte y la Tierra un pentágono, entre la Tierra y Venus un hexágono [...]

Esto no funcionaba pero se sentía muy cerca de la verdad.

Entonces yo avanzaba sin reparar en obstáculos. ¿Por qué querer que figuras de dos dimensiones se adapten a las órbitas en el espacio? Hay que buscar formas de tres dimensiones, y ves, querido lector, tú tienes ahora mi descubrimiento en la mano.

Mientras que en el plano se pueden construir tantos polígonos regulares como se quiera, en el espacio no se pueden construir más que cinco: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. Estos cinco sólidos pueden ser inscritos y circunscritos en seis esferas, lo que explica el número de planetas. No quedaba más que encontrar el orden en el que disponer los sólidos para rendir cuenta de las diferentes distancias al Sol.

Yo no veía todavía claramente en qué orden había que colocar los sólidos perfectos, y sin embargo conseguí [...] colocarlos tan acertadamente que más tarde, cuando verifiqué esas disposiciones, no tuve que cambiar nada. No lamentaba entonces el tiempo perdido; no estaba cansado de mi trabajo; ya no retrocedía ante ningún cálculo, por difícil que fuera. Día y noche hice mis cálculos para ver si la proposición que acababa de formular estaba de acuerdo con las órbitas de Copérnico o bien si mi alegría se la llevaría el viento [...] En aquellos días todo se produjo en su lugar. Vi a los sólidos simétricos insertarse uno tras otro con tanta precisión entre las órbitas idóneas [...] que si un campesino hubiera preguntado a qué ganchos están fijados los cielos para no caer, sería fácil responderle.

Kepler había explicado el mundo... pero su explicación era falsa.

En 1600, Tycho Brahe -a la sazón astrónomo del emperador Rodolfo II- le pidió que fuera a reunirse con él a Praga. Tycho se ocupaba entonces de la órbita del planeta Marte. Después de su muerte, sobrevenida un año más tarde, Kepler le sucedió. Los discípulos de Tycho dejaron a su disposición sus manuscritos y sus cuadernos de observación. La primera dificultad se debía a que el observador no está inmóvil en relación a Marte, de manera que Kepler comenzó por mejorar su conocimiento de la órbita terrestre. Había que disponer de una referencia fija. Kepler eligió para esto observaciones hechas en intervalos de 687 días, duración de la revolución de Marte. Pudo así determinar que la órbita terrestre podía ser representada legítimamente por un círculo donde el Sol estaba ligeramente descentrado. Se presenta así Kepler condicionado hasta cierto punto por las ideas de su tiempo, prisionero de las ideas preconcebidas que afirmaban la circularidad de las órbitas planetarias.

Tras haber determinado de manera precisa la órbita terrestre, Kepler se ocupó de la de Marte. Su hipótesis de partida era totalmente falsa: suponía que el movimiento de los planetas era debido a una fuerza, engendrada por la rotación del Sol sobre sí mismo, análoga a las fuerzas magnéticas y que se ejercía tangencialmente a la trayectoria e inversamente proporcional a la distancia. Dedujo de ello que la velocidad era también inversamente proporcional a la distancia. Newton mostraría que esta concepción era falsa pero que el error que engendra era nulo en los dos extremos del eje de la trayectoria. Como las medidas de Kepler se efectuaban únicamente en estos puntos, no podía darse cuenta de ello. Según la teoría de Kepler, el tiempo empleado por un planeta para recorrer un arco elemental era proporcional tanto a la longitud del arco como a la distancia Sol-planeta. Dividiendo el arco en otros más pequeños de la misma longitud se verifica que el tiempo de recorrido es proporcional a la suma de los radios vectores de los arcos pequeños de la división. Para hacer un cálculo riguroso habría sido preciso integrar. Al no poderlo hacer, Kepler decidió reemplazar la suma de los radios vectores por el área del sector barrido por el planeta. Así dos errores sucesivos le condujeron a la ley exacta que establece que el segmento que une el Sol con un planeta describe áreas iguales en tiempos iguales.

Fueron precisos todavía siete años de trabajo para abandonar la órbita circular en beneficio de la órbita elíptica. El dijo en su libro *Astronomia nova* aparecido en 1609:

Mi primer error ha sido haber admitido que las órbitas de los planetas son círculos perfectos. Este error me ha costado tanto más tiempo cuanto que ha sido sostenido por la autoridad de todos los filósofos y era metafísicamente muy plausible.

Los cálculos de Kepler llenaron miles de páginas conservadas en la biblioteca de Pulkova y en su libro invita al lector a compadecer al autor que debió rehacer setenta veces las quince páginas in-folio de cálculos que siguen.

Serían necesarios varios años más de esfuerzos para estudiar los planetas restantes y expresar la tercera ley.

FUENTES: René Leclercq, *La création scientifique*, Gauthier-Villars, París, 1959, pp. 26-28.
Ivar Ekeland, *Le calcul, l'imprévu*, Seuil, París, 1984, pp. 13-25.
R. Taton, ob. cit., pp. 86-86 .

STIELJES Y LAS FRACCIONES CONTINUAS

Cuando un tema matemático es demasiado difícil de estudiar directamente se puede intentar adivinar su solución por medio de la observación. La demostración general viene luego. Todos los matemáticos han procedido de esta manera experimental en algún momento.

Así se expresa Thomas Jan Stieltjes, en su voluminosa correspondencia con Hermite, el 3 de mayo de 1894:

Con respecto a las fracciones P'/P, P"/P, le confesaré que no tenía la pretensión de esclarecer un asunto tan difícil para la reflexión y la imaginación solas. Procederé como los naturalistas apelando a la ayuda de la observación. Por el momento, pues, hago cálculos numéricos bastante laboriosos, buscando todas las fracciones convergentes para algunos casos particulares hasta P= 200 y P= 500 [...] Podré comenzar a trabajar seriamente en este asunto cuando haya amontonado de esta manera un gran material. No

sé del todo si esto me llevará a alguna cosa, pero quiero tener la conciencia tranquila.

El 13 de mayo, Hermite responde:

Me siento muy feliz de saber de su buena disposición que le transforma en naturalista para observar los fenómenos del mundo aritmético. Su doctrina es la mía; creo que los números y las funciones del Análisis no son producto arbitrario de nuestro espíritu; pienso que existen fuera de nosotros con el mismo carácter de necesidad que las cosas de la realidad objetiva, y que nosotros los encontramos, los descubrimos, y estudiamos como los físicos, los químicos y los zoólogos, etc. [...]

Esta correspondencia es una fuente inagotable de información para quienes se interesan en la historia de las ideas. He aquí otro ejemplo tomado de una carta de Stieltjes de 31 de mayo de 1894:

Estoy un poco cansado y poco apto para el trabajo en este momento, lo que me contraría un poco, porque estoy obsesionado con una idea que podría conducir a una aplicación importante de las investigaciones sobre fracciones continuas que yo he terminado. Es un buen recuerdo de M. Poincaré sobre las ecuaciones diferenciales de la Física Matemática (Ultimo boletín de Palermo) lo que me ha colocado sobre esta vía. Hace mucho tiempo que yo tenía un vago sentimiento de que las fracciones continuas tenían (tienen) una relación con este tema y debían (deben) intervenir. Actualmente esto me parece muy probable y al mismo tiempo muy notable. Se añade simplemente esto: se construye una cierta serie $F=c_0+c_1\xi+c_2\xi^2+c_3\xi^3+$ [...] con c_k positivos y $(c_{k+1}/c_k) > (c_k/c_{k-1})$, $\lim(c_{k+1}/c_k) = \lambda \quad (k = \infty)$.

Se sabe solamente que la serie es convergente y que la función F existe para $|\xi| < 1/\lambda$. Pero se trata de extender el dominio de existencia de esta función, de reconocer que existe en todo el plano y es meromorfa. Es suficiente, en ciertos casos, para esto, reducirla a fracción continua.

$$F = c_0 + \frac{c_1\xi|}{|1} + \frac{c_2\xi|}{|1} + \frac{c_3\xi|}{|1} + \frac{c_4\xi|}{|1} + \ldots$$

Se llega a que la fracción continua es convergente en todo el plano y se muestra así el carácter de la función F. Esto no es más que una idea general fuertemente imperfecta.

Pero, para dejar esto claro se necesitarían todavía muchas reflexiones y estudios de los que yo soy poco capaz. Stieltjes murió el 31 de diciembre de 1894. Tenía 38 años. [C. Brezinski, *History of continued fractions and Padé approximants*, Springer-Verlag, Heidelberg].

EL CALCULO INFINITESIMAL

El descubrimiento del cálculo infinitesimal debe ser compartido entre Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz. En una carta al Marqués de L'Hospital, este último cuenta cómo se efectuó el descubrimiento:

Me gustaba desde hacía mucho tiempo buscar las sumas de series de números, y me había servido para esto de las diferencias, según un teorema bastante conocido, de que en una serie decreciente al infinito el primer término era igual a la suma de todas sus diferencias. Esto me había dado lo que yo llamaba el triángulo armónico, opuesto al triángulo aritmético de Pascal. Pascal había mostrado cómo se pueden dar las sumas de los números figurados, que provienen buscando las sumas de las sumas de los términos de la progresión armónica natural; y yo encontraba que las fracciones de los números figurados son las diferencias y las diferencias de las diferencias de los términos de la progresión armónica natural, y que así se pueden dar las sumas de las series de las fracciones figuradas, como:

$1/1 + 1/3 + 1/6 + 1/10$, etc [...], y

$1/1 + 1/4 + 1/10 + 1/21$, etc [...]

Reconociendo pues esta gran diferencia, y viendo como, por el cálculo de Descartes, puede ser expresada la ordenada de la curva , me di cuenta de que para las cuadraturas o para las sumas de las ordenadas no se trata de otra cosa que de encontrar una ordenada cuya diferencia sea proporcional a la ordenada dada. Reconocí enseguida que encontrar las tangentes no es otra cosa que diferenciar y encontrar las cuadraturas no es otra cosa que sumar, con tal de que se supongan las diferencia incomparablemente pequeñas. Vi también que, necesariamente, las magnitudes diferenciales se encuentran fuera de la fracción y que así se pueden dar las tangentes sin preocuparse de los irracionales y de las fracciones. Y he aquí la historia del origen de mi método, *methodus differentialis*.

Newton fue guiado por una analogía mecánica:

Llamaré fluentes a esas cantidades que considere como crecientes o decrecientes gradual e indefinidamente; las representaré por u, x, y, z. En cuanto a las velocidades que cada una de las fluentes reciba del movimiento generador (velocidades que llamo fluxiones), las expresaré por las mismas letras con un punto encima u, x, y, z. [Edouard Callandreau, *Célèbres problèmes mathématiques,* Albin Michel, París, 1949, pp. 122-123].

UN PROBLEMA DE ANALISIS COMBINATORIO

En su libro de recuerdos Paul Lévy (1886-1971) ha contado la historia siguiente:

Hay que remontarse al verano de 1901, en el curso del cual pasé 3 semanas con mi familia en la Selva Negra. Conocí allí a un lugarteniente alemán, que era el personaje más lleno de vida de la pensión familiar donde estábamos. Un día me hizo un juego de cartas. Tomando 8 cartas, volvió del revés la primera, metió la segunda en el resto de las cartas que tenía en la mano, volvió del revés la tercera, metió la cuarta con el resto de las cartas, y así sucesivamente hasta que se acabó el juego. Había puesto del revés las 8 cartas en un orden que me había anunciado de antemano. Yo quería hacerlo mejor. Al día siguiente, le volví a hacer el juego con trece cartas y me ofrecí a volverlo a hacer con el número de cartas que quisiera, aunque fuera con las 52. Posteriormente no pensé más en esta cuestión salvo alguna vez en que volví a hacer este juego.

En 1948, caí gravemente enfermo de una pleuresía, y permanecí tres semanas en la cama aquejado de una fuerte fiebre. Quizá la afluencia de sangre al cerebro favorecía el despertar de viejos recuerdos. Sea lo que fuese, volví a pensar en el lugarteniente alemán y en su juego de cartas, que me había llevado para cada valor del entero n a considerar una permutación Q_n de n cartas. Me proponía caracterizarla desde el punto de vista de la teoría de grupos, es decir, para comenzar, descomponerla en ciclos. No teniendo ni idea del método a seguir, empleé el método experimental y resolví el problema para pequeños valores de n, hasta 45. Era un trabajo fácil de hacer en la cama, con una hoja de papel y una estilográfica. El resultado me pareció en principio engañoso; para el orden N de la permutación encontraba una serie de números fuertemente irregular. Así, a partir de $n = 6$, los valores de n para los cuales N excede su máximo anterior son:

12, 18, 23, 35, 38, 44

Siendo los valores correspondientes de N

28, 70, 210, 308, 990, 1710

Los ciclos cuyo orden no es pequeño en relación a n son raros. Sin embargo, para los valores 6, 7, 10, 15, 18, 27, 30, 31, 34, 42 de n se encuentra un ciclo de $(n\text{-}1)$ elementos, que es el máximo posible; el primer elemento es en efecto un invariante, no hay más que $(n\text{-}1)$ elementos que pueden efectivamente permutarse.

La primera observación simple que logré hacer fue la siguiente. Para $n= 2^p+ 1$ (es decir = 3, 5, 9, 17, 33, 65 [...]) se tiene $N=p+1$ y P_n comprende q permutaciones de $p+1$ elementos, siendo q el cociente de la división de n por

p+1. Los restantes elementos se descomponen en ciclos cuyos órdenes son divisores de p+1. Naturalmente estos valores de N aparecen como mínimos. Así, 6 está encuadrado por 60 y 33.

Este primer resultado me dio la idea de dedicar mi atención a los valores de n de la forma 2^p. Constaté entonces que hay un ciclo de orden p y sólo uno; hay ciclos de todos los órdenes inferiores a p, y no hay ninguno de orden más elevado, de manera que el orden de la permutación Q_n es el m.c.m. de los p primeros números enteros.

Probé entonces a demostrar estos resultados de una manera general. Aprecié primero que había curiosas relaciones entre Q_n y otra permutación más simple P_n. Así para $n=2^p+1$, los ciclos de P_n y Q_n son los mismos; pero naturalmente en cada ciclo, el orden de los elementos no es el mismo. Familiarizándome poco a poco con el mecanismo de estas permutaciones, llegué a la demostración general de los resultados obtenidos experimentalmente, y posteriormente a un conjunto de resultados demasiado complicados para exponerlos aquí. Recordaré solamente el que se destaca en mi memoria: los números enteros n se reparten en dos conjuntos complementarios E_o y E_1, estando este último caracterizado por la propiedad siguiente: el período de representación del número 1/(2n-1) en la numeración diádica comprende un número par de cifras y los dos semi-períodos son complementarios, es decir, que se pasa de uno al otro reemplazando 0 por 1 y 1 por 0. Las propiedades de la permutación Q_n con $n \in E_o$ son muy diferentes de las relativas al caso $n \in E_1$. Así las permutaciones P_n y Q_n tienen los mismos ciclos si $n \in E_1$, pero no si $n \in E_o$.

FUENTE: P. Lévy, ob. cit., pp. 151-153.

EL SERODIAGNOSTICO

El biólogo francés Charles Nicolle (1866-1936) cuenta la historia siguiente:

Fernand Widal, de paso por Constantinopla, conversaba con su hermano Maurice de la cuestión de la aglutinación de los microbios, que conocía entonces tras las constataciones de Herbert Durham y de Max Grüber. Ambos habían mostrado que la sangre de los animales, inoculada con ciertas especies microbianas contraía la propiedad de aglomerar en montones, de aglutinar individuos microbianos de la misma especie. Se debía a sus buenos trabajos poder distinguir, por un método específico y cómodo, un microbio de otro microbio próximo a él y por otros caracteres, idéntico. El suero específico servía de reactivo al microbio.

Bruscamente el cerebro de Widal invierte la proporción. Le parecía que, puesto que se puede reconocer un microbio en un medio de suero homólogo, se debe, de la misma forma, con un cultivo microbiano determinado, revelar la presencia en un suero de enfermedad de las propiedades específicas correspondientes. Un cultivo del germen de la fiebre tifoidea sería así aglutinado por la adición de una gota de suero sanguíneo de un individuo aquejado de esta enfermedad y ningún otro suero ejercería una acción semejante.

Widal regresa a París con su secreto y practica los ensayos necesarios. Confirman su hipótesis. Por este hecho se funda el método de *serodiagnóstico* de las enfermedades que entra rápidamente en práctica y que presta después servicios diarios. [C. Nicolle, *Biologie de l'invention*, Alcan, París, 1932, p. 34].

LA PENICILINA

Así como la iluminación no se produce más que en un cerebro preparado para recibirla, el azar no puede ser explotado más que por un investigador presto a hacerlo. En este aspecto el descubrimiento de la penicilina es ejemplar.

Desde los comienzos de su carrera científica Alexander Fleming (1881-1955) se interesaba en los mecanismos protectores. Así había aislado el lisozima que era un antibiótico terrible para las bacterias cultivadas pero que se revelaba inoperante en el cuerpo humano.

Un día de 1928, al entrar una mañana en su laboratorio, constata que varios de sus cultivos microbianos contienen un moho verde. Evidentemente varios investigadores habían tenido antes que él la misma desventura y su reacción había sido la de tirar el cultivo pues el moho arriesgaba a comprometer la pureza del experimento.

Fleming guardó la preparación estropeada y se preguntó por qué los microbios eran atacados por el moho. Diría más tarde:

Se me atribuye la invención de la penicilina. Pero nadie habría podido inventarla porque ya la naturaleza la había fabricado en una época inmemorial. No, yo no he inventado esta substancia, yo solamente la he señalado a los hombres y le he dado un nombre.

Una historia un poco semejante le ocurrió a Louis Pasteur (1822-1895) con su descubrimiento de las vacunas artificiales. Habiendo dejado en su laboratorio durante las vacaciones cultivos de caldo de pollo infectados por el microbio del cólera, quiso retomar sus experiencias en el mes de septiembre. Sin embargo, cuando inyectó el cultivo a animales sanos, no sucedió nada. Pasteur tenía la costumbre de decir: *la suerte sólo favorece a las mentes preparadas.*

FUENTES: Rom Harré, *Great scientific experiments*, Oxford University Press, 1983, pp. 99-100.
F. Vidal, ob. cit., pp. 79-81.
A. Soukhotine, ob. cit., pp. 193-195.

LOS NEUTRONES LENTOS

Todo el mundo conoce a Enrico Fermi (1901-1954) que construyó la primera pila atómica y produjo la primera reacción en cadena controlada el 2 de diciembre de 1942.

Fermi recibió el premio Nobel de física en 1938 por el descubrimiento de nuevos elementos radiactivos producidos por el bombardeo con neutrones y por el descubrimiento de reacciones nucleares inducidas por neutrones lentos.

Una mañana de octubre de 1934 en Roma, los físicos Bruno Pontecorvo y Edoardo Amaldi estudiaban la radioactividad artificial de ciertos metales que acababa de ser descubierta algunos meses antes por Irène y Frédéric Joliot. Los metales habían recibido la forma de cilindros huecos en los que se situaba la fuente de neutrones; luego, todo estaba encerrado en un cofre de plomo. Pontecorvo fue el primero en notar, aquella mañana, que la radioactividad de la plata variaba según que el cilindro estuviera situado en el centro o en un rincón del cofre de plomo.

Desconcertados fueron a hablar de ello con Rasetti y Fermi quien sugirió observar qué sucedería cuando se hiciera la experiencia fuera del cofre de plomo. Los días siguientes aportaron muchas sorpresas. Los objetos que se encontraban sobre la mesa, cerca del cilindro, parecían influenciar su radioactividad. Todos los físicos estaban muy intrigados. Acabaron incluso por sacar la fuente de neutrones del cilindro e interponer diversos objetos. Una lámina de plomo, por ejemplo, hacía aumentar ligeramente la radioactividad. Por el contrario, Fermi tuvo la idea de intentar al contrario con una substancia ligera como la parafina. La experiencia tuvo lugar la mañana del 22 de octubre. Tomaron un gran bloque de parafina y horadaron un hueco, pusieron allí la fuente de neutrones e irradiaron el cilindro de plata. Cuando aproximaron un contador Geiger para medir la radioactividad, el contador hizo oír su

crepitación máxima. ¡Increíble! la parafina centuplicaba la radioactividad artificial de la plata.

El grupo se separó con pena a la hora de comer. Por la tarde Fermi volvió con una teoría para explicar el fenómeno. La parafina contiene mucho hidrógeno cuyos núcleos están formados por protones que tienen casi la misma masa que los neutrones. Se producían evidentemente numerosas colisiones entre los neutrones de la fuente y los protones del hidrógeno. Cada choque debilitaba los neutrones que perdían su energía y se ralentizaban. Había entonces una probabilidad mayor de que fueran capturados por un átomo de plata que un neutrón más rápido, igual que una bola de golf cuya velocidad es baja tiene mayor probabilidad de caer en un agujero que una bola rápida que pasara por encima.

FUENTE: Laura Fermi, *Atomes en familie*, Gallimard, París, 1955, pp. 124-126.

LA CLASIFICACION PERIODICA

Dimitri Ivanovich Mendeleiev (1834-1907) era profesor de química en la Universidad de San Petersburgo desde hacía dos años. La manera en que se enseñaba entonces la química no le satisfacía. No existía ningún orden, ninguna armonía, no había ningún rasgo común a todos los elementos que hubiera permitido clasificarlos en lugar de presentarlos, en el mejor de los casos, por grupos aislados que poseyeran ciertas analogías. Mendeleiev quería simplificar su tarea de profesor encontrando un procedimiento lógico de clasificación de elementos. Se sabía que los elementos (los átomos) se combinaban para formar moléculas más complejas. Así dos átomos de hidrógeno se unían a un átomo de oxígeno para formar una molécula de agua. Cada átomo, cada elemento tenía un peso característico. Esto no quería decir que se supiera *pesar* cada átomo individualmente sino que se conocía, gracias a numerosas experiencias, las proporciones en que los elementos se combinaban. Por ejemplo quemando 2 gramos de hidrógeno y 16 gramos de oxígeno se obtenían 18 gramos de agua. Así era posible conocer no el peso real de cada átomo, sino el peso relativo con relación al más ligero de ellos, el hidrógeno, al que se le atribuyó el número 1. El oxígeno tenía el número 16, el cobre 63 y así sucesivamente. Es lo que se llama peso atómico.

Mendeleiev ordenó primeramente todos los elementos conocidos por peso atómico en sentido creciente. Se dio cuenta entonces que el mismo género de comportamiento químico se repetía periódicamente. El hidrógeno se dejaba aparte para formar una clase él sólo. La lista comenzaba con litio cuyo óxido se disuelve en agua y da un álcali. Siete elementos más adelante se encontraba el sodio que poseía la misma propiedad, siete elementos más, el potasio, siempre con la misma propiedad, y así sucesivamente.

Mendeleiev cortó entonces su lista cada siete elementos y los dispuso en líneas los unos debajo de los otros. Así cada columna contenía una familia de elementos con comportamientos químicos análogos. Hubo sin embargo algunos problemas con los elementos más pesados y fue preciso alternar filas de siete y de diez elementos para que las columnas contuvieran elementos de la misma familia. También había que dejar huecos en la tabla. Por ejemplo tras el calcio venía el titanio que se encontraba así en la familia del boro y del aluminio a los que no se parecía. Había que dejar un hueco y situar al titanio bajo el carbono y el silicio que tenían propiedades químicas similares. Mendeleiev rellenó el hueco con un elemento hipotético al que llamó el ekaboro. En otros lugares había igualmente huecos que Mendeleiev llenó con elementos también ficticios. Era 1869. Pasaron los años y poco a poco todos los agujeros se llenaron, todos los elementos ficticios existían realmente. Pero la historia no se detiene aquí .

En 1910, el químico Frederick Soddy (1877-1956) que había colaborado con Rutherford durante mucho tiempo, necesitó mesotorio. Compró torianita, añadió bario y obtuvo mesotorio con un precipitado de sulfato de bario. Intentó separarlos pero en cada precipitación la proporción de los dos cuerpos era siempre la misma. El hecho de que dos cuerpos tuvieran propiedades químicas tan similares que fuera imposible separarlos, impresionó mucho a Soddy. Estaba en contradicción con las leyes de la química: cuerpos diferentes con pesos atómicos distintos eran químicamente semejantes. Esto le sugirió que elementos ordinarios no radioactivos podían formar grupos cuyos miembros tenían pesos atómicos diferentes pero que mantenían siempre sus propiedades químicas. Los situó juntos en la misma casilla de la clasificación periódica. Son los que ahora se llaman isótopos, de dos palabras griegas que significan *que ocupan el mismo lugar*. Los elementos radioactivos entonces conocidos recibieron su ubicación en la tabla periódica en 1912 gracias a los trabajos de Kasimir Fajans, un químico de origen polaco que trabajaba en Karlsruhe.

Pero la historia no se detiene todavía aquí.

En 1913 Niels Bohr elaboró su teoría planetaria del átomo con su cortejo de electrones gravitando en torno al núcleo. Pero nadie sabía cuántos electrones había alrededor del núcleo de un átomo de carbono o de aluminio. La hipótesis más favorecida era la de J. J. Thomson en la que

el número de electrones sería igual a la mitad del peso atómico. Bohr tenía otra hipótesis, y nada estaba regulado.

En aquel tiempo vivía en Holanda Antonius Johannes van den Broek (1870-1926). Estudiaba derecho, pero su violín de Ingres era la clasificación periódica de los elementos. Buscaba una regla sencilla que fuera capaz de explicar todo. Rutherford había sugerido un día, preocupado por la coherencia lógica, que una partícula alfa debía tener la misma relación carga-masa que la mitad del átomo de helio. Van den Broek vio allí la regla que buscaba pues, con una carga unidad y un peso atómico 2, esta partícula suministraba la regla de Thomson sobre el número de electrones de un átomo. No tenía ninguna razón científica para proponer esta regla y estaba guiado como Mendeleiev solamente por una preocupación de sencillez y estética. Pero la idea pareció interesante a Bohr que numeró por orden todos los elementos de la clasificación periódica y admitió que este número era completamente igual al número de electrones. Tenía razón. La clasificación de Mendeleiev tiene, de hecho, una significación mucho más profunda que lo que parecía a primera vista. Las propiedades físicas y químicas de los átomos están determinadas por el número de sus electrones. Estos se distribuyen en diferentes capas, no pudiendo contener cada una más que un número determinado. Los electrones de la capa exterior son los responsables de las propiedades del átomo. Los átomos situados en una misma columna de la clasificación tienen el mismo número de electrones en la capa externa. Al final de cada línea de la clasificación se encuentran los gases nobles cuya capa externa está completamente llena y que tienen muy pocas afinidades químicas.

FUENTES: R. L. Weber, *Pionneers of Science. Nobel prize winners in physics,* The Institute of Physics, Londres, 1980.
P. Radvanyi, M. Bordry, *La radioactivité artificielle*, Seuil, París, 1984.
A. Romer, *La découverte de l'atome*, Payot, París, 1960, pp. 11-14; 133-147; 151-152.
A. Soukhotine, ob. cit., pp. 132-133.

LA CRISIS DE LA CIENCIA

Algunos descubrimientos científicos se admitieron mal porque atañían a la filosofía, a la idea que el hombre se hacía del universo que le rodeaba o al hombre mismo. Así es como las teorías de Darwin sobre la evolución de las especies chocaron contra muchas mentalidades o las de Galileo, al negar, después de Copérnico, que la Tierra era el centro del mundo le valieron muchos problemas pues se oponían a la religión. Se comprende bien cómo y por qué ciertas teorías físicas pueden tener un impacto filosófico y eventualmente provocar una crisis del pensamiento. Para otros esto es más difícil de comprender y especialmente cuando se trata de teorías matemáticas. Voy a dar algunos ejemplos comenzando por la física.

Al final del siglo pasado la física parecía acabada. Así, Albert Michelson (1852-1931) afirmaba: *Entramos en una época en la que no quedará para medir más que la sexta cifra decimal*. No pensaba que al medir él mismo este sexto decimal en la célebre experiencia de Michelson-Morley, iba a echar abajo la mecánica newtoniana y dar la base de la teoría de la relatividad. Incluso, cuando después de su tesis en 1879, Planck fue a ver a su maestro Ph. von Jolly para anunciarle su decisión de consagrar su vida a la física, éste le preguntó por qué quería encauzar su futuro en una vía tan privada de perspectivas. Fue, por fin, Kirchhoff quien, tras el anuncio de un descubrimiento reciente en física, se asombró de que quedara todavía alguna cosa por descubrir. Y a pesar de todo, en algunos años, la física iba a estar revolucionada lo mismo que el pensamiento. Se conoció la crisis debida al abandono de la noción de tiempo universal en la teoría de la relatividad restringida. Tras ésta y casi simultáneamente, la debida al abandono de la continuidad en física en la teoría de los quanta. A Max Planck le costó mucho admitir la validez física de sus propias concepciones y, durante mucho tiempo, intentó salvar la dificultad. Einstein no tenía los mismos escrúpulos. En el momento que cuadraba con la experiencia, la novedad no le asombraba.

Hacia 1930 apareció una interpretación probabilística de la mecánica ondulatoria. El cuadrado de la función de onda representaba la probabilidad de que la partícula se encontrase en un lugar dado en un instante preciso. Son las famosas relaciones de incertidumbre de Heisenberg, según las cuales no es posible medir exactamente y simultáneamente la posición y el momento de una partícula. Para realizar tal medida hace falta, en efecto, hacer intervenir un emparejamiento que tiene por efecto perturbar la partícula volviendo así imposible esta doble medida. Hace falta pues abandonar el principio de causalidad, el determinismo, que está en la base de toda la física ya que da la posibilidad de prever la evolución de un sistema a partir de sus condiciones iniciales. Se produjo un debate profundo entre todos los protagonistas (ver, por ejemplo, en el número especial de *Science et Avenir*, "La grande querelle des physiciens", nº 46, 1984); no está todavía terminado, pero parece que ciertas experiencias en curso van a permitir resolverlo pronto.

Vayamos ahora a las matemáticas. Puede parecer extraño que hayan podido atravesar crisis puesto que no están de ningún modo ligadas,

como la física, a la interpretación teórica de una experiencia. Sin embargo, cierto número de paradojas agitaron su historia. Habían surgido de cuestiones donde la intuición inmediata se había puesto en entredicho y era necesario decidirse a introducir algunas nociones nuevas para ir al encuentro de esta intuición inmediata.

La primera crisis que estalló fue la de la inconmensurabilidad (ahora se dice irracionalidad). Se había admitido como un hecho de la experiencia corriente, y en esto se unía con la física, que todas las longitudes eran conmensurables, es decir, que cualesquiera de ellas podían ser medidas con la ayuda de una tercera sirviendo de unidad. El descubrimiento de los irracionales es atribuido a Hipaso de Metaponto en el siglo V antes de J.C. Se conocía la demostración por reducción al absurdo de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ que es, en mi opinión, una de las más bellas que existe. Para sobreponerse a esta crisis fue necesario renunciar a las ideas corrientemente admitidas de la época, es decir, admitir la irracionalidad de ciertos números.

Dejaría a un lado las crisis debidas a la noción de infinito y a la axiomatización de la geometría, para pasar a la crisis mayor concerniente a la lógica y los fundamentos de las matemáticas.

La historia arranca en la teoría de conjuntos construida por G. Cantor al final del siglo pasado. Esta teoría había propuesto a los matemáticos un cierto número de problemas de naturaleza filosófica concernientes a los diferentes tipos de infinito. Era necesario, en particular, admitir que las infinitudes del número de puntos de la recta y del plano eran de la misma naturaleza. Sin embargo, la teoría había acabado por triunfar y era admitida al principio de este siglo. Las nociones fundamentales de la teoría de conjuntos podían estar descritas en el lenguaje de la lógica y un cierto número de investigadores intentaron reducir las matemáticas a la lógica y transcribirlas en el lenguaje de ésta.

El matemático alemán G. Frege acababa un monumental tratado en tres volúmenes, *Fundamentos de la aritmética*, cuando en 1901 un joven lógico inglés, Bertrand Rusell, estableció que los elementos de partida eran contradictorios. B. Rusell y A. N. Whitehead, por un lado, y D. Hilbert, por otro, intentaron entonces establecer separadamente la consistencia de los axiomas de la teoría de conjuntos, es decir, libres de antinomias.

El asunto se terminó cuando el 17 de noviembre de 1930 la revista *Monatschefte für Mathematik* recibió un artículo de un matemático austríaco de 25 años, Kurt Gödel. Demostraba que era imposible probar la consistencia o la inconsistencia; el problema era irresoluble. Así se hundía el bello optimismo de los matemáticos que pensaban que todos los problemas de las matemáticas tenían una solución, que no era más que una cuestión de la técnica a encontrar. Ciertos problemas no tendrán pues nunca solución. Tal resultado es evidentemente de una importancia filosófica capital. Muestra las limitaciones intrínsecas de las matemáticas.

Hasta el presente las matemáticas han salido siempre de las crisis que han tenido que atravesar, gracias a una profundización y un enriquecimiento de los conceptos en estudio. La física ha salido siempre igualmente reforzada de las crisis atravesadas, pero de una manera un poco diferente, puesto que ciertas teorías han acabado siendo caducas o han debido ser abandonadas y reemplazadas por otras.

LA MEDIDA DE LOS CONJUNTOS

El matemático francés Emile Borel [Saint-Affrique, 1871- París, 1956] es célebre por varios conceptos. Las investigaciones que aquí nos interesan son las que condujeron a definir la noción de medida de un conjunto. Se sabe que Lebesgue se ha apoyado sobre esta noción para edificar su definición de integral. Borel ha contado la génesis de este descubrimiento:

En la época en que terminé mis estudios en la Escuela Normal de París, en 1892, la teoría de las funciones analíticas era uno de los campos de la ciencia en los que se habían hecho importantes descubrimientos durante las décadas precedentes, pero donde quedaba todavía mucho que hacer. Fui atraído por este campo, y sobre todo por el estudio de la influencia de los puntos singulares sobre las propiedades de las funciones. La representación geométrica de la variable imaginaria por un punto del plano era clásica desde hacía mucho tiempo; los problemas a estudiar se planteaban así bajo una forma a la vez geométrica y algebraica, y esta mezcla, en la investigación, de los métodos de la geometría y del álgebra me gustaba mucho. Para intentar dar, incluso a los que no le son familiares las especulaciones matemáticas, una idea de la naturaleza de los problemas que me planteaba, voy a simplificarlos restringiéndome a considerar conjuntos de puntos en un plano.

Imaginemos un metro en madera o metal sobre el que se han efectuado divisiones decimales, tenemos así dibujados los decímetros, los centímetros y los milímetros. Prácticamente no vamos más lejos pues serían necesarios aparatos muy delicados para llegar a trazar líneas suficientemente distintas, espacios de una décima de milímetro. Sin embargo, el matemático no tiene hábito de incomodarse con estas contingencias prácticas y es un procedimiento natural para él generalizar un método donde ha podido hacer las primeras aplicaciones. Se puede así concebir que sin poder trazarlas

efectivamente, podemos imaginar, después, las divisiones en centímetros, milímetros, décimas de milímetro, divisiones todavía más finas en centésimas de milímetro, en milésimas de milímetro [...] etc. Si admitimos que pudiéramos tener microscopios de aumento indefinido y si admitimos igualmente que la regla conserva el mismo aspecto bajo aumentos considerables, nada nos impide prolongar indefinidamente con el pensamiento estas divisiones. Hemos marcado así sobre nuestra regla una infinidad de puntos donde cada uno corresponde a una fracción decimal simple; por ejemplo la fracción 0´3241732 corresponde a uno de los diez millones de puntos que marcan la división del metro en diezmilésimas de milímetro. En el lenguaje de la teoría de conjuntos se dice que todos los puntos así marcados son densos en cualquier parte de la recta. No hay en efecto una porción, por pequeña que sea, de la largura del metro, sobre la que todos estos puntos decimales no se empujen unos contra otros.

Hay otra parte sobre la recta de los puntos que no son puntos decimales; son todos los puntos que son representados por una fracción decimal ilimitada, bien una fracción periódica como 0´333 [...], bien una fracción irregular como la de los decimales del número π= 0´14159265 [...]

Sobre toda porción de la recta, por pequeña que sea, se encuentran a la vez puntos decimales y puntos no decimales. Si, por tanto, se quiere comparar el conjunto de los puntos decimales con el conjunto de puntos no decimales por el método natural y clásico que consiste en dividir la recta en intervalos cada vez más pequeños, no se tendrá ningún resultado; por pequeño que sea el intervalo, se constatará que en él hay a la vez puntos decimales y puntos no decimales. Parece pues que no sea posible descomponer la recta en intervalos que encierren todos los puntos decimales sin encerrar al mismo tiempo todos los puntos no decimales.

Esta imposibilidad no había sido tal vez enunciada explícitamente, pero era implícitamente admitida por todos los matemáticos. Estos, sin embargo, por diversas razones obtenidas de la teoría de la potencia de conjuntos de Cantor, extraídas también de la consideración del cálculo de probabilidades más o menos confusas, que precisaremos rápidamente, sabían que los puntos decimales debían ser mirados como más raros que los puntos no decimales. Si se sortean las cifras de una fracción decimal, para que esta fracción sea un número decimal limitado, hay que suponer que a partir de un cierto puesto todas las cifras sean iguales a cero y ésta es una eventualidad que debe ser mirada como muy poco probable. ¿No había pues un medio de distinguir, por la consideración de intervalos suficientemente pequeños encerrándolos todos, los números decimales de los números no decimales?

Fue reflexionando sobre este problema, e intentando representarme los trazos con los que la infinidad de números decimales se puede marcar sobre una recta, cuando tuve la muy simple idea siguiente: si estos trazos son suficientemente finos, su anchura total podrá considerarse muy pequeña e inferior a la largura total de la recta. En estas condiciones hay muchas posibilidades para que ciertos puntos de la recta no estén recubiertos por estos trazos, pues sería paradójico que se pudiese recubrir la recta entera por trazos cuya anchura total es inferior a su longitud. Esta simple reflexión llevaba por el camino del descubrimiento y sólo era necesario un poco de atención y paciencia para llegar a formularlo.

Si se vuelve a tomar la imagen del metro sobre la que están marcadas las divisiones y si se da a las divisiones centimétricas una anchura de un milímetro el conjunto de estas 100 divisiones centimétricas cubrirá 10 centímetros, si se da después a las divisiones milimétricas una anchura de una centésima de milímetro, el conjunto de estas divisiones milimétricas ocupará menos de un centímetro; se puede continuar así y arreglárselas para que el conjunto de las divisiones marcando décimas de milímetro ocupen menos de un milímetro, y así sucesivamente. En estas condiciones, cuando se haya llegado justo al extremo, es decir cuando se hayan marcado todos los números decimales limitados, así como los que tienen un gran número de decimales, el conjunto de los trazos ocupará solamente una fracción de la longitud total de la recta. Se podrá asimismo arreglárselas para que esta fracción sea inferior a un número muy pequeño dado de antemano.

Se llega así, eligiendo convenientemente los intervalos y definiendo estos intervalos a partir de los puntos decimales que se quieren estudiar, a encerrar todos estos puntos decimales en un conjunto de intervalos cuya longitud será por ejemplo inferior a un milímetro, mientras que estos puntos están infinitamente apretados sobre toda la recta que tiene un metro de longitud. Es un resultado muy simple que habría debido ser conocido desde hace mucho tiempo, pero que sin embargo ha aparecido como muy nuevo y paradójico.

Nuestra imaginación geométrica representa en efecto muy difícilmente estos intervalos que encierran todos los puntos decimales y que, sin embargo, no constituyen más que una muy reducida fracción de la recta entera, dejando fuera de ella muchos puntos que no se encierran en su interior. La aritmética tiene de bueno darnos la seguridad de que siendo la longitud total de estos intervalos extremadamente escasa, no es posible que encierren en su interior todos los puntos de la recta. La intuición geométrica de este resultado no nos es natural.

No es éste el lugar para desarrollar las consecuencias que ha tenido el método así creado, método que consiste esencialmente en construir intervalos a partir de los puntos que se estudian, en lugar de estudiar la repartición de estos puntos en intervalos formados de antemano tras una regla fija. Será suficiente para mí recordar los resultados que ha dado este método para el estudio de las funciones analíticas en ciertos dominios singulares y recordar igualmente que todo el desarrollo de la teoría de la medida de los conjuntos y de la teoría

célebre de integración de Lebesgue se relaciona directamente con este método. [*Organon Intern. Rev.*, *1* (1936) 33-42 y *Emile Borel, philosophe et homme d'action*. Textos recogidos y presentados por M. Fréchet, Gauthier-Villars, París, 1967, pp. 325-329].

LAS LEYES DE LA MECANICA QUIMICA

Henry Le Chatelier (1850-1936) era un químico y un metalúrgico francés. En su libro *De la méthode dans les sciences expérimentales* [Dunod, París, 1936] ha contado numerosos descubrimientos y, en particular, el de las leyes de la mecánica química.

En este caso, se dedujeron nuevas leyes de la química, sin la intervención de experiencias nuevas, de leyes anteriormente conocidas. Por una parte, la de la termodinámica, consecuencia de las investigaciones de Sadi Carnot sobre la potencia motriz del fuego, y por otra parte, la del equilibrio químico, desarrollo de las experiencias de Saint-Claire Deville sobre la disociación.

Más tarde, las muy amistosas relaciones de mi padre con Saint-Claire Deville me pusieron al corriente de los descubrimientos relativos a la disociación, que yo había seguido con mucho interés a través de las publicaciones relativas a esta nueva rama de la química. Tras el trabajo de Debray sobre las tensiones fijas de la disociación del carbonato de cal, dos científicos franceses, Peslin y Moutier, publicaron simultáneamente sin haberse consultado, notas en los informes de la Academia, para mostrar que del hecho de las tensiones fijas, la ley Clapeyron-Carnot, relativa a la tensión del vapor de agua, era igualmente aplicable a la tensión de disociación del carbonato de cal.

Me impresionó inmediatamente este razonamiento aunque sin saber, sin embargo, por qué. Me hacía un poco el mismo efecto que el que sirve para calcular la edad del capitán de un navío conociendo la fecha de su nacimiento y la altura del palo mayor. La tensión fija me parecía no tener nada que decir al respecto.

Todos los fenómenos de equilibrio debían estar bajo la dependencia de las leyes de la termodinámica, o ninguno de ellos.

Me enganché a este problema y trabajé durante un año sin llegar a ningún resultado. No era sin duda lo bastante maestro en los métodos de la termodinámica ni estaba lo bastante familiarizado con el cálculo matemático. Un día se me ocurrió la idea cuando leí el opúsculo de Sadi Carnot sobre la potencia motriz del fuego, que no conocía todavía, pues pasamos completamente por alto estos métodos de razonamiento en la enseñanza clásica. Sadi Carnot se contenta con aplicar el principio de la imposibilidad del movimiento perpetuo al trabajo suministrado por el desplazamiento del calor. En el momento en que las reacciones químicas entran en el juego del trabajo, y además pueden ser efectuadas por vía reversible, le son aplicables idénticamente los mismos razonamientos. Conseguí también formular la ley de Clapeyron-Carnot a todos los sistemas invariantes, que presenten o no una tensión fija.

Tras haber acabado este estudio, debo reconocer que un científico americano, J. W. Gibbs, había deducido las mismas leyes de la termodinámica clásica, con anterioridad a mis investigaciones. Pero él estaba contento de dar sus fórmulas algebraicas sin traducirlas al lenguaje corriente y nadie había comprendido el alcance de su trabajo. Son mis investigaciones y las investigaciones paralelas de Vant'Hoff las que han hecho conocer a los químicos las leyes esenciales de la mecánica química, a pesar de que no pudimos reclamar ninguna prioridad por el descubrimiento de estas leyes.

Debemos reconocer, por tanto, que, en las ciencias físico-químicas, el descubrimiento de leyes nuevas por la simple combinación algebraica de leyes anteriormente conocidas es bastante raro. [Pp. 78-79].

CAPITULO VIII

LA CREATIVIDAD SIMULADA

La inteligencia artificial nació hacia el final de los años 50. Desde 1958, A.J. Neivell, J.C. Shaw y Herbert A. Simon, premio Nobel de ciencias económicas en 1978, barajaron la hipótesis de que el proceso del descubrimiento científico podía ser simulado por ordenador y se lanzaron al estudio de la metodología de la investigación. En los años 70, el equipo del matemático holandés N. G. de Bruijn atacó un problema próximo a la demostración automática de teoremas. Para alcanzar estos objetivos, investigadores como Marvin Minsky y Seymour Papert intentaron comprender cómo funciona la mente [ver con respecto a esto: M. Minsky, *La société de l'esprit*, InterEditions, París, 1988].

Actualmente existen un cierto número de programas por ordenador de sistemas expertos, y son capaces, con la ayuda de esquemas heurísticos, de rehacer descubrimientos científicos conocidos. El libro de P. Langley, H.A. Simon, G.L. Bradshaw y J.M. Zytkow, *Scientific discovery* [The Mit Press, Cambridge, 1987] trata del estado de las investigaciones en este campo.

Un ejemplo muy interesante de un tal sistema experto ha sido descrito por D. Kulkarni y H.A. Simon en un informe interno de la Universidad Carnegie-Mellon de Pittsburg en 1986 [*The processus of scientific discovery: the strategy of experimentation*, CMV-CS-86-111]. Trata de la elucidación por Hans Krebs en 1931-1932 del ciclo químico de la síntesis de la urea en el hígado por la que él obtuvo el premio Nobel de medicina en 1953.

Hemos visto (en el capítulo VII, pp. 106-108) que la síntesis de la urea en laboratorio había sido realizada por Friedrich Woehler en 1828. La composición de la urea y el conocimiento del ciclo de su síntesis en laboratorio condujeron a los científicos a hipótesis (que se revelaron falsas) sobre su síntesis en vivo, en el hígado. Experiencias de nutrición de animales habían mostrado que si se añadía glicocola o leucina en su alimentación, la producción de urea aumentaba, lo que había conducido a la hipótesis de que los aminoácidos eran intermediarios entre las proteínas y la urea. Experiencias similares mostraron más tarde que las sales de amonio producían el mismo efecto. Utilizando hígados aislados bajo perfusión se mostró rápidamente que las sales amoniacales, la leucina, la tiroxina y el ácido aspártico aumentaban la formación de la urea y se concluyó de ello que el hígado sintetizaba la urea a partir de los aminoácidos y del amoniaco. Las dificultades experimentales ligadas a los métodos de perfusión no permitieron contrastar las diferentes hipótesis. Esta era la situación cuando Krebs comenzó sus trabajos en 1931.

Comprobó diferentes aminoácidos sobre laminillas de tejidos, técnica que había aprendido en el laboratorio de Otto Warburg. Los resultados fueron negativos, y concluyó que la glucosa inhibía la formación de amoniaco a partir de aminoácidos. Aceptaba entonces sin embargo la idea admitida de que el amoniaco era un producto intermedio esencial y pasó cuatro meses para caracterizar la formación de la urea a partir del amoniaco.

Un nuevo estudiante de medicina, Henseleit, vino entonces a ayudar a Krebs, quien decidió determinar la fuente inicial del nitrógeno de la urea, que pensaba que pudieran ser los aminoácidos. Varias sustancias dieron resultados negativos. Durante las dos primeras semanas de noviembre de 1931, Krebs y Henseleit estudiaron la influencia de la glucosa, de la fructosa, del lactato y del citrato, los cuales juegan un papel de intermediarios en el metabolismo de los hidratos de carbono. No tenían ninguna hipótesis específica pero estudiaban esta dirección porque se había observado una diferencia de producción de urea entre las laminillas de hígado provenientes de ratas bien alimentadas y de ratas hambrientas. El 15 de noviembre, Henseleit probó un nuevo aminoácido, la ornitina y una mezcla de ornitina y de cloruro de amonio. La mezcla producía una dosis muy fuerte de urea. Hasta el 14 de enero de 1932, Krebs utilizó una estrategia estándar que consistía en probar derivados de la mezcla; pero ninguno produjo efectos parecidos a la ornitina. El efecto era pues específico de este aminoácido y habría que tenerlo en cuenta en el mecanismo de producción de la urea; pero Krebs no tenía hipótesis para formular.

A partir del 14 de enero, Krebs y Henseleit tuvieron la posibilidad de utilizar un nuevo material para hacer comparaciones precisas entre el amoniaco consumido y la urea producida. Desde el 23 de enero era prácticamente cierto que el amoniaco era el precursor del nitrógeno de la urea. Había que encontrar el papel jugado por la ornitina y Krebs llegó poco a poco a la conclusión de que era un catalizador. A pesar de que esta conclusión pueda parecer ahora evidente, hay que recordar que en 1932 el estudio de la catálisis era nuevo. Krebs sabía que la arginina se convertía

en urea y ornitina y tuvo la idea de que esta reacción debía intervenir en el cuadro. Durante este tiempo, Henseleit continuaba estudiando los efectos de la ornitina y el 13 de abril pudo mostrar que una molécula de ornitina podía producir más de 24 moléculas de urea: la reacción era pues catalítica.

Gradualmente el ciclo de la síntesis de la urea emergía de la mente de Krebs. Sin embargo la conversión de la ornitina en arginina no podía efectuarse en un solo paso. Debía existir un intermediario. La teoría fue así completada cuando Krebs encontró un artículo de 1930 donde se mostraba que la citrulina era un intermediario entre la ornitina y la arginina. A mediados de mayo de 1932 Krebs podía enviar un artículo donde se describía el ciclo completo: la ornitina y el amoniaco producen citrulina que da arginina, urea y ornitina.

Vemos que ciertas fases de este descubrimiento son lógicas y que otras son irracionales. Kulkarni y Simon han escrito un sistema experto que ha sido capaz de reconstruir este descubrimiento a partir de datos experimentales, de informaciones sobre las sustancias y las reacciones químicas y heurísticas.

La primera idea irracional, sin fundamento lógico, de Krebs y Henseleit ha sido probar la ornitina. Si esta sustancia no hubiera estado en la lista de sustancias que el sistema experto debía comprobar, no habría podido obtener el ciclo correcto. No hay que buscar explicaciones complejas. No había ninguna razón especial en probar la ornitina; es el elemento irracional de la prueba, elemento que se puede comparar a la iluminación. Sólo el instinto, o el azar, ha podido conducir a hacer este ensayo.

La segunda idea original de Krebs es haber pensado en la catálisis, una posibilidad poco estudiada en la época. Aquí todavía el sistema experto contiene esta posibilidad.

Podemos preguntarnos (pero no siendo un especialista en estas cuestiones me guardo de concluir nada), si las respuestas no estaban de hecho contenidas implícitamente en el sistema experto que no tenía más que explorar las diferentes posibilidades.

La creatividad es un proceso fuertemente complejo y todavía muy mal comprendido. En su monumental estudio, Alex F. Osborn [*Créativité, l'imagination constructive*, Dunod, París, 1988, p. 33] ha dicho: [...] *la imaginación verdaderamente creativa es raramente automática.*

Pero hay una limitación mucho más fundamental a la creatividad simulada, que ha sido formulada por Jacques Arsac [*Les machines à penser,* Seuil, París, 1987, p. 8]: *Si una inteligencia artificial es posible, entonces yo soy una máquina.*

¿Qué piensan ustedes de ello?

COMUNICAR

CAPITULO IX

LA VIDA CIENTIFICA

Como ya he dicho, el investigador, sea joven o veterano, debe participar activamente en la vida de la comunidad científica a la que pertenece. Debe buscar contactos personales con investigadores que trabajen en el mismo campo que él. Hemos visto ya que tales contactos pueden proporcionar enriquecimiento; y son, desde mi punto de vista, de una importancia primordial para las discusiones y los cambios de ideas que acarrean:

La forma como se efectúa la investigación científica no aparece en los periódicos o revistas especializadas, aparece claramente en las discusiones entre investigadores con los mismos intereses. Las discusiones entre especialistas así como los periodos de reflexión solitaria y de dura labor son los verdaderos momentos creativos, los que dan nacimiento a las iluminaciones útiles a la ciencia. [H. Pagels, pp. 332-333].

Vemos por todas partes una idea proceder de otra, como la hoja de la yema, como el fruto de la flor. [Reuleaux].

Es verdad que un matemático no necesita ningún laboratorio, ningún material de primer orden y caro para su trabajo, pero tiene necesidad de una atmósfera matemática conveniente, de un contacto con sus colegas.

Esta atmósfera es necesaria no sólo a los estudiantes, sino tambien a los que hacen avanzar las fronteras del conocimiento. Con el fin de crear esta atmósfera entre los estudiantes, la concentración de personas dotadas para escuchar es mucho más aprovechable que la concentración de enseñantes con talento. Puede ser que la asociación de colegas sea el factor de desarrollo más importante tanto como el factor psíquico para la motivación a trabajar. La organización de grupos concentrados importantes de estudiantes de matemáticas es, a mi parecer, el elemento particular más importante en la instrucción de las matemáticas [...]

Terminamos esta discusión incidente y volvemos a las consideraciones sobre la creatividad matemática. Para esto se puede crear una atmósfera favorable solamente por el interés por un asunto común. Los colegas son indispensables para los investigadores. Lo más frecuente es que un investigador aislado desaparezca. Las causas de esto no son sólo psicológicas, no sólo de falta de coraje; un investigador aislado tiene muchos menos conocimientos que aquellos que trabajan juntos. No tiene información de los resultados de la investigación; solamente algunos años después de su nacimiento, es decir, cuando las ideas están impresas. Un investigador aislado no es testigo de cómo vienen las ideas ni de dónde; no vive el proceso de cabo a rabo con sus creadores. [Zygmunt Janiszewski, *The needs of mathematics in Poland*, Nauka Polska, 1918].

Pero la explicación más rica en imágenes de este modo de transmisión de ideas es debida a Voltaire:

Ocurre con las obras de la inteligencia como con el fuego de nuestro hogar. Prendemos fuego en casa del vecino, se alumbra su casa, se lo pasa a otros y el fuego pertenece a todos.

El primer lugar para tomar contactos con colegas es naturalmente su propio grupo de investigación. No hay que dejar que el estudiante en curso de tesis se encierre en soledad, no viniendo a la Universidad más que para tener una pequeña discusión con su director de investigación. Debe participar en la vida del laboratorio al que pertenece; debe discutir con los otros compañeros, participar (y no asistir pasivamente) en los seminarios y sostener tesis de sus compañeros. No debe tener miedo de llegar a discutir con los investigadores de paso. Si se le propone, debe ir a otros laboratorios a pasar estancias. El aislamiento engendra siempre esclerosis y los aportes nuevos de sangre son siempre benéficos.

No hay tampoco que tener miedo a tomar contactos epistolares con los colegas cuyo trabajo os interesa. La correspondencia científica es una parte importante de la actividad del investigador. En el siglo pasado donde los viajes eran más difíciles y menos rápidos, se ha visto, por ejemplo, a Hermite y Stieltjes intercambiar 432 cartas en 12 años. Y qué decir de la correspondencia de los Euler, Bernoulli y otros. Llenan volúmenes enteros.

Cuando se acaba de leer un artículo interesante no hay que vacilar en escribir al autor para hablarle de las investigaciones propias (si, naturalmente, tienen cierta relación con las suyas), o darle conocimiento de las ideas que su artículo ha podido sugerir. Se puede también pedirle que envíe separatas de sus artículos ya aparecidos *(reprints* en inglés) y una copia de sus nuevos trabajos todavía no publicados *(preprints* en inglés). Se constituirá así poco a poco una red de corresponsales por el mundo.

Es de interés capital para todo investigador recibir los *preprints* de autores que trabajan en el mismo campo. Pueden pasar varios años entre la finalización de un trabajo de investigación y el momento de su publicación en una revista científica o en las actas de un Congreso. Así se está al corriente mucho más rápidamente y esto evita buscar alguna cosa que ya ha sido encontrada y por tanto permite ganar mucho tiempo y ganar a los colegas por la mano si el *preprint* en cuestión ha hecho surgir en vosotros una idea nueva.

Hay que intentar enseguida tomar contactos fuera del propio laboratorio. Si vuestro trabajo es conocido en el exterior (para ello es suficiente hacer llegar a otros vuestros propios *preprints)* podréis ser invitados a dar un seminario en otra Universidad.

Otra fuente todavía más importante de contactos es participar en Congresos Nacionales e Internacionales. Se desarrollan muchos cada año. Es ahí donde se traban amistades que pueden durar toda una vida. Naturalmente, al principio, el joven investigador estará un poco perdido, salvo si un investigador más avanzado en el oficio le acompaña. No hay que tener miedo de ir a hablar con personas, incluso si son personalidades conocidas en vuestro campo. Por qué no hacer como los americanos, ir con toda sencillez hacia las personas y decirles quién es usted, de dónde viene, qué hace. Entre científicos los contactos son simples, fáciles y cordiales. No hay lugar para estar inhibido. Diré incluso que lo más importante de un congreso es encontrar a los demás, discutir con ellos, lo que los anglosajones llaman *to socialize*. Esto no quiere decir naturalmente que no hay que asistir a las exposiciones pues, aunque no os interesen directamente y estén lejos de vuestras preocupaciones, pueden crear en vosotros esas famosas asociaciones de ideas, esas analogías de las que ya hemos hablado.

En general los Congresos son anunciados en los boletines de información de las diferentes sociedades profesionales. Si no se forma parte de una asociación, hay que, al menos, leer algunos de estos boletines que se encuentran generalmente en las bibliotecas. Además de los anuncios de congresos, estos boletines contienen artículos sobre la vida de la profesión e informaciones de interés general que es importante conocer.

Lo mejor, sin embargo, es formar parte de un cierto número de estas sociedades culturales. No son muy numerosas. Es bueno formar parte de una sociedad nacional y de una sociedad extranjera bien elegida. Son lugares privilegiados de intercambio de información científica. Con el tiempo se podrá igualmente tomar parte activa en su funcionamiento; es un trabajo que puede ser apasionante y que lleva a nuevos contactos. Se ensancha así el campo de visión y, lo que nunca es despreciable, se hace conocer el trabajo propio a nuevas personas, de donde surgen nuevos contactos, y así sucesivamente.

Más tarde, cuando el investigador haya adquirido una cierta madurez, podrá llegar a dirigir tesis, escribir libros, formar parte de comités de redacción de revistas científicas, organizar congresos, dirigir colecciones y, por qué no, a recibir premios o formar parte de la Academia de Ciencias.

Como vemos, esta vida apasionante del investigador no se detiene jamás; viaja, investiga, escribe, dirige, enseña, organiza, pero, ante todo, aprende y, como dice un proverbio japonés: *se comienza a envejecer cuando se acaba de aprender.*

CAPITULO X

TECNICAS DE EXPRESION ORAL

En el transcurso de su carrera, el investigador tendrá que exponer oralmente los resultados de su investigación y ello sucederá el día de la defensa de sus tesis.

Si bien algunas personas están naturalmente dotadas para tal ejercicio, hay sin embargo una cierta progresión que puede ser indicado respetar. No pienso que un joven investigador que no haya hablado nunca en público, se sintiera muy contento si se le coloca delante de doscientas personalidades científicas en un importante congreso internacional.

Es, por tanto, deseable que cada estudiante tenga la ocasión de hacer una exposición delante de sus compañeros durante sus estudios y que acuda a las de sus colegas. Así tendrá una ocasión (la primera para la mayoría de ellos) de expresarse en público y se beneficiará de las observaciones hechas por el profesor. Esta exposición no será hecha a este nivel a partir de los propios resultados del estudiante, pero se le podrá dar a leer y a exponer algunos artículos relativos a un tema concreto. Aprenderá también a leer y a comprender el trabajo de los otros, a hacer una síntesis, a entresacar las ideas esenciales, a exponerlas y en ocasiones a criticarlas -o al menos- intentar dar su opinión personal.

Cuando el joven investigador haya comenzado su propio trabajo y obtenido algunos resultados interesantes podrá hacer un seminario ante los investigadores de su universidad y después ante los de otra universidad. La etapa siguiente consistirá en hacer una exposición en un congreso nacional y posteriormente en una conferencia internacional.

Como ya he dicho en la introducción no pienso que se pueda enseñar -y por tanto aprender- la manera de realizar una exposición oral. Algunas personas están instintivamente dotadas para este ejercicio y no existe ninguna receta milagrosa para transformar un mal orador en un Demóstenes. Existen, sin embargo, algunas reglas a seguir para asegurar cierta calidad en las exposiciones orales. Veamos primero las que conciernen al fondo.

No es necesario decirlo todo, no hace falta exponer más que los resultados más importantes. Hay que hacer comprender al auditorio el fondo de su pensamiento, las ideas esenciales y originales sin entrar en detalles demasiado técnicos; en primer lugar -y esto se hace patente en los congresos donde el tiempo suele estar limitado a 20 minutos- no se dispone del tiempo necesario y además se corre el riesgo de hacer perder el hilo conductor del pensamiento del auditorio y finalmente de abandonarlo. Lanzarse a la demostración detallada de un resultado, salvo si es el punto principal de la exposición, es la mejor manera de que muchas personas dejen de escuchar al cabo de cierto tiempo. Hilbert decía: *solamente las uvas del pastel,* y cuando un conferenciante se lanzaba en detalles técnicos le hacía notar que los oyentes no estaban allí para verificar que el signo era exacto. Por el contrario, cuando una exposición era demasidado simple exclamaba: *no estamos en cuarto.*

El esquema de una exposición es en general el siguiente. Comenzar por definir bien el problema que se va a resolver, teniendo en cuenta que quizás algunos oyentes no hayan oído hablar nunca del tema. Después, situar el problema en su contexto histórico recordando los resultados obtenidos anteriormente por otros autores. Se pueden entonces describir rápidamente los resultados propios mostrando su interés y lo que aportan a lo ya conocido. Esto constituye la introducción. Ahora se puede pasar a la exposición propiamente dicha sin haberse olvidado antes de definir claramente las notaciones que van a ser utilizadas. Se finalizará con una conclusión en la cual se podrán citar algunos problemas abiertos que se proponen -o no- para estudiar más tarde.

Damos ahora algunos consejos sobre la forma de la exposición. En general se utiliza una pizarra o un retroproyector. En ambos casos es necesario hablar de cara al público, lo que es evidentemente más difícil cuando se utiliza una pizarra. Actualmente se van abandonando cada vez más las pizarras, a pesar de que algunos conferenciantes se niegan, para dejar paso al retroproyector. Esta nueva técnica presenta en mi opinión varias ventajas, siendo la principal que como está todo escrito previamente, el orador puede concentrarse en su exposición y evitar volver continuamente a las notas manuscritas como ocurre desgraciadamente en algunos casos. El conferenciante no tiene que acordarse ni del plan de su exposición ni de los detalles. Es necesario, sin embargo, poner mucha atención ya que se tiende a ir más deprisa cuando se utilizan transparencias que cuando se está obligado a escribir en la pizarra. ¡Yo he visto a conferenciantes hacer desfilar más de treinta transparencias en veinte minutos! Una buena manera de no ir muy deprisa -y al mismo tiempo de atraer la atención del auditorio sobre lo que se está diciendo- es señalar el lugar indicado a medida que se va

hablando, por ejemplo con un rotulador sobre la transparencia o con un puntero sobre la pantalla. Al señalar sobre la pantalla existe la tendencia de hablar de espaldas al público; será necesario en consecuencia tener cuidado. Otra técnica consiste en no descubrir completamente la transparencia ocultando la parte de abajo con una hoja de papel. En ningún caso habrá que leer pura y simplemente las transparencias y, en particular, las fórmulas. Es necesario comentarlas, las transparencias no son más que un apoyo destinado a ayudar al público a seguir los puntos técnicos de la exposición.

Otra ventaja de las transparencias es la de permitir la superposición. De esta manera se pueden añadir términos en una ecuación ya utilizada para mostrar cómo se modifica al superponer gráficos o figuras geométricas. Se pueden superponer sin problema 4 ó 5 transparencias.

Cuando se utiliza un retroproyector el punto fundamental es la escritura previa sobre las transparencias de los resultados que se desean mostrar. Se utilizan para ello unos rotuladores especiales que pueden o no borrarse. La primera regla es escribir legiblemente; es evidente, pero la experiencia me ha demostrado que está lejos de ser siempre el caso. La segunda regla, que es fundamental, es no escribir más de 10 ó 12 líneas sobre una transparencia. Es necesario pensar en los que están en el fondo de la sala y escribir suficientemente grueso. ¡Cuántas veces se han visto transparencias con 25 líneas de texto! No se debe fotocopiar un texto mecanografiado sobre transparencias. Los caracteres son demasiado pequeños. No hay nada más desastroso que una exposición hecha a partir de malas transparencias o de una mala utilización de éstas. También es conveniente comprobar que el proyector está bien ajustado, que la proyección está bien encuadrada sobre la pantalla y que no se tapa con la espalda o con la cabeza como ocurre a menudo.

La última regla es escribir unas transparencias atractivas a la vista. Para ello se pueden utilizar rotuladores de diferentes colores. El negro quedará reservado al texto nomal. Se podrá elegir un cierto color, siempre el mismo, para los teoremas y otro para las ecuaciones importantes. El texto deberá estar bien espaciado y encuadrado de manera agradable sobre la transparencia. Es necesario aprender a utilizar el espacio de ésta.

El problema es el mismo para una exposición realizada en la pizarra. Es necesario aprender a utilizar el espacio y no escribir al azar en todas las esquinas. Es necesario un método. Lo mejor es comenzar en alto a la izquierda para terminar abajo a la derecha. Igualmente hay que conservar los resultados que se vayan a seguir utilizando. Es deseable que éstos no se encuentren en medio de la pizarra porque habría que copiarlos de nuevo en otro lugar. Cuando se realiza la exposición se sabe de antemano qué resultados habrá que conservar. Se escribirán directamente en una parte de la pizarra reservada a tal efecto. Antes que F. Klein comenzara una exposición o un curso, tenía dispuesto en su mente un conjunto de fórmulas, diagramas y notas. No tenía que borrar nada de lo que había escrito en la pizarra. Al final de la exposición ésta contenía un resumen perfecto del tema. Cada centímetro cuadrado se utilizaba y ordenaba lógicamente. Este es un caso ideal .

El último punto es que una exposición debe ser preparada. No hay nada más lamentable que un conferenciante que no sabe lo que quiere decir, que balbucea, duda, rectifica, se equivoca; pero no hay nada más triste que el que recita un texto aprendido de memoria. Una exposición debe ser viva, aunque esto es arte y no se aprende.

CAPITULO XI

TECNICAS DE EXPRESION ESCRITA

Las reglas generales para la presentación de un documento escrito no son muy diferentes de las que regulan una exposición oral. Incluso algunos de los consejos que se dan a continuación se aplican igualmente a una conferencia. La redacción de un artículo y, con mayor razón, de una tesis es un trabajo largo. Es necesario ponderar cada palabra. En la redacción de mi tesis, ¡escribía tres páginas los días en que trababaja bien y era una segunda redacción!

Este capítulo está inspirado en gran medida en una publicación de la American Mathematical Society titulada: *A manual for authors of mathematical papers*, que se puede adquirir a través de esta sociedad y que invito a todos los autores o futuros autores a leer porque está redactada por un comité de prestigiosos matemáticos con amplia experiencia sobre el tema.

Existen dos tipos de consejos: los relativos a la escritura propiamente dicha, la organización y presentación general de un artículo y los que tratan de los problemas de edición y del coste. Es necesario saber que la impresión de los textos científicos es cara y que ciertas reglas simples permiten abaratar el coste de fabricación en proporciones notables. Es un aspecto que los autores no deben olvidar cuando se conoce el precio alcanzado por ciertos libros y revistas. Volveré a ello más adelante.

Ya se trate de la redacción de un artículo o de una tesis, las técnicas de base son esencialmente las mismas, la diferencia radica en que en una tesis se dispone de todo el espacio que se quiera, mientras que en un artículo la concisión es generalmene la regla. De todas maneras pienso que para escribir no es necesario esforzarse, es necesario esperar la inspiración, el momento propicio cuando se siente lo que se va a decir. Es necesario escribir a su ritmo. Boileau ha dicho: *lo que bien se concibe se enuncia con claridad y las palabras acuden fácilmente*. Esto es cierto para cualquier tipo de escritura, sea científica o no. Boileau ha dicho también: *emprended vuestra obra veinte veces, pulidla sin cesar y* *repulidla*. En este punto estoy menos de acuerdo; evidentemente hace falta leer una o dos veces lo que se ha escrito pero esta máxima es sobre todo cierta para la poesía o la literatura. Para las materias científicas estoy profundamente convencido de que *lo que bien se concibe...* y que la primera composición de un texto es casi siempre buena. Naturalmente, cada uno en su estilo, cada uno con sus métodos de expresión escrita. Algunos investigadores no sabrán jamás redactar de manera clara y agradable, del mismo modo algunos otros no sabrán jamás expresarse en público. Además pienso que es necesario un cierto don de partida, pero que la mejora del estilo pasa obligatoriamente por la lectura de obras de grandes autores clásicos.

En su autobiografía, Paul Appell ha escrito:

La verdad es que no hay que separar las letras de las ciencias. Un hombre culto debe conocer lo esencial de un lado y de otro. Es imposible, en un siglo de civilización científica, en una época donde la filosofía toma por apoyo la ciencia, que una educación deje ignorar ciertos principios esenciales. [*Souvenirs d'un Alsacien*, Payot, París, 1923, pp. 65-66].

Al igual que en la expresión oral, existen algunas técnicas -que voy a exponer a continuación- que permiten mejorar la calidad de un escrito. Hablaré de la redacción de un artículo destinado a los especialistas. Para los publicados en revistas correspondientes a una disciplina científica diferente será necesario ser menos técnico y más explicativo.

El primer punto es la elección de un título. Este debe ser suficientemente claro para que el lector pueda colocar inmediatamente el artículo en su dominio. Debe contener una o varias palabras-clave y debe ser lo más explícito posible. Por ejemplo, *Localización de las raíces complejas múltiples de un polinomio* es un buen título, mientras que *Sobre una extensión de un teorema de X* es un título que no da ninguna información sobre el contenido del artículo quizás a excepción de X, si sólo ha publicado un único teorema. Del mismo modo hay que evitar los títulos demasiado largos, como era costumbre en otro tiempo. Un título de 10 ó 12 palabras debe ser suficiente.

Después del título viene generalmente un resumen del artículo. Debe ser corto y limitarse a dar el resultado principal. El fin del resumen es dar al lector una idea del contenido para que pueda decidir si quiere o no leerlo. Como he dicho antes, no hay que olvidar que este resumen será publicado en revistas como *Zentralblatt für Math.* y figurará en las bases informatizadas de datos bibliográficos. Para la redacción del resumen no hay que utilizar el estilo telegráfico, sino frases completas. Se deben evitar las fórmulas y, en general, las observaciones demasiado técnicas,

ya que el resumen debe poder ser comprendido por el máximo de lectores. No debe contener ni llamadas a la bibliografía del artículo ni fórmulas o teoremas desarrollados en el artículo. El resumen suele ir seguido de las palabras-clave y de los números correspondientes de la clasificación de los temas adoptados en la disciplina.

A continuación, la introducción, que es de una importancia fundamental y debe estar redactada con mucho cuidado. El primer párrafo de la introducción debe poder ser comprendido por cualquier matemático (o físico, si se trata de un artículo de física, etc.) y debe permitir localizar el campo de investigación al cual el artículo se refiere. Se debe después plantear rápida y claramente el problema que se va a solucionar, dar los principales resultados obtenidos y decir -si procede- por qué método han sido obtenidos, pero evitando ser demasiado técnicos. Es igualmente aconsejable dar una breve historia del tema así como las conexiones con los resultados de otros autores. La introducción terminará con un corto planteamiento del resto del artículo y, si es necesario, con la definición de las notaciones utilizadas y las llamadas a las referencias para los conceptos y resultados de base que el lector debe conocer para comprender el artículo. Normalmente la introducción de un artículo no debe superar una página (de texto impreso). En una tesis debe ser más larga ya que se da un resumen de los principales resultados obtenidos. Aconsejo a mis estudiantes añadir una introducción en cada capítulo donde retomen y desarrollen lo que han dicho en la introducción general de la tesis. Cuando se redacta una introducción no es necesario hacer acto de falsa modestia; hay que exponer claramente los resultados que se han obtenido y lo que aportan en relación a lo que era conocido hasta entonces.

La presentación del resto del artículo depende del género de resultados obtenidos. Si éste es un teorema importante, cuya demostración necesita de resultados previos, se podrá enunciar este teorema en el primer párrafo y reservar su demostración y la de los lemas para los párrafos siguientes. Si el interés del artículo reside en un nuevo método, éste será presentado en el primer párrafo, a continuación, los resultados teóricos y por último las aplicaciones.

Como norma general, el primer párrafo después de la introducción debe contener los resultados principales (a menos que éstos no requieran un largo camino para hacerlos comprender plenamente y poder captar la evolución del pensamiento conduciendo a una condición evidente que presente algún interés). El autor juzgará la manera que estime mejor para la presentación, entendiendo que existen varias maneras de establecer un plan y redactar un artículo. Naturalmente el joven investigador contará con la experiencia de su director de investigación para este trabajo de redacción. Sin embargo es conveniente que cree su estilo propio sin buscar o copiar el de otros.

Normalmente, al menos para los resultados principales, el enunciado precede a la demostración. El lector, a menudo acosado por el tiempo, quiere conocer lo más rápidamente posible lo que va a seguir. Puede estar interesado por un teorema, pero no necesariamente en su demostración. Si ésta está colocada antes que el enunciado él la lee sin incluso saber *a priori* que se trata de la demostración del resultado que sigue.

No conviene ser demasiado impersonal, demasiado seco. En matemáticas es necesario romper la sucesión teorema-demostración-teorema-demostración, etc. Cuando se hace una exposición oral no se cautiva al auditorio escribiendo los resultados en la pizarra sin hablar. Entre cada teorema se pueden decir algunas palabras sobre el interés del teorema que se acaba de demostrar y algunas palabras de presentación, de unión con el resultado que sigue. Eso asegura un hilo conductor en la exposición y permite al auditorio ver qué se está haciendo, dónde se quiere llegar y así, finalmente, comprender bien el trabajo. Esta práctica debe hacerse extensiva a los textos, procurando evitar, como sucede algunas veces oralmente, las parrafadas vacías, largas e inútiles. En matemáticas, al igual que en otras ciencias, existe una concisión de estilo que es aconsejable respetar, aunque también es deseable que cada autor desarrolle su propio estilo. Diré a este propósito que a menudo se utiliza la primera persona del plural, por ejemplo en : *Vamos ahora a demostrar que....* Es un estilo que prefiero a: *Se va ahora ...* o *Se demuestra ahora que....* ¡Si se desea conservar este tipo de construcción, por qué no escribir entonces *Ahora voy a...*!

Hay que cuidar el estilo. Jacques Monod comparaba a menudo la ciencia al arte. Apreciaba un trabajo científico como un cuadro. La perfección consistía en que no haya ni una pincelada de más ni una de menos. Prefería la claridad de trazo a la abundancia de detalles.

Las referencias bibliográficas están colocadas por orden alfabético de autores al final de los artículos. En las tesis se pueden colocar, bien al final de cada capítulo, bien al final de la tesis; esta segunda solución es, a mi parecer, preferible, pues evita las repeticiones y permite echar una primera ojeada a las referencias utilizadas. Cada vez que se cita a un autor en el texto, bien utilizando su nombre bien uno de sus resultados, se debe enviar a la referencia bibliográfica correspondiente. Se utilizan habitualmente los corchetes [ ], los paréntesis ( ) están reservados para la numeración y para los envíos a las ecuaciones. Por ejemplo se escribirá: *Es conocido que [4, pp. 32-34]...* o *Según X[2]....* En ocasiones se utiliza alguna observación o resultado no publicado que ha sido comunicado directamente por su autor oralmente o por carta. Es una

cuestión de honestidad intelectual, de ética, hacerlo constar incluyéndolo en la bibliografía: [3] X. Comunicación personal, 3 de enero 1980.

Hay otra práctica, por desgracia utilizada por algunos, que a mi parecer es necesario desterrar: X escribe un primer artículo donde utiliza los resultados de Y citándolo. Más tarde X escribe un segundo artículo donde utiliza de nuevo el mismo resultado de Y esta vez sin citarlo pero enviando a su propio primer artículo. Al cabo de cierto tiempo es el señor X quien parece haber encontrado por él mismo todos los resultados ya que es el único citado y todos los demás autores han desaparecido de la bibliografía. Esta práctica, aunque felizmente es rara, sigue existiendo.

Veamos ahora el problema de las notaciones. Deben ser elegidas con mucho cuidado por varias razones. En primer lugar no deben prestarse a confusión: nadie pensará utilizar f' para designar una función que no sea la derivada de f. Es necesario igualmente utilizar símbolos diferentes para designar objetos diferentes a menos que lo contrario sea explícitamente precisado. Por ejemplo puede utilizar ***a*** para designar un número real y después escribir más lejos *sea ahora **a** un número complejo*.

Las notaciones deben utilizarse al máximo y ser lo más concordantes posible con las de otros autores. Por ejemplo, aunque las letras mayúsculas son utilizadas para las matrices y nadie, que yo conozca, ha escrito todavía *Sea Q la matriz identidad*. He visto a algunos autores estar casi aislados por utilizar sus propias notaciones; lo que obliga al lector a escribir una especie de diccionario para leer el artículo en cuestión; es evidentemente un mal sistema.

Ciertas notaciones se modifican y afinan con el paso del tiempo, por ello es aconsejable utilizar las más recientes, si existe consenso.

Es una buena práctica evitar símbolos inútiles cuando basta con una explicación corta. Es necesario igualmente desterrar las notaciones de una grafía especial, y esto nos conduce naturalmente a hablar de la mecanografía y de la composición de un manuscrito por un impresor. No es conveniente evidentemente utilizar símbolos que no existen en una máquina de escribir o en la lista de los caracteres especiales de los que el impresor dispone.

Como he dicho al principio es necesario reducir el costo de la composición de los textos matemáticos. Es necesario saber también que es mucho más costoso escribir $\frac{a}{b}$ que a/b; también $e^{x\sqrt{x}}$ que $\exp(x\sqrt{x})$. En el folleto de American Mathematical Society que he citado se da una lista de símbolos matemáticos costosos y de sus alternativas.

Los índices de índices son caros y además difíciles de leer, pues el tamaño de los caracteres es cada vez más pequeño. Un impresor dispone de 255 caracteres sobre su teclado. Si se utiliza varias veces la notación *a*, por ejemplo, el impresor la incluirá en su teclado, pero si esta notación sólo es utilizada una sola vez, deberá ser insertada a mano en el texto y a ello seguirá un aumento del coste de fabricación. Hay que evitar incluso una raya o un acento encima de varias letras. En el folleto de la Amer. Math. Soc. cuya lectura recomiendo vivamente, se describen otras reglas de este tipo.

Las notas a pie de página encarecen el trabajo, ya que están compuestas en caracteres más pequeños y necesitan una operación separada para ser insertadas exactamente en el lugar deseado. Lo mejor es no utilizarlas.

Por último, el impresor encuentra serias dificultades con las matrices, diagramas, figuras, tablas o fórmulas que ocupan más de cuatro líneas. ¡Los autores con experiencia conocen el problema de las matrices y de la alineación de sus elementos! Cuando se redacta un artículo para una revista, el autor deberá leer muy atentamente las instrucciones dadas en cada número. En general, se dan unas reglas para ayudar al impresor en la composición y maquetado del texto. Las letras griegas deben ser subrayadas con cierto color, las letras en cursiva deben ser subrayadas con otro color y así sucesivamente. Naturalmente todos estos problemas ligados a la impresión de un artículo no intervienen para el mecanografiado. Por último una vez compuesto el artículo o mecanografiado debe ser releído por el autor para corregir las faltas de composición e impresión. Es un trabajo largo, pesado, delicado, poco interesante y fastidioso, pero debe ser realizado de manera extremadamente cuidadosa. Nada más penoso que leer un texto lleno de erratas. Si el autor deja pasar las erratas en la relectura será el lector quien las corregirá; esto no es muy grave si en vez de *teorema* se ha escrito *teorena*, pero es evidentemente más grave si en vez de A_2 aparece A_1. Para revisar hay que seguir el texto impreso letra por letra con un lápiz y sobre todo no querer ir muy deprisa. Cuando se relee un texto escrito por uno mismo, la mente tiende a ir más rápida que la vista, ya que se sabe de antemano lo que viene después. Si es posible, lo mejor es dárselo a alguien para que lo corrija. De todas maneras hay que realizar varias relecturas. Además faltará verificar que las faltas señaladas han sido correctamente corregidas. Cuando se corrige un texto para un impresor hay que utilizar ciertos símbolos especiales. Esta lista la suele enviar el impresor al mismo tiempo que las pruebas, también se encuentra en la publicación de la Amer. Math. Soc. Las correcciones deben hacerse en rojo e indicarse en el margen.

Los programas de tratamiento de textos científicos tienden actualmente a cambiar un poco las reglas de edición y composición de textos. Ahora se pueden dar a los impresores disquetes utilizables

directamente por fotocomponedoras o textos impresos por las impresoras láser que son de una calidad comparable a la de los textos foto-compuestos.

Todo lo que he dicho en relación a las técnicas de expresión escrita se aprende poco a poco por la lectura de artículos de autores conocidos por su claridad; así como por la práctica y siguiendo los consejos de algún experto, en general del director de investigación .

Por último, cuando se ha publicado un artículo en una revista, el editor envía -la mayor parte de la veces gratuitamente- varios ejemplares de este artículo. Se llaman separatas (*reprints* en inglés). Así se puede dar a conocer el trabajo a los colegas interesados.

Para terminar aconsejo redactar de manera casi definitiva los resultados a medida que se van obteniendo, o en todo caso, muy poco tiempo después. Si se tarda demasiado se corre el riesgo de olvidar los detalles de la demostración que, en aquel momento, eran evidentes, o se arriesga a tenerlo todo en los borradores haciendo difícil su relectura. Una vez comenzada la redacción hay que acabarla sin dejarse distraer por las ideas nuevas que surjan. Evidentemente hay que anotarlas para reflexionar más tarde. Si aportan algo, se modificará la primera redacción. Si se abandona una redacción en curso para profundizar en alguna idea nueva se arriesga, caso que éstas no aporten nada, a perder el hilo y a tener que volver a comenzar. Cuando se redacta es necesario decir que en muchas ocasiones lo mejor es enemigo de lo bueno y que las redacciones sucesivas no mejoran obligatoriamente la calidad de un texto.

Concluyendo, la redacción de los resultados es tan importante como los propios resultados y esto no es, ciertamente, nada despreciable. Nada es más penoso que leer un artículo de estilo desigual donde nada se deduce de forma natural o nada se encadena lógicamente. Hay que colocar el trabajo en su contexto y dar las explicaciones necesarias, pero ni demasiadas ni demasiado pocas. Es papel del profesor velar con cuidado por los primeros escritos de sus alumnos. Jean Pierre Changeux, que hizo su tesis bajo la dirección de Jacques Monod, ha contado sus desventuras en este asunto:

Los resultados demostraban la identidad entre la enzima del colibacilo y la enzima sintetizada por la salmonela híbrida. Faltaba la redacción. Se adoptó el formato de una nota a *Comptes Rendus* (de la Academia de Ciencias). No había previsto que se tratara de una prueba tan dura. El primer texto escrito con gran tranquilidad fue violentamente rechazado por su poca organización, su estilo relajado e impreciso, su longitud abusiva, su brusquedad y su falta de rigor científico. Para Jacques Monod, una nota a Comptes Rendus, por el hecho de su concisión (cuatro páginas a lo sumo) debía redactarse con extremo cuidado. Debía *inspirarme antes del estilo de un soneto que del de una* *novela de Proust. Como en una tragedia clásica todo debía converger a la acción.* Tras estas críticas y comentarios, escribí una segunda versión que no recibió evidentemente el imprimátur: no había tenido en cuenta las notas recibidas a propósito del primer texto. Siguió una tercera versión, después una cuarta. A la quinta, yo no sabía construir una frase, a la sexta perdía mi vocabulario. La novena fue por fin comunicada a Jacques Tréfouël para que la presentara a la Academia. Me di cuenta que para llegar a investigador, no era suficiente probar, ni incluso inventar. Hacía falta también saber escribir. Para Jacques Monod, la expresión escrita de las ideas contaba tanto como las propias ideas. Le había escuchado decir incluso que una idea no existía más que en la medida en que era redactada en forma escrita. [J. P. Changeux, *Une thése avec Jacques Monod: préhistoire des protéines allostériques*, en A. Lwoff y A. Ullmam, eds., ob. cit., p. 200].

Una vez terminado el artículo hay que pensar en publicarlo en una revista especializada. Hay bastantes en todas las disciplinas. Cada una tiene su estilo, que es preciso conocer *a priori*.

Cuando se quiere publicar un artículo en una revista, el procedimiento a seguir -salvo pequeñas variaciones- es casi siempre el mismo: enviar el artículo a un miembro del comité de redacción de dicha revista. En general es fácil que se conozca personalmente a alguno de sus miembros. En caso contrario se puede mandar el artículo directamente al director o al editor de la revista. El joven investigador tendrá interés por recibir las orientaciones de su director que, en general, gestionará la publicación del artículo. El investigador confirmado podrá transmitir directamente sus propios artículos.

Cuando el artículo ha llegado a la revista, será enviado a su vez a dos árbitros (*referee* en inglés), especialistas del tema tratado, cuya identidad no será conocida por el autor del artículo, con el motivo de garantizar su imparcialidad. Dependiendo de los informes, el artículo podrá: ser aceptado; ser aceptado tras algunas modificaciones más o menos importantes solicitadas por los árbitros, o ser rechazado. Hay que señalar que determinados artículos pueden ser rechazados no por falta de calidad, sino simplemente porque no responden a los objetivos de la revista. Así, mientras algunas revistas prefieren artículos totalmente teóricos, otras piden aplicaciones y resultados numéricos... Ello constituye una razón adicional para que el joven investigador solicite la opinión de su director antes de enviar sus trabajos a una revista.

La publicación de un artículo en una revista necesita mucho tiempo, aproximadamente una media de un año. Ciertos árbitros realizan su trabajo en el plazo de un mes, en cambio otros, ya por dejadez, ya por estar ocupados con otros asuntos, tardan más tiempo. Hay que esperar al menos seis meses antes de recibir contestación. Si el artículo es aceptado

sin modificaciones serán necesarios todavía seis meses para que sea enviado al impresor, quien dará las pruebas al autor para su corrección; el autor hará el trabajo y por fin el artículo será incluido en un número de la revista. Esta última fase puede, en ciertas ocasiones, prolongarse ya que la revista tiene a veces una lista de espera *(backlog)* importante de artículos aceptados para ser publicados. La revista de información *Notices of the American Mathematical Society* publica, al menos una vez al año, el tamaño de las listas de espera de las principales revistas matemáticas.

Vistos los plazos de publicación de una revista, se tiende a generalizar la práctica de publicar el artículo como nota interna de su propio grupo de trabajo. Se señala así la fecha y se pueden enviar ejemplares a los colegas interesados. Son los *preprints* de los que ya he hablado.

En general una cierta continuidad de pensamiento sustenta toda obra científica. Ella forma el esqueleto y es con frecuencia tan importante como los resultados individuales que se han obtenido. Sin embargo el verdadero significado de una obra científica es difícil de captar a través de los diferentes artículos que la componen. Será entonces necesario que el investigador la haga accesible en forma de un libro de síntesis.

Completará así su trabajo de creador por medio de una obra didáctica.

CONCLUSION

¿Es verdaderamente necesaria una conclusión? Por medio de citas y ejemplos, he intentado mostrar cuál podía ser el trabajo de investigador con sus dificultades y sus momentos felices. He intentado también dar algunos consejos a los jóvenes que penetran en la vida de la investigación científica y que, con frecuencia, no saben ni a dónde van ni cómo deben ir. Espero al menos haberles hecho ver claramente un cierto número de aspectos de la vida que les espera y haberles suministrado algunas recetas útiles. A los que no hacen investigación he intentado dar un testimonio tan completo y vivo como posible. Naturalmente, aquí no se han evocado numerosos aspectos de esta vida, como las relaciones entre la ciencia y la fe, la ciencia y la moral, así como la responsabilidad del científico o el papel sociológico y económico de la ciencia. He dejado estos asuntos a personas más cualificadas que yo para tratarlas; y numerosos libros se hacen ahora eco de ello. Invito a los investigadores, y sobre todo a los que debutan en esta vía, a adquirir un mínimo de cultura sobre la historia de su disciplina y de las disciplinas vecinas. La ciencia está hecha por los hombres, ella se debe a la conjugación de los esfuerzos de numerosos individuos a través de los siglos y continentes. Es una de las grandes aventuras de la humanidad y, por esta razón, debe interesarse por ella no sólo todo científico sino todo hombre culto. Si no está acompañada de este conocimiento, la ciencia está seca y no es más que técnica. Amenazando, además, con consumir al que se dedica a ella, en lugar de enriquecerle y hacer de él el humanista que debería ser. Existen ahora numerosos libros, escritos por los científicos más eminentes, que recuerdan la historia de las grandes conquistas científicas sin que sea necesario ningún conocimiento específico para abordarlos. Gracias al talento de sus autores, algunos se leen como verdaderas novelas. La investigación es una escuela de voluntad; el futuro investigador debe también tener esta voluntad de instruirse en su propio campo.

Para terminar, me parece que el mejor consejo que se puede dar es el lema utilizado por Guillermo de Orange -y que cada investigador debería adoptar, como lo hiciera Pierre Lecomte du Noüy- aunque es costoso: *No es necesario esperar para emprender una tarea, ni tener éxito para perseverar.*

INDICE DE NOMBRES